Н. Н. Никитин

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

$m\bar{a} = \bar{F}$



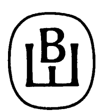
Н. Н. Никитин КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Н. Н. Никитин

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебника для студентов
машиностроительных и приборостроительных
специальностей вузов



Москва
«Высшая школа» 1990

ББК 22.21
Н 62
УДК 531.8

Рецензент — кафедра теоретической механики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина (зав. кафедрой — д-р физ.-мат. наук, проф. В. К. Прокопов)

Никитин Н. Н.

Н 62 Курс теоретической механики: Учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов.— 5-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 1990.— 607 с.: ил.

ISBN 5-06-000695-6

В пятом издании (4-е — 1983 г.) переработаны главы о центре тяжести («Статика»), о сложении движений тела («Кинематика»), параграфы о канонических уравнениях и задаче Ньютона («Динамика»). Ряд примеров статики и динамики заменен новыми. Внесены уточнения и добавления, относящиеся к совершенствованию структуры учебника.

Н $\frac{1603020000\,(4309000000)—522}{001\,(01)—90}$ 98—90 **ББК 22.21**
531

ISBN 5-06-000695-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс теоретической механики предназначен для студентов высших технических учебных заведений, готовящих инженеров-конструкторов и исследователей различных технических специальностей. Он может использоваться также студентами других специальностей.

В основу курса положен многолетний опыт преподавания теоретической механики в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Относительная краткость курса требовала тщательного отбора теоретического материала и примеров, поясняющих основные разделы курса, и наиболее рационального способа их изложения. Так, в статике приведение сил к силе и паре рассматривается для общей пространственной системы сил. В кинематике сразу за простейшими движениями твердого тела излагается часть сложного движения точки с рассмотрением сложения ускорений при переносном поступательном движении. Это позволяет более естественно рассматривать случаи плоского и свободного движений твердого тела.

В динамике общие теоремы для точки и системы рассматриваются совместно, как это принято в МГТУ. Теория малых колебаний излагается для систем с одной и двумя степенями свободы без отдельного рассмотрения прямолинейных колебаний точки.

В курс включен ряд дополнительных разделов, которые при преобразовании МГТУ в технический университет должны стать основными. В динамике достаточно полно изложена теория малых колебаний систем с двумя степенями свободы. Наряду с приближенной теорией дополнительно изложена теория регулярной прецессии и движения быстровращающегося гироскопа под действием силы тяжести, позволяющая обосновать допущения приближенной теории.

Расширена глава о моментах инерции. Это позволяет на примере тензора инерции описать некоторые общие свойства тензора скоростей деформации и тензора напряжений в механике сплошной среды.

В аналитической механике даны уравнения Гамильтона. Основы кинематики сплошной среды содержатся в разделе «Кинематика» (гл. 7); введение в динамику сплошной среды — в разделе «Динамика» (гл. 12). Они изложены без использования операций тензорного исчисления.

В специальную главу «Элементы космических движений» внесены вопросы движения точки под действием силы тяготения Земли и точки переменной массы.

Основная переработка курса была осуществлена при подготовке четвертого издания. Для пятого издания заново написаны главы о центре тяжести в статике; сложении движений твердого тела в кинематике; параграфы о скорости и ускорении в криволинейных координатах, а также скорости и ускорения в сферических координатах, уравнениях Гамильтона и задаче Ньютона. Часть примеров в статике, кинематике и динамике заменена новыми.

В пятое издание внесены некоторые другие дополнения и изменения, обусловленные эволюцией курса теоретической механики в МГТУ в последние годы, где курс принят в качестве основного учебника.

После переработки в пятом издании курса материала В. В. Добронравова не осталось.

Все замечания и пожелания по улучшению книги следует направлять по адресу: *101430, Москва, ГСП-4, ул. Неглинная, д. 29/14, издательство «Высшая школа».*

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Все явления природы представляют собой движение различных форм материи. В теоретической механике рассматриваются механические движения материальных объектов только вещественных форм, таких, как различные материальные тела или в более общем случае сплошные среды, и не рассматриваются такие физические объекты, как электромагнитное поле, их источники и др. Материальность тел и сплошных сред в теоретической механике характеризуется массой и другими величинами, связанными с ней, понятия которых вводятся в динамике.

Всякое изменение материи называют *движением*. Одним из простейших является *механическое движение* — перемещение материальных объектов в пространстве с течением времени без рассмотрения физических свойств движущихся материальных объектов и их изменения в процессе движения. Механическое движение обычно входит составной частью в более сложные виды движения материи.

В теоретической механике изучаются механические движения вещественных форм материальных объектов в пространстве с течением времени.

Пространство, время, как и материя, являются сложными понятиями. В теоретической механике используются их упрощенные понятия или модели. Пространство считается не зависящим от времени и движущейся в нем материи. Принимают, что оно обладает всеми геометрическими свойствами эвклидовой геометрии. Время считают универсальным, не связанным с пространством и движущейся материей. Его характеризуют каким-либо периодическим процессом, например периодом вращения Земли.

Наиболее общим методом изучения всех явлений природы и общества является диалектический метод, который, признавая опыт источником всех наших знаний, придает большое значение абстрактному мышлению, использующему модели явлений.

В теоретической механике широко используются математические методы, абстрактные понятия, модели явлений и законы логики, являющиеся составной частью диалектического метода.

Каждый раздел теоретической механики имеет в своей основе ряд понятий и аксиом, имеющих опытное происхождение. Вводя новые понятия и используя законы логики, получают следствия или теоремы в форме, удобной для практического применения.

Теоретическая механика все время развивается. По мере углубления наших знаний выявляются границы применимости теоретической механики, относительность ее понятий. Выяснилось, что аксиомы или законы классической механики Ньютона не абсолютны.

Для материальных тел, скорости которых близки к скорости света, вместо классической механики следует применять механику специальной теории относительности. Классическая теоретическая механика ограниченно применима для изучения движения элементарных частиц атома, таких, как электрон, протон и др., для изучения движения которых следует применять квантовую механику.

Теоретическая механика широко применяется в технике (авиации, космонавтике, машиностроении, кибернетике и т. д.). На базе теоретической механики возникли и успешно развиваются многие науки, такие, как сопротивление материалов, теория упругости, гидродинамика, газовая динамика и др. В этих науках обычно к законам механики добавляются другие законы, характеризующие дополнительные свойства материальных тел. В сопротивлении материалов и теории упругости учитывается деформация тел и добавляется закон Гука о связи деформаций с силами.

В гидродинамике учитывается скорость деформации и используется дополнительный закон о связи скоростей деформации и сил. В газовой динамике, кроме того, учитывается сжимаемость газа.

Теоретическая механика имеет свою историю становления законов и понятий. Она создавалась вместе с развитием техники под непосредственным влиянием развития производительных сил общества и всей человеческой культуры. Теоретическая механика берет свое начало в глубокой древности, задолго до нашей эры.

Наибольший вклад в основу современной теоретической механики внесли великие ученые Галилей (1564—1642) и Ньютон (1643—1727). Дальнейшее развитие теоретической механики связано с именами многих ученых, наиболее выдающиеся из которых Гюйгенс (1629—1695), Даламбер (1717—1783), Эйлер (1707—1783), Лагранж (1736—1813) и многие другие.

Большой вклад в развитие современной механики внесли русские ученые, такие, как М. В. Остроградский (1801—1862), Н. Е. Жуковский (1847—1921), С. В. Ковалевская (1850—1891), А. М. Ляпунов (1851—1918), К. Э. Циолковский (1857—1935) и др. Своими исследованиями и открытиями они в значитель-

ной мере содействовали развитию механики и ее приложений в технике и естествознании. Плодотворно работают советские ученые и сейчас, продолжая славные традиции корифеев отечественной науки.

Теоретическая механика делится на три части: статику, кинематику и динамику. Статика — раздел теоретической механики, в котором рассматривают свойства сил, приложенных к точкам твердого тела, и условия их равновесия. В кинематике изучают чисто геометрические формы механических движений материальных объектов без учета условий и причин, вызывающих и изменяющих эти движения. В динамике изучаются механические движения материальных объектов в зависимости от сил, т. е. от действия на рассматриваемые объекты других материальных объектов.

РАЗДЕЛ I
СТАТИКА

ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ. СХОДЯЩИЕСЯ СИЛЫ

В статике твердого тела рассматриваются свойства сил, приложенных к твердому телу. В частности, изучается приведение сложных систем сил к более простому виду и устанавливаются условия равновесия различных систем сил, действующих на твердое тело или материальную точку.

Теоретическая механика, как и всякая другая наука, имеет свои понятия и определения, которые используются для формулирования ее аксиом и теорем. Статика базируется на аксиомах, из которых по законам логики, вводя новые понятия, получают все необходимые следствия в удобной для применения форме.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердым телом (или *неизменяемой механической системой*) называют механическую систему, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях. Все тела в природе в той или иной мере деформируемы, но в некоторых задачах деформациями тел можно пренебречь, считая тела твердыми. При рассмотрении движения Земли вокруг Солнца ее можно считать абсолютно твердым телом и даже материальной точкой, хотя в действительности она не твердая, так как на ней есть океаны, воздушная оболочка и т. д. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем называть просто твердым телом.

Понятие силы в теоретической механике является основным, первичным понятием. Силой называют одну из векторных мер действия одного материального объекта на другой рассматриваемый объект. Имеются разные меры действия: скалярные и векторные. Обычно за эталон числового значения

силы принимают значение линейной силы упругости, например пружинного динамометра, которая пропорциональна его деформации. Числовые значения сил различной природы определяют путем сравнения со значением линейной силы упругости.

Сила кроме числового значения характеризуется точкой приложения и направлением действия. Она является векторной величиной. Механическое действие материальных тел друг на друга осуществляется при их соприкосновении (давление стула на пол в местах соприкосновения его ножек с полом) или как действие на расстоянии при посредстве силовых полей (притяжение Луны Землей и т. п.).

Силу как величину векторную обозначают какой-либо буквой со знаком вектора, например $\bar{F}$ или $\bar{P}$. Для выражения числового значения силы или ее модуля используется знак модуля от вектора, т. е. $|\bar{F}|$, $|\bar{P}|$, или те же буквы, но без знака вектора, т. е. F, P.

Системой сил называют совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело или в более общем случае на точки механической системы. Можно рассматривать систему сил, приложенных к одной материальной точке.

Системой сил, эквивалентной нулю (или *равновесной системой сил*), называют такую систему сил, действие которой на твердое тело или материальную точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению состояния покоя или движения по инерции этого тела или материальной точки.

Две системы сил называются эквивалентными, если их действие по отдельности на одно и то же твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях, т. е. если одна система сил приводит твердое тело или материальную точку в какое-то движение, например из состояния покоя, то другая система сил, эквивалентная первой, сообщит такое же движение. Движения, вызванные действием эквивалентных систем сил, имеют одинаковые характеристики для каждого момента времени. Условие эквивалентности двух систем сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$ и $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_k)$ выражают в форме

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n) \backsim (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_k),$$

где n и k — число сил в системах.

Равнодействующей силой рассматриваемой системы сил называют силу, действие которой на твердое тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил. Равнодействующая сила обозначается $\bar{R}^*$, и условие ее эквивалентности рассматриваемой системе сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$ выражается в виде

$$(\bar{R}^*) \backsim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n).$$

Равновесная система сил имеет равнодействующую, равную нулю.

Уравновешивающей силой заданной системы сил считается такая сила, добавление которой к заданной дает новую систему, эквивалентную нулю. Если $\bar{R}^{*\prime}$ является уравновешивающей силой системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$, то, согласно определению, она удовлетворяет условию

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n, \bar{R}^{*\prime})\backsim 0.$$

В дальнейшем убедимся, что не всякая система сил имеет равнодействующую и уравновешивающую силы. Есть системы сил, которые не находятся в равновесии и не эквивалентны одной силе.

§ 2. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Справедливость аксиом механики проверяется на опыте как непосредственно, так и по тем следствиям, которые из них получают.

При формулировке аксиом предполагаем, что на твердое тело или материальную точку действуют силы, которые указаны в соответствующей аксиоме. Твердое тело или материальную точку в общем случае следует считать свободными, имеющими возможность совершать в рассматриваемый момент любые перемещения в пространстве.

I. **Аксиома о равновесии системы двух сил.** *Для равновесия системы двух сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях* (рис. 1). Этой аксиомой устанавливается простейшая система сил, эквивалентная нулю. Если силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ находятся в равновесии, то, естественно, они образуют систему сил, эквивалентную нулю. Действие такой системы сил на покоящееся твердое тело не изменяет состояния покоя этого тела. Аксиома справедлива и для сил, приложенных к одной точке тела или одной материальной точке.

II. **Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы сил, эквивалентной нулю.** *Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) систему сил, эквивалентную нулю. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил является эквивалентной первоначальной системе сил.* Под действием заданной системы сил и новой, полученной после добавления (отбрасывания) равновесной системы сил, тело будет двигаться (или находиться в покое) совершенно одинаково при прочих равных условиях. В частности, к любой

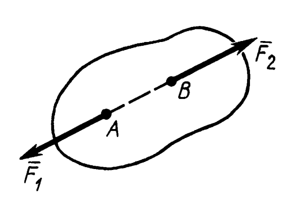


Рис. 1

системе сил можно добавить (отбросить) простейшую равновесную систему сил, состоящую из двух равных по модулю сил, действующих вдоль одной прямой в противоположных направлениях и приложенных в одной или разных точках твердого тела в соответствии с первой аксиомой.

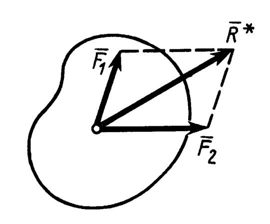


Рис. 2

III. **Аксиома параллелограмма сил.** *Две силы, действующие в одной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах* (рис. 2). Очевидно, справедливо и обратное. Одну силу, приняв за равнодействующую, можно разложить по правилу параллелограмма на две составляющие силы.

Эту аксиому долгое время в истории развития механики пытались доказать и, следовательно, считали теоремой. Тщательный анализ таких доказательств, часто очень остроумных, показал, что для этого дополнительно используются положения, которые следует принимать за аксиомы.

Замену двух сил одной равнодействующей силой по правилу параллелограмма называют векторным сложением этих сил. Векторное сложение сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ математически выражают так:

$$\bar{R}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Если силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ направлены по одной прямой в одну или противоположные стороны, то векторное сложение переходит в алгебраическое.

Модуль равнодействующей силы R^* как векторную сумму сил вычисляют по формуле диагонали параллелограмма

$$R^* = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\bar{F}_1, \hat{\ } \bar{F}_2)}.$$

Применяя теорему синусов к одному из треугольников параллелограмма, определяют синусы углов, которые образует равнодействующая $\bar{R}^*$ с составляющими ее силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$:

$$\sin(\bar{R}^*, \hat{\ } \bar{F}_1) = \frac{F_2 \sin(\bar{F}_1, \hat{\ } \bar{F}_2)}{R^*}; \quad \sin(\bar{R}^*, \hat{\ } \bar{F}_2) = \frac{F_1 \sin(\bar{F}_1, \hat{\ } \bar{F}_2)}{R^*}.$$

Более предпочтительным способом определения числового значения и направления равнодействующей силы по отношению к каким-либо прямоугольным осям координат является метод проекций, который особенно удобен в случае векторного сложения более чем двух сил. Этот метод рассматривается дальше, при изучении систем сходящихся сил.

IV. **Аксиома о равенстве сил действия и противодействия** — один из основных законов классической механики, сформулированных Ньютоном: *всякой силе действия есть равная, но*

противоположная сила противодействия. По отношению к двум материальным точкам эта аксиома утверждает, что *силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой, проходящей через взаимодействующие точки.* Материальные точки при этом могут взаимодействовать как через посредство силовых полей, т. е. на расстоянии, так и путем соприкосновения друг с другом, если их считать твердыми телами очень малых размеров.

В статике эту аксиому применяют для твердых тел. Силы взаимодействия двух твердых тел (при взаимодействии путем соприкосновения или на расстоянии при посредстве силовых полей) равны по модулю и противоположны по направлению. Силы действия и противодействия всегда приложены к разным телам или к различным взаимодействующим точкам одного и того же тела.

Таким образом, в природе силы встречаются всегда по две: силы действия и противодействия.

V. **Аксиома связей.** *Связью* для твердого тела или материальной точки называют материальные объекты (тела и точки), которые ограничивают свободу перемещения рассматриваемого твердого тела или материальной точки. Аксиома связей утверждает, что *всякую связь можно отбросить и заменить силой, реакцией связей* (в простейшем случае) *или системой сил* (в общем случае). Эта аксиома фактически уже содержится в определении силы, но в истории развития механики это не было осознано сразу. Длительное время после формулировки Ньютона основных законов классической механики их применение к несвободным твердым телам и механическим системам встречалось с трудностями, пока не была дополнительно сформулирована аксиома связей. Учитывая большое значение аксиомы связей для дальнейшего изложения теоретической механики, оставим эту аксиому как самостоятельную.

Почти все теоремы и окончательные результаты теоретической механики формулируются для материальной точки или твердого тела, освобожденных от связей, т. е. когда связи заменены силами реакций связей. Поэтому очень важно уметь

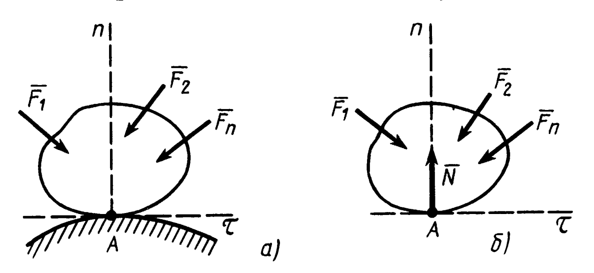


Рис. 3

правильно заменять отброшенные связи силами реакций связей. Это одна из главных задач при изучении статики, которой следует уделить наибольшее внимание.

Силы реакций связей для рассматриваемого тела или точки зависят прежде всего от приложенных сил и от вида связей. При движении силы реакций связей зависят еще и от характеристик движения. Так, при движении тела в воздухе сила реакции воздуха на движущееся тело зависит от скорости движения тела относительно воздуха.

Приведем примеры связей и их замены силами реакций связей. Если связью для твердого тела (рис. 3, *а*) является абсолютно гладкая поверхность другого тела, то сила реакции такой поверхности, если соприкосновение происходит в одной точке, направлена по нормали к общей касательной соприкасающихся поверхностей тел независимо от сил, приложенных к рассматриваемому телу (рис. 3, *б*). Сила реакции связи $\bar{N}$ направлена в сторону, противоположную направлению, в котором связь препятствует перемещению рассматриваемого тела. Числовое значение силы реакции при равновесии определяется приложенными к телу силами, которые в отличие от сил реакций связей часто называют *активными* силами.

Если соприкосновение происходит не в одной точке, а по некоторой площади поверхности, то реакция такой связи сводится к системе распределенных по поверхности сил, которые в некоторых случаях удается заменить одной равнодействующей силой реакции связи. В общем случае система распределенных сил может не иметь равнодействующей.

В тех случаях, когда сила реакции связей не только по модулю, но и по направлению зависит от приложенных сил, ее обычно раскладывают по правилу параллелограмма на составляющие параллельно осям координат. Через составляющие легко определяется как модуль силы реакции, так и ее направление.

Неизвестную по модулю и направлению силу реакции создают ц и л и н д р и ч е с к и й (плоский) и ш а р о в о й шарниры. Пусть имеем балку AB, находящуюся в равновесии под действием силы $\bar{F}$ и закрепленную на одном конце с помощью цилиндрического шарнира A, а на другом — катковой опоры B (рис. 4, *а*). Цилиндрическим шарниром называют устройство,

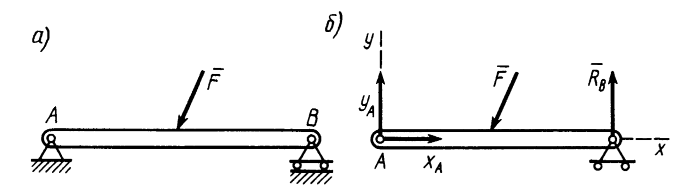


Рис. 4

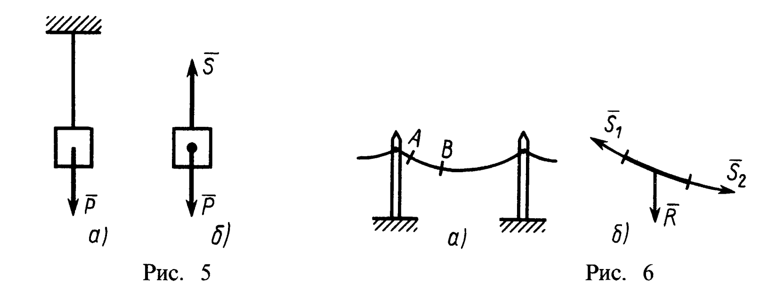


Рис. 5 Рис. 6

позволяющее балке поворачиваться в плоскости вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Устройство катковой опоры ясно из рисунка. На рис. 4, *б* показана та же балка после освобождения от связей. Сила реакции катковой опоры направлена по нормали к общей касательной, если поверхности соприкосновения гладкие. Неизвестная по модулю и направлению реакция цилиндрического шарнира разложена на две составляющие $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, предположительно направленные в положительном направлении осей координат.

В случае шарового шарнира силу реакции раскладывают на три составляющие, параллельные осям координат.

Гибкие связи (канаты, тросы, нити) дают силы реакции связей (силы натяжения), направленные по касательной к гибкой связи. На рис. 5, *а*, *б* сила натяжения нити $\bar{S}$ заменяет действие нити на груз. На рис. 6, *а*, *б* показаны силы натяжения провода в сечениях *A* и *B*, действующих на часть провода *AB*.

На рис. 7, *а*, *б* показаны силы реакции цилиндрического шарнира *A* и стержня *BC* на балку *AB*. Стержень *BC*, имеющий на концах шарниры *B* и *C*, создает силу реакции на балку *AB* только в направлении самого стержня *BC* (шарнирный стержень), если на этот стержень не действуют другие силы между его шарнирами *B* и *C*. Действительно, если рассмотреть находящийся в равновесии стержень *BC*, то на него действуют только две силы в точках *B* и *C*. Согласно первой аксиоме, эти силы должны быть направлены по одной прямой, проходящей через точки *B* и *C*. Следовательно, сила реакции стержня $\bar{Y}_B$ на балку *AB* направлена по *BC*, так как действие балки на стержень дает силу, направленную по стержню.

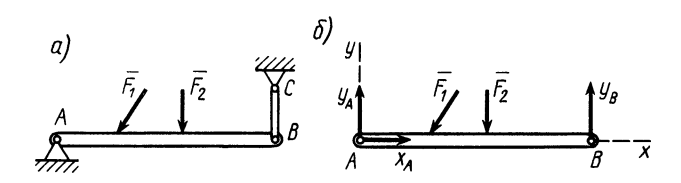


Рис. 7

Силы реакций других наиболее часто встречающихся связей рассматриваются в примерах.

VI. **Аксиома затвердевания.** *Если деформируемое тело находится в равновесии, то равновесие его без изменения системы приложенных сил не нарушится от наложения на точки тела дополнительных связей, включая превращение деформируемого тела в абсолютно твердое.* С помощью этой аксиомы устанавливается, в частности, связь между условиями равновесия сил, приложенных к твердому и деформируемому телам. Из аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, необходимы и для равновесия деформируемого тела. Но условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, не являются достаточными для равновесия деформируемого тела.

Сформулированные аксиомы и являются той основой, на которой строится вся статика сил, приложенных к твердому телу.

Аксиомы статики характеризуют свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу или одной точке. Но они не учитывают материальных свойств тела или точки, характеризуемых их массой, а для тела — еще распределением массы в теле, влияние которых существенно при их движении.

Совместный учет действия сил и материальных свойств тел или точки содержится в аксиомах динамики. Такие аксиомы статики, как аксиома о параллелограмме сил, о равенстве сил действия и противодействия, аксиома связей, справедливы и в динамике. Так как в статике рассматриваются свойства и неравновесных систем сил, под действием которых твердое тело или точка не могут находиться в покое относительно инерциальной системы отсчета, то для оправдания этого в статике можно считать, что эти системы сил являются частями более укрупненных равновесных систем сил, под действием которых тело или материальная точка находится в покое или совершает движение по инерции.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ СТАТИКИ

Теорема о переносе силы вдоль линии действия. *Действие силы на твердое тело не изменится от переноса силы вдоль своей линии действия.*

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\bar{F}$ (рис. 8). К этой силе на ее линии действия в точке B в соответствии с аксиомой II добавим систему сил $(\bar{F}', \bar{F}'')$, эквивалентную нулю, для которой $\bar{F}'' = -\bar{F}'$. Выберем силу $\bar{F}'$, равную силе $\bar{F}$. Полученная система трех сил $(\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}'')$ эквивалентна, согласно аксиоме о добавлении равновесной системы сил, силе $\bar{F}$, т. е.

$$(\bar{F}) \backsim (\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}'').$$

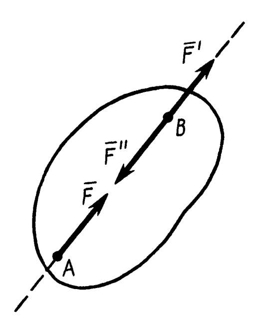


Рис. 8

Система сил $(\bar{F}, \bar{F}'')$, согласно аксиоме I, эквивалентна нулю и, согласно аксиоме II, ее можно отбросить. Получится одна сила $\bar{F}'$, приложенная в точке B, т. е. $(\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}'') \backsim (\bar{F}')$. Окончательно получаем

$$(\bar{F}) \backsim (\bar{F}').$$

Сила $\bar{F}$ приложена в точке A. Она эквивалентна такой же по модулю и направлению силе $\bar{F}'$, приложенной в точке B, где точка B — любая точка линии действия силы $\bar{F}$. Теорема доказана. Таким образом, точка приложения силы в абсолютно твердом теле несущественна. Силу для твердого тела можно считать приложенной в любой точке линии действия. Векторные величины, которые можно прикладывать в любой точке линии действия, называют *скользящими*. Сила, приложенная к твердому телу, есть вектор скользящий. В деформируемом теле силу нельзя переносить вдоль линии действия. Сила в этом случае не является скользящим вектором.

Теорема о трех силах. *Если твердое тело под действием трех сил, две из которых пересекаются в одной точке, находится в равновесии, то линии действия таких трех сил пересекаются в одной точке.*

Обратная теорема неверна, т. е. если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то такая система сил не обязательно является равновесной.

Пусть имеем систему трех сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$, две из которых, например $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, пересекаются в одной точке A (рис. 9). Докажем, что если тело находится в равновесии под действием этих трех сил, то линия действия силы $\bar{F}_3$ пройдет через точку A, т. е. линии действия трех сил пересекаются в одной точке.

Силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, линии действия которых пересекаются в точке A, перенесем в эту точку и заменим их равнодействующей $\bar{R}_{12}$ по аксиоме параллелограмма сил. Система трех сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$ свелась к эквивалентной системе двух сил $(\bar{R}_{12}, \bar{F}_3)$, находящихся в равновесии, так как твердое тело, на которое они действуют, по условиям теоремы находится в равновесии. Согласно аксиоме I, такие две силы должны быть направлены по одной прямой, проходящей через точки их приложения. Следовательно, линия действия силы $\bar{F}_3$ должна пройти через точку приложения силы $\bar{R}_{12}$, т. е. точку пересечения сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$. Таким образом, три силы пересекутся в одной точке.

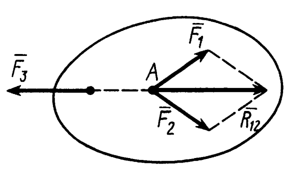


Рис. 9

Теорема о трех силах позволяет в некоторых случаях определить линию действия неизвестной силы, приложенной к твердому телу.

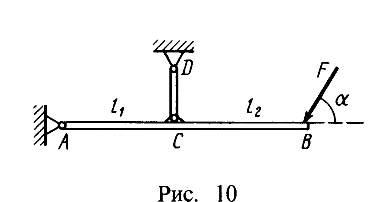


Рис. 10

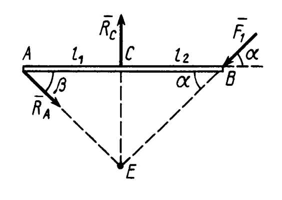


Рис. 11

Пример. Дана балка AB, закрепленная, как указано на рис. 10. На балку действует активная сила $\bar{F}$, направление которой задано углом α. Определить линию действия силы реакции цилиндрического шарнира $\bar{R}_A$.

Решение. Освободим балку от связей, заменив их силами реакций связей (рис. 11). Сила реакции стержня DC на балку AB направлена по стержню DC. Ее линия действия пересекается с линией действия заданной силы $\bar{F}$ в точке E. Согласно теореме о трех силах при равновесии балки, через точку E должна пройти и линия действия силы реакции $\bar{R}_A$. Ее направление определится углом β, который зависит от угла α и положения точки C:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{CE}{AC} = \frac{l_2}{l_1}\operatorname{tg}\alpha.$$

Если $AC = BC$, то $\beta = \alpha$.

§ 4. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Рассмотрим одну из важных систем сил — систему сходящихся сил. Для этой системы сил следует рассмотреть приведение ее к простейшему виду и установить условия равновесия.

Системой сходящихся сил (или пучком сил) называют такую систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке — центре пучка. Сходящиеся системы сил могут быть пространственными и плоскими, т. е. расположенными в одной плоскости.

Приведение к равнодействующей силе

Рассмотрим общий случай пространственной системы сходящихся сил. Так как сила, действующая на твердое тело, есть вектор скользящий, то можно считать, что силы системы $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n)$ приложены в одной точке — центре пучка (рис. 12).

Применяя к первым двум силам пучка $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ аксиому параллелограмма, заменим их одной равнодействующей силой $\bar{R}_{12}$ (рис. 13), причем

$$\bar{R}_{12} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Затем по правилу параллелограмма складываем силы $\bar{R}_{12}$ и $\bar{F}_3$ и получаем их равнодействующую:

$$\bar{R}_{123} = \bar{R}_{12} + \bar{F}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

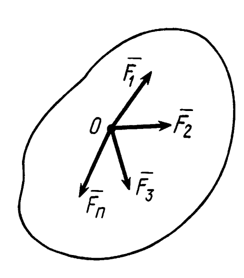




Рис. 12

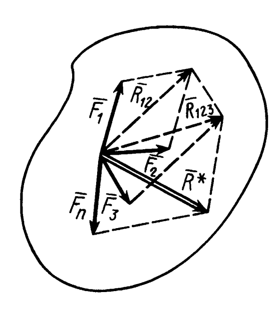


Рис. 13

и т. д. Продолжая процесс векторного сложения сил для всех n сил, получим

$$\bar{R}^* = \bar{R}_{12,\dots,n-1} + \bar{F}_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_{n-1} + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i.$$

Таким образом, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе $\bar{R}^*$, которая и является равнодействующей этой системы сил.

Процесс последовательного применения к силам правила параллелограмма, или их векторного сложения, приводит к построению силового многоугольника из заданных сил. В силовом многоугольнике конец одной из сил служит началом другой (рис. 14). Равнодействующая сила $\bar{R}^*$ в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней, т. е. изображается замыкающей силового многоугольника, который в общем случае является незамкнутым. Силы в силовом многоугольнике можно изображать в любой последовательности. От этого изменится форма силового многоугольника, а замыкающая не изменится; следовательно, не изменится и равнодействующая сила.

Для пространственной системы сходящихся сил силовой многоугольник является *пространственной* фигурой, для плоской — *плоской*. Для плоской системы сходящихся сил равнодействующую силу можно определить графически путем построения замыкающей силового многоугольника в выбранном для сил масштабе. Для пространственной системы сходящихся сил пришлось бы силовой многоугольник строить в пространстве из стержней.

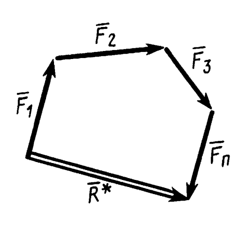


Рис. 14

Итак, *система сходящихся сил в общем случае приводится к одной силе — равнодействующей этой системы сил, которая изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на силах системы.* Линия действия равнодействующей

силы проходит через центр пучка параллельно замыкающей силового многоугольника.

Для аналитического определения равнодействующей силы следует выбрать систему прямоугольных осей координат и воспользоваться известной из геометрии теоремой о том, что проекция замыкающей любого многоугольника на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих его сторон на ту же ось.

Так как равнодействующая сила $\bar{R}^*$ является замыкающей силового многоугольника, или векторной суммой сил, то

$$\bar{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i. \tag{1}$$

Проецируя векторы векторного равенства на прямоугольные оси координат, согласно теореме о проекции замыкающей получим

$$R_x^* = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \quad R_y^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \quad R_z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \tag{2}$$

По проекциям определяем модуль равнодействующей силы и косинусы углов ее с осями координат по формулам

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}; \tag{3}$$

$$\cos(R_x^*, \wedge x) = R_x^*/R^*; \quad \cos(\bar{R}^*, \wedge y) = R_y^*/R^*; \quad \cos(\bar{R}^*, \wedge z) = R_z^*/R^*. \tag{4}$$

В формуле (3) перед квадратным корнем всегда берут знак плюс, так как ореляется модуль равнодействующей силы.

В случае плоской системы сходящихся сил одну из координатных осей, обычно Oz, выбирают перпендикулярной силам, тогда каждая из сил пучка даст проекцию на эту ось, равную нулю, а следовательно, будет равна нулю и проекция равнодействующей силы на эту ось, т. е.

$$R_z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \equiv 0.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, замыкающая силового многоугольника, изображающая равнодействующую силу, должна обратиться в точку, т. е. конец последней силы в многоугольнике должен совпасть с началом первой силы. Такой силовой многоугольник называют *замкнутым* (рис. 15). Получено условие равновесия сходящихся сил в геометрической форме: *для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы силовой*

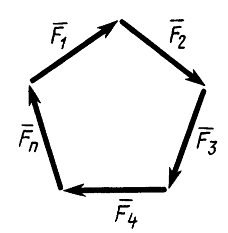


Рис. 15

многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым. Для случая трех сходящихся сил при равновесии должен быть замкнутым силовой треугольник, построенный из трех сил.

Для определения неизвестных сил при равновесии более предпочтительным является использование условий равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме. Так как при равновесии системы сходящихся сил равнодействующая сила должна быть равна нулю (силовой многоугольник замкнут), то из этого следует, что равно нулю подкоренное выражение в (3), состоящее из суммы положительных величин. Таким образом, равны нулю квадраты каждой из величин подкоренного выражения, а следовательно, равны нулю и сами величины. Получаем условия равновесия пространственной системы сходящихся сил в аналитической форме:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0, \tag{5}$$

т. е. *для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на каждую из трех прямоугольных осей координат были равны нулю.*

В случае плоской системы сходящихся сил одну из осей координат, обычно Oz, выбирают перпендикулярной силам, а две другие оси — соответственно в плоскости сил. Тогда третье условие из (5) превратится в тождество $\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0$. Отбрасывая его, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0, \tag{6}$$

т. е. *для равновесия плоской системы сходящихся сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных координатных осей, лежащих в плоскости сил, были равны нулю.*

Проецирование силы на оси координат

Если дана сила $\bar{F}$, то ее проекции на прямоугольные оси координат вычисляются по формулам

$$F_x=\bar{F}\cdot\bar{i}=F\cos(\bar{F},\hat{\ }x); \quad F_y=\bar{F}\cdot\bar{j}=F\cos(\bar{F},\hat{\ }y);$$
$$F_z=\bar{F}\cdot\bar{k}=F\cos(\bar{F},\hat{\ }z),$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат. Косинусы углов силы с осями координат удовлетворяют условию

$$\cos^2(\bar{F},\hat{\ }x)+\cos^2(\bar{F},\hat{\ }y)+\cos^2(\bar{F},\hat{\ }z)=1.$$

Из трех углов независимыми являются только два.

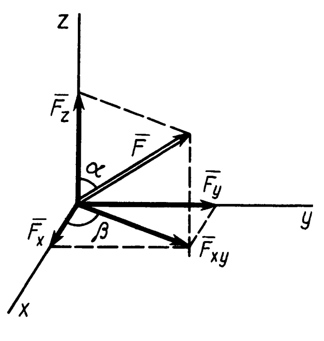


Рис. 16

При проецировании силы на прямоугольные оси координат целесообразно использовать тоже два угла. Для этого предварительно силу разлагают на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых параллельна какой-либо оси координат, например Oz, а другая находится в координатной плоскости двух других осей, в нашем случае — координатной плоскости Oxy (рис. 16). Получаем

$$\bar{F}=\bar{F}_z+\bar{F}_{xy}.$$

Проецируя векторы векторного равенства на координатные оси, имеем

$$F_x=F\sin\alpha\cos\beta;\quad F_y=F\sin\alpha\cos\beta;$$

$$F_z=F\cos\alpha,$$

так как

$$F_{xy}=F\sin\alpha.$$

При проецировании использованы только два угла: α и β.

Векторные величины $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$, $\bar{F}_z$ называются **составляющими** силы $\bar{F}$ по осям координат. Скалярные величины F_x, F_y, F_z являются проекциями силы $\bar{F}$ на оси координат. Таким образом, силу на оси координат проецируют обычно в два приема. Сначала ее проецируют на одну из осей и на координатную плоскость двух других осей. Проекция силы на плоскость является вектором. Этот вектор затем проецируют на оси координат, расположенные в плоскости.

Пример 1. Подъемный кран, имеющий вертикальную ось вращения AB, состоит из стержней, скрепленных шарнирами. Ось крана закреплена с помощью подпятника A и подшипника B (рис. 17, *а*). Считая стержни и весь кран невесомыми, определить силы реакций в подпятнике и в подшипнике, усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4*, если известны размеры h и l, а также углы α_1, α_2, α_3. Стержни *2* и *5* горизонтальны. Кран с помощью троса CD удерживает груз, сила тяжести которого равна P.

Решение. Считая кран твердым телом, освободим его от связей, которыми являются подпятник и подшипник, заменив их силами реакций связей. Сила реакции подшипника (цилиндрический шарнир) перпендикулярна его оси. Направление силы реакции подпятника заранее не известно и подлежит определению. На весь кран, находящийся в равновесии, действуют три силы: $\bar{P}$, $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ (рис. 17, *б*). Линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке, т. е. линия действия силы $\bar{R}_A$ должна пройти через точку K, в которой пересекаются линии действия сил $\bar{P}$ и $\bar{R}_B$. Три силы должны образовывать также замкнутый силовой треугольник. Отложим силу $\bar{P}$ в выбранном масштабе и проведем через ее начало и конец линии, параллельные силам $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$. В полученном силовом треугольнике три силы должны быть направлены друг за другом (рис. 17, *в*). Из полученного прямоугольного треугольника находим

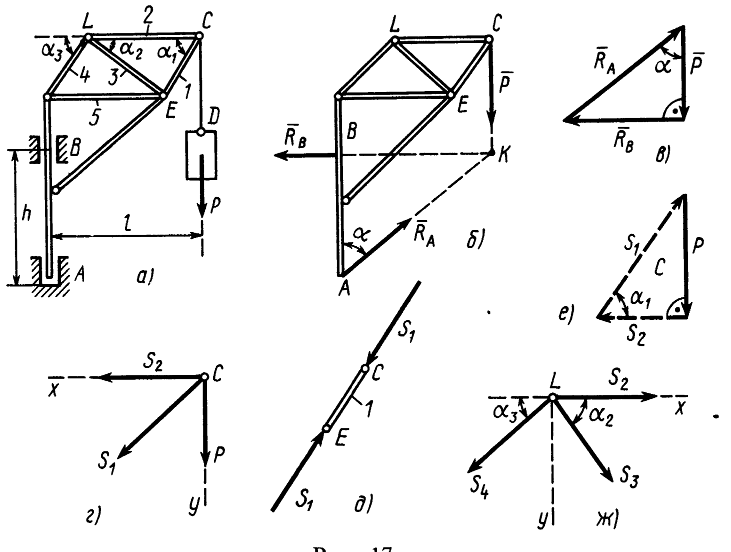


Рис. 17

$$R_A = \frac{P}{\cos\alpha}, \quad R_B = P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Из геометрического треугольника ABK имеем

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{l}{h}.$$

Для определения усилий в стержнях *1* и *2* применим метод вырезания узлов. Для этого рассмотрим равновесие отдельного шарнира или узла C. На этот узел действуют сила $\bar{P}$ через трос и силы реакций стержней *1* и *2*, которые следует мысленно отбросить. Силы реакций стержней на узел должны быть направлены по стержням, так как на эти стержни между их шарнирами другие силы не действуют. Стержни являются шарнирными. (Условимся силы реакций стержней направлять от узла (рис. 17, *г*) и знак вектора у сил на рисунке не ставить, чтобы не увеличивать без необходимости число обозначений для одинаковых по числовому значению сил.)

Выбрав в точке C оси координат, составим условия равновесия для плоской системы сходящихся сил, действующих на узел C:

$$\Sigma F_{ix} = 0, \quad \Sigma F_{iy} = 0.$$

Эти условия в рассматриваемом случае принимают форму в проекциях на оси:

$$x)\quad S_2 + S_1 \cos\alpha_1 = 0,$$

$$y)\quad P + S_1 \sin\alpha_1 = 0.$$

Из полученных уравнений получаем:

$$S_1 = -\frac{P}{\sin\alpha_1}, \quad S_2 = -S_1 \cos\alpha_1 = \frac{P}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}.$$

Знак «—» у S_1 показывает, что направление этой силы противоположно принятому, т. е. направлено к узлу. Рассматривая равновесие отдельного стержня *1*, убеждаемся, что на него действуют только две силы со стороны узлов C и E. Эти силы должны быть при равновесии равны по модулю и противоположны по направлению. Узел C действует на стержень *1* с силой

S_1, противоположной по направлению силе действия стержня на узел E (рис. 17, *д*). Таким образом, получаем, что при рассмотрении равновесия узла C, когда S_1 имеет отрицательное значение, стержень *1* будет сжат; S_2 получили с плюсом. Следовательно, стержень *2* будет испытывать растяжение.

На узел C действуют три силы, и они поэтому должны образовывать замкнутый силовой треугольник. Построение силового треугольника следует начать с известной силы $\bar{P}$, проводя через ее концы линии, параллельные неизвестным по значению силам реакций стержней (рис. 17, *е*). Из силового треугольника можно определить силы S_1 и S_2.

Из уравнений равновесия или силового треугольника можно определить только две неизвестные силы. Поэтому при дальнейшем решении задачи следует переходить к рассмотрению равновесия узла, на который действуют не более двух неизвестных сил. Таким узлом является узел L. На узел E действуют три неизвестные силы. При рассмотрении равновесия узла L будем направлять силы реакций стержней опять от этого узла (рис. 17, *ж*) независимо от ранее полученных знаков для них. В уравнения равновесия уже известную силу S_2 следует подставить со знаком плюс, полученным для нее ранее. Условия равновесия сил, действующих на узел L, имеют форму:

$$x)\ \ S_2+S_3\cos\alpha_2-S_4\cos\alpha_3=0,$$
$$y)\ \ S_3\sin\alpha_2+S_4\sin\alpha_3=0.$$

Из этих уравнений находим $S_4=-S_3\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}$, $S_3=-\dfrac{S_2\operatorname{tg}\alpha_3}{\cos\alpha_2(\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3)}$. Подставляя в выражение для S_4 полученное значение S_3, получим

$$S_4=\frac{S_2\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3}{\sin\alpha_3(\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3)}.$$

Усилие S_3 при положительном S_2 отрицательно. Следовательно, стержень *3* сжат. Усилие S_4 положительно. Поэтому стержень *4* растянут.

Для узла L можно построить также замкнутый силовой треугольник и решить задачу нахождения неизвестных сил геометрически.

Пример 2. Груз с силой тяжести $P=200$ кН прикреплен с помощью троса к шарниру D, который крепится к вертикальной стене тремя стержнями, два из которых расположены в горизонтальной плоскости, а третий — в вертикальной, с помощью шарниров. Сила сопротивления груза от ветра $R=100$ кН горизонтальна и параллельна стене. Определить силу натяжения троса и усилия в стержнях, считая стержни невесомыми, если $\alpha=60°$, $\beta=30°$ (рис. 18, *а*).

Решение. На находящийся в равновесии груз E действует система трех сходящихся сил, расположенных в вертикальной плоскости, параллельной стене. Это сила тяжести $\bar{P}$, сила сопротивления $\bar{R}$ и сила натяжения троса $\bar{S}$, направленная по нему (рис. 18, *б*). Сила $\bar{S}$ должна уравновесить равнодействующую сил $\bar{P}$ и $\bar{R}$. Следовательно,

$$S=\sqrt{P^2+R^2}=100\sqrt{5}\,\text{кН},$$

так как силы $\bar{P}$ и $\bar{R}$ перпендикулярны. Сила $\bar{S}$ составляет с вертикалью угол φ, для которого

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{R}{P}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим равновесие шарнира D, на который действуют силы реакции трех стержней $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$, направленные по стержням, и сила натяжения троса, равная S (рис. 18, *в*). Имеем пространственную систему сходящихся сил, условия равновесия которой имеют форму

$$\sum F_{ix}=0,\quad \sum F_{iy},\quad \sum F_{iz}=0.$$

В рассматриваемом случае для выбранных осей координат имеем:

$$x)\ \ S_1\cdot\cos\alpha-S_2\cdot\cos\alpha+S\cdot\sin\varphi=0;$$
$$y)\ \ -S_1\cdot\sin\alpha-S_2\cdot\sin\alpha-S_3\cdot\sin\beta=0;$$
$$z)\ \ S\cdot\cos\varphi+S_3\cdot\cos\beta=0.$$

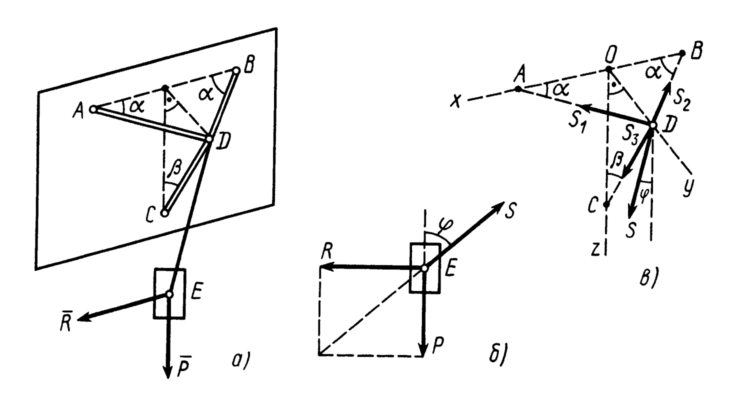


Рис. 18

Так как

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{2}{\sqrt{6}};\qquad \sin\varphi=\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{6}},\qquad \alpha=60^\circ,\qquad \beta=30^\circ,$$

то система уравнений принимает форму

$$S_1\cdot\frac{1}{2}-S_2\cdot\frac{1}{2}+100\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=0;$$

$$-S_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-S_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-S_3\cdot\frac{1}{2}=0;$$

$$100\sqrt{5}\,\frac{2}{\sqrt{6}}+S_3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$S_3=-210{,}8\text{ кН};\quad S_2=152{,}1\text{ кН};\quad S_1=-33{,}2\text{ кН}.$$

Усилия в стержнях направляли от рассматриваемого узла и получили S_1 и S_3 со знаком минус, а S_2 — со знаком плюс. Это служит указанием, что стержни *1* и *3* подвергаются сжатию, а стержень *2* — растяжению.

ГЛАВА 2
МОМЕНТЫ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ

Для рассмотрения различных систем сил необходимо ввести понятия алгебраического и векторного моментов силы относительно точки и момента силы относительно оси. Введем эти характеристики действия силы на твердое тело и рассмотрим их свойства.

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

При рассмотрении плоской системы сил, приложенных к твердому телу, используется понятие алгебраического момента силы относительно точки.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки (рис. 19), взятое со знаком плюс или минус.

Плечом h силы $\bar{F}$ относительно точки называют кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы, т. е. длину отрезка перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\bar{F}$.

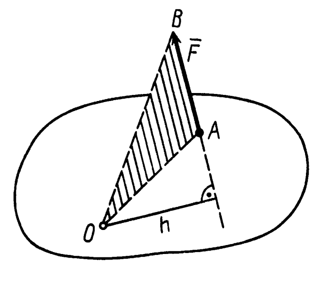


Рис. 19

Обозначим $M_O(\bar{F})$ или M_O алгебраический момент силы $\bar{F}$ относительно точки O. Тогда

$$M_O(\bar{F}) = \pm Fh. \qquad (1)$$

Если сила стремится вращать тело вокруг моментной точки (точки, относительно которой вычисляют алгебраический момент силы) против часовой стрелки, то берем знак плюс, если по часовой стрелке — знак минус.

Алгебраический момент силы представляет собой произведение силы на длину (в СИ — Н·м).

Из определения алгебраического момента силы относительно точки следует, что он не зависит от переноса силы вдоль ее линии действия. Алгебраический момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку. Сумма алгебраических моментов относительно точки двух равных по модулю, но противоположных по направлению сил, действующих вдоль одной прямой, равна нулю. Численно алгебраический момент относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе $\overline{AB}$ и моментной точке:

$$M_O(\bar{F}) = \pm 2 \text{ пл.} \Delta OAB. \qquad (2)$$

§ 2. ВЕКТОРНЫЙ МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

При рассмотрении пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, применяется понятие векторного момента силы относительно точки.

Векторным моментом силы относительно точки называют вектор, приложенный в этой точке и равный по модулю произведению силы на плечо силы относительно этой точки. Векторный момент силы направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка, таким образом, что с его конца можно видеть стремление силы вращать тело против движения часовой стрелки (рис. 20).

Плечом h силы относительно точки O называют кратчайшее расстояние от этой точки до линии действия силы.

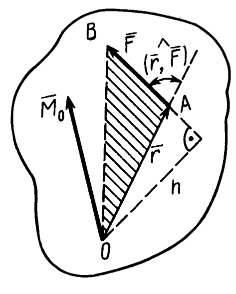


Рис. 20

Условимся векторный момент силы $\bar{F}$ относительно точки O обозначать $\bar{M}_O(\bar{F})$, а его числовую величину — $|\bar{M}_O(\bar{F})|$. Тогда, согласно определению,

$$|\bar{M}_O(\bar{F})| = Fh.$$

Как и для алгебраического момента, векторный момент силы относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе и моментной точке:

$$|\bar{M}_O(\bar{F})| = 2 \text{ пл.} \Delta OAB.$$

Справедлива формула

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}, \qquad (3)$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор, проведенный из моментной точки O в точку приложения силы или любую другую точку линии действия силы.

Чтобы убедиться в справедливости формулы (3), достаточно показать, что $\bar{r} \times \bar{F}$ по величине и направлению выражает векторный момент силы относительно точки O. По определению векторного произведения двух векторов известно, что

$$|\bar{r} \times \bar{F}| = Fr \sin(\bar{r},\hat{\ } \bar{F}).$$

Как показано на рис. 20, $r \sin(\bar{r},\hat{\ } \bar{F}) = h$, причем это равенство справедливо для любой точки линии действия, куда проведен радиус-вектор $\bar{r}$. Итак,

$$|\bar{r} \times \bar{F}| = Fh,$$

что совпадает с векторным моментом силы относительно точки O. Вектор $\bar{r} \times \bar{F}$, как известно, перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\bar{r}$ и $\bar{F}$, т. е. плоскости треугольника OAB, которой перпендикулярен и векторный момент $\bar{M}_O(\bar{F})$.

Направление $\bar{r} \times \bar{F}$ тоже совпадает с направлением $\bar{M}_O(\bar{F})$. Заметим, что векторный момент силы относительно точки считается вектором, приложенным к этой точке.

Векторный момент силы относительно точки не изменяется от переноса силы вдоль ее линии действия. Он станет равным нулю, если линия действия силы пройдет через моментную точку.

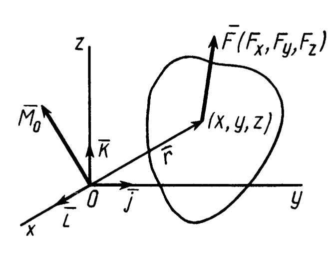


Рис. 21

Если сила $\bar{F}$ дана своими проекциями F_x, F_y, F_z на оси координат и даны координаты x, y, z точки приложения этой силы (рис. 21), то векторный момент относительно начала координат, согласно формуле (3), после разложения по осям координат вычисляем по формуле

$$\bar{M}_O(\bar{F})=\bar{r}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\bar{i}+$$

$$+(zF_x-xF_z)\bar{j}+(xF_y-yF_x)\bar{k}, \qquad (4)$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат.

Используя формулу (4), можно выделить проекции $\bar{M}_O(\bar{F})$ на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox}(\bar{F})&=yF_z-zF_y;\\ M_{Oy}(\bar{F})&=zF_x-xF_z;\\ M_{Oz}(\bar{F})&=xF_y-yF_x.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Модуль векторного момента $\bar{M}_O(\bar{F})$ и косинусы углов его с осями координат определяем по формулам

$$\left.\begin{aligned} &|\bar{M}_O(\bar{F})|=\sqrt{(yF_z-zF_y)^2+(zF_x-xF_z)^2+(xF_y-yF_x)^2};\\ &\cos(\bar{M}_O,\wedge\ x)=\frac{M_{Ox}(\bar{F})}{|\bar{M}_O(\bar{F})|};\quad \cos(\bar{M}_O,\wedge\ y)=\frac{M_{Oy}(\bar{F})}{|\bar{M}_O(\bar{F})|};\\ &\cos(\bar{M}_O,\wedge\ z)=\frac{M_{Oz}(\bar{F})}{|\bar{M}_O(\bar{F})|}.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

В формулах (6) числовую величину $|\bar{M}_O(\bar{F})|$ берем со знаком плюс.

§ 3. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Моментом силы относительно оси называют алгебраический момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью (рис. 22). Момент силы относительно оси считается положительным, если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси (проекция силы на плоскость является вектором), стремится вращать тело вокруг положительного направления оси против часовой стрелки, и отрицательным, если она стремится вращать тело по часовой стрелке. Момент силы, например, относительно оси Oz обозначим $M_z(\bar{F})$. По определению,

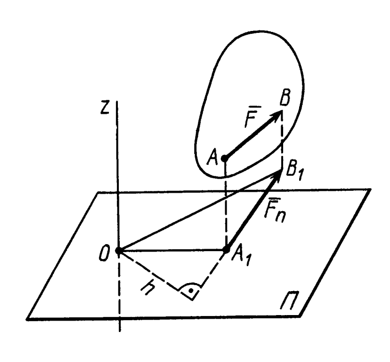


Рис. 22

$$M_z(\bar{F}) = M_O(\bar{F}_\Pi) = \pm h F_\Pi, \qquad (7)$$

где $\bar{F}_\Pi$ — вектор проекции силы $\bar{F}$ на плоскость Π, перпендикулярную оси Oz, а точка O — точка пересечения оси Oz с плоскостью Π.

Из определения момента силы относительно оси следует, что введенный выше алгебраический момент силы относительно точки можно считать моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку, перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка. Момент силы относительно оси можно выразить через площадь треугольника, построенного на проекции силы $\bar{F}_\Pi$ и точке пересечения O оси с плоскостью:

$$M_z(\bar{F}) = \pm h F_\Pi = \pm 2 \text{ пл.} \Delta OA_1B_1. \qquad (8)$$

Из формулы (8) можно получить следующие важные свойства момента силы относительно оси:

1. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси. В этом случае равна нулю проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси.

2. Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает эту ось. В этом случае линия действия проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, проходит через точку пересечения оси с плоскостью и, следовательно, равно нулю плечо силы $\bar{F}_\Pi$ относительно точки O.

В обоих этих случаях ось и сила лежат в одной плоскости. Объединяя их, можно сказать, что *момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.*

§ 4. СВЯЗЬ МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ С ВЕКТОРНЫМ МОМЕНТОМ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ НА ОСИ

Используя формулу (8), имеем (рис. 23)

$$|M_z(\bar{F})| = 2 \text{ пл.} \Delta OA_1B_1. \qquad (8')$$

Векторный момент силы $\bar{F}$ относительно точки O, взятой на пересечении оси Oz с перпендикулярной плоскостью Π, выражается в виде

$$|\bar{M}_O(\bar{F})| = 2 \text{ пл.} \Delta OAB. \qquad (9)$$

Векторный момент $\bar{M}_O(\bar{F})$ направлен перпендикулярно плоскости треугольника OAB. Аналогично, для другой точки O_1 оси Oz

$$|\bar{M}_{O_1}(\bar{F})| = 2 \text{ пл.} \Delta O_1AB, \qquad (10)$$

причем векторный момент $\bar{M}_{O_1}(\bar{F})$ направлен перпендикулярно плоскости треугольника O_1AB. Треугольник OA_1B_1 является

проекцией треугольников OAB и O_1AB на плоскость Π. Из геометрии известно, что площадь проекции плоской фигуры равна площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостями, в которых расположены эти фигуры. Угол между плоскостями измеряется углом между перпендикулярами к этим плоскостям. Перпендикуляром к плоскости треугольника OA_1B_1 является ось Oz, а перпендикулярами к плоскостям треугольников OAB и O_1AB — соответственно векторные моменты $\bar{M}_O(\bar{F})$ и $\bar{M}_{O_1}(\bar{F})$. Таким образом, пл. $\Delta OA_1B_1 =$ пл. $\Delta OAB \cos\alpha$, где α — угол между вектором $\bar{M}_O(\bar{F})$ и осью Oz. Отсюда по формулам (8′) и (9) имеем

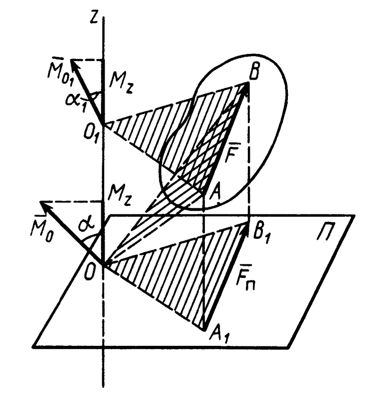


Рис. 23

$$M_z(\bar{F}) = |\bar{M}_O(\bar{F})| \cos\alpha = M_{Oz}(\bar{F}), \qquad (11)$$

причем знак $M_z(\bar{F})$ полностью определяется знаком $\cos\alpha$.

Аналогично,

$$\text{пл.}\,\Delta OA_1B_1 = \text{пл.}\,\Delta O_1AB \cos\alpha_1,$$

т. е.

$$M_z(\bar{F}) = |\bar{M}_{O_1}(\bar{F})| \cos\alpha_1 = M_{O_1z}(\bar{F}), \qquad (12)$$

где O_1 — любая точка на оси Oz.

Формулы (11) и (12) отражают искомую связь между моментом силы относительно оси и векторными моментами силы относительно точек, лежащих на этой оси: *момент силы относительно оси равен проекции на эту ось векторного момента силы относительно любой точки на оси.*

Эту зависимость между моментом силы относительно оси и векторным моментом силы относительно точки на оси можно принять за определение момента силы относительно оси.

§ 5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МОМЕНТОВ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ КООРДИНАТ

Используя связь момента силы относительно оси с векторным моментом силы относительно точки на оси, можно получить формулы для вычисления моментов относительно осей координат, если даны проекции силы на оси координат и координаты точки приложения силы.

Для оси Ox имеем

$$M_x(\bar{F}) = M_{Ox}(\bar{F}).$$

Согласно (5),

$$M_{Ox} = yF_z - zF_y;$$

следовательно,

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y.$$

Аналогично, для осей Oy и Oz

$$M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x.$$

Окончательно

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; \quad M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (13)$$

По формулам (13) можно вычислить моменты силы относительно прямоугольных осей координат.

По этим формулам получаются необходимые знаки для $M_x(\bar{F})$, $M_y(\bar{F})$, $M_z(\bar{F})$, если проекции силы F_x, F_y, F_z на оси координат и координаты x, y, z точки приложения силы подставлять в них со знаками этих величин.

При решении задач момент силы относительно какой-либо оси часто получают, используя его определение, т. е. проецируя силу на плоскость, перпендикулярную оси, и вычисляя затем алгебраический момент этой проекции относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

§ 1. ПАРА СИЛ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ

Пару сил в механике рассматривают как одно из основных понятий наряду с понятием силы.

Парой сил называют систему двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рис. 24).

Пара сил не составляет системы сил, эквивалентной нулю.

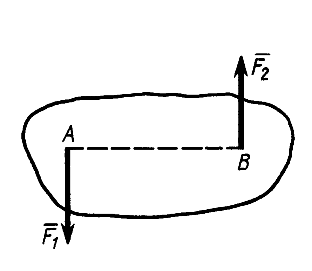


Рис. 24

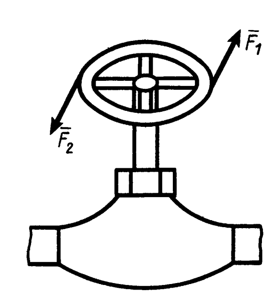


Рис. 25

Известно, что под действием пары сил свободное твердое тело выходит из равновесия. Обычно пару сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ прилагают к телу, которое должно вращаться, например к маховику вентиля при его закрывании и открывании (рис. 25). Поэтому пару сил нельзя заменить одной силой и, следовательно, она не имеет равнодействующей, а является такой системой сил, упростить которую нельзя. Каждая из сил, входящих в состав пары сил, имеет свойства обычных сил.

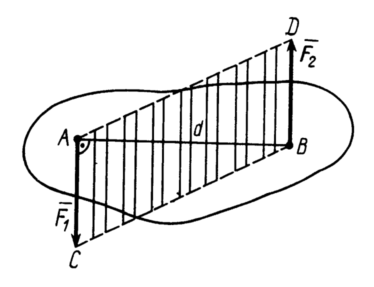


Рис. 26

Пара сил, действующая на твердое тело, характеризуется прежде всего плоскостью действия, аналогично тому, как сила характеризуется линией действия. *Плоскостью действия пары сил* называют плоскость, в которой расположены силы пары.

Для количественной характеристики действия пары сил на твердое тело и указания направления, в котором пара сил стремится вращать тело в плоскости действия, введем понятие алгебраического момента пары сил.

Алгебраическим моментом пары сил называют взятое со знаком плюс или минус произведение одной из сил пары на плечо пары сил.

Плечом пары сил d называют кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары (рис. 26).

Алгебраический момент пары обозначим M или $M(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$. Согласно определению,

$$M = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \pm Fd. \qquad (1)$$

Алгебраический момент пары сил выражается в тех же единицах, что и алгебраический момент силы относительно точки.

Алгебраический момент пары сил имеет знак плюс, если пара сил стремится вращать тело против часовой стрелки, и знак минус, если пара сил стремится вращать тело по часовой стрелке.

Алгебраический момент пары сил не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия и может быть равен нулю, если линии действия сил пары совпадают, т. е. в случае двух равных по модулю, но противоположных по направлению сил, действующих вдоль одной прямой. Такая система двух сил, как известно, эквивалентна нулю. Алгебраический момент пары сил численно равен площади параллелограмма, построенной на силах пары:

$$M = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \pm \text{пл.} \ \square \ ABCD = \pm 2 \ \text{пл.} \ \triangle \ ABC = \\ = \pm 2 \ \text{пл.} \ \triangle \ ABD.$$

§ 2. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ПАР СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Докажем, что пары сил, расположенные в одной плоскости, по своему действию на тело отличаются одна от другой только алгебраическими моментами.

Две пары сил называют эквивалентными, если их действие на твердое тело одинаково при прочих равных условиях.

Докажем теперь следующую теорему об эквивалентности двух пар сил: *пару сил, действующую на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющей одинаковый с первой парой алгебраический момент.* Иначе: две пары сил, расположенные в одной плоскости, эквивалентны, если они имеют одинаковые алгебраические моменты.

Пусть на твердое тело действует пара сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ с алгебраическим моментом M (рис. 27). Перенесем силу $\bar{F}_1$ в точку O_1, а силу $\bar{F}_2$ — в точку O_2, проведем через точки O_1 и O_2 две любые параллельные прямые, пересекающие линии действия сил пары и лежащие, следовательно, в плоскости действия заданной пары сил. Соединив прямой точки O_1 и O_2, разложим силы $\bar{F}_1$ в точке O_1 и $\bar{F}_2$ в точке O_2 по правилу параллелограмма, как указано на рис. 27. Тогда

$$\bar{F}_1 = \bar{F}'_1 + \bar{F}''_1; \quad \bar{F}_2 = \bar{F}'_2 + \bar{F}''_2.$$

Так как силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ образуют пару сил, то

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

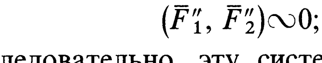
и, следовательно,

$$\bar{F}'_1 = -\bar{F}'_2; \quad \bar{F}''_1 = -\bar{F}''_2.$$

Итак,

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \backsim (\bar{F}'_1, \bar{F}''_1, \bar{F}'_2, \bar{F}''_2) \backsim (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2),$$

так как



$$(\bar{F}''_1, \bar{F}''_2) \backsim 0;$$

следовательно, эту систему двух сил можно отбросить.

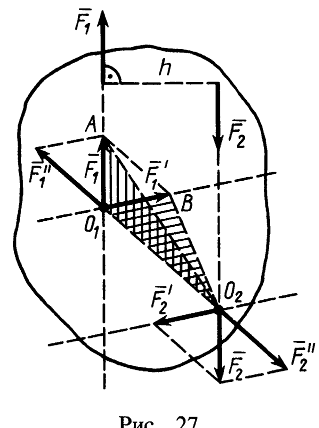


Рис. 27

Таким образом, заданную пару сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ заменим другой парой сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2)$. Докажем, что алгебраические моменты у этих пар сил одинаковы. Направление вращения у них одно и то же. Имеем

$$M = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = 2 \text{ пл. } \triangle\, O_1O_2A;$$

$$M' = M(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2) = 2 \text{ пл. } \triangle\, O_1O_2B.$$

Но пл. $\triangle\, O_1O_2A =$ пл. $\triangle\, O_1O_2B$, так как эти треугольники имеют об-

щее основание O_1O_2 и равные высоты (их вершины расположены на общей прямой, параллельной основанию).

Таким образом, теорема доказана и можно сделать следующие выводы:

а) *пару сил как жесткую фигуру можно как угодно поворачивать и переносить в ее плоскости действия;*

б) *у пары сил можно изменять плечо и силы, сохраняя при этом алгебраический момент пары и плоскость действия.*

Эти операции над парами сил не изменяют их действия на твердое тело.

§ 3. ТЕОРЕМА О ПЕРЕНОСЕ ПАРЫ СИЛ В ПАРАЛЛЕЛЬНУЮ ПЛОСКОСТЬ

Действие пары сил на твердое тело не изменяется от переноса этой пары сил в параллельную плоскость (рис. 28).

Для доказательства этой теоремы к паре сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ в точках A_1 и B_1, где перпендикуляры, опущенные из точек A и B плоскости Π_1, пересекаются параллельной ей плоскостью Π_2, приложим две системы сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}''_1)$ и $(\bar{F}'_2, \bar{F}''_2)$, каждая из которых эквивалентна нулю, т. е.

$$\bar{F}'_1 = -\bar{F}''_1; \quad \bar{F}'_2 = -\bar{F}''_2.$$

Выберем силы $\bar{F}'_1$ и $\bar{F}'_2$ так, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1; \quad \bar{F}'_2 = \bar{F}_2.$$

Сложим две равные и параллельные силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}''_2$. Их равнодействующая $\bar{R}$ параллельна этим силам, равна их сумме и приложена посередине отрезка AB_1 в точке O, так как складываются равные параллельные силы. Равнодействующая $\bar{R}'$ двух равных параллельных сил $\bar{F}_2$ и $\bar{F}''_1$ тоже равна их сумме, параллельна им и приложена на середине отрезка BA_1, т. е. в точке O, где пересекаются диагонали прямоугольника

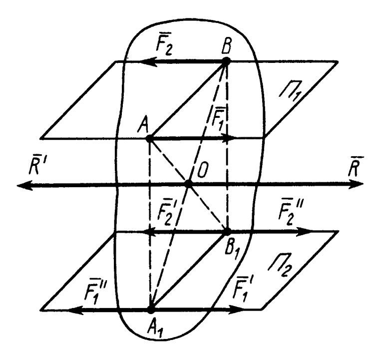


Рис. 28

ABA_1B_1. Так как $\bar{R} = -\bar{R}'$, то система сил $(\bar{R}, \bar{R}')$ эквивалентна нулю и ее можно отбросить.

Таким образом, пара сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ эквивалентна такой же паре сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2)$, но лежащей в другой, параллельной плоскости. *Пару сил, не изменяя ее действия на твердое тело, можно перенести из одной плоскости в другую, параллельную ей.*

§ 4. ВЕКТОРНЫЙ МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ

Пару сил, приложенную к твердому телу, можно охарактеризовать плоскостью действия, моментом пары сил и направлением вращения пары. Все эти элементы пары сил в пространстве можно выразить одной величиной — векторным моментом пары сил.

Векторным моментом пары сил назовем вектор, числовое значение которого равно произведению силы пары на ее плечо. Векторный момент пары сил направлен перпендикулярно плоскости действия пары сил так, чтобы с его направления можно было видеть стремление пары сил вращать тело против часовой стрелки. Векторный момент пары сил условимся временно прикладывать посередине отрезка, соединяющего точки приложения сил пары (рис. 29). Его можно прикладывать также, как будет доказано ниже, в любой точке тела, на которое действует пара сил. Векторный момент пары сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ обозначим $\bar{M}$ или $\bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$.

Согласно определению, числовое значение векторного момента пары сил $|\bar{M}|$ совпадает с модулем алгебраического момента пары сил и, следовательно,

$$|\bar{M}| = hF_1 = hF_2,$$

где h — плечо пары сил.

Векторный момент пары сил численно выражается площадью параллелограмма, построенного на силах пары:

$$|\bar{M}| = M = hF_1 = \text{пл.} \ \square \ ABCD.$$

Отметим простейшие свойства векторного момента пары сил: его числовое значение не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия, и он может быть равен нулю, если одна из сторон параллелограмма $ABCD$ превратится в точку, т. е. плечо пары или сила пары становится равной нулю.

Векторный момент пары сил можно выразить в виде векторного произведения двух векторов:

$$\bar{M} = \overrightarrow{AB} \times \bar{F}_2 = \overrightarrow{BA} \times \bar{F}_1. \qquad (2)$$

Действительно,

$$|\overrightarrow{AB} \times \bar{F}_2| = F_2 AB \sin(\overrightarrow{AB}, \wedge \bar{F}_2),$$

но

$$AB \sin(\overrightarrow{AB}, \wedge \bar{F}_2) = h$$

и, следовательно,

$$|\overrightarrow{AB} \times \bar{F}_2| = F_2 h,$$

что совпадает с модулем векторного момента пары сил.

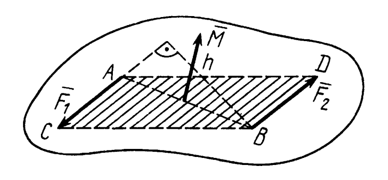


Рис. 29

Направления векторных произведений $\overrightarrow{AB} \times \bar{F}_2$ и $\overrightarrow{BA} \times \bar{F}_1$ перпендикулярны плоскости, где лежат сомножители векторных произведений, а следовательно, и плоскости действия пары сил. Они совпадают с направлением векторного момента пары сил $\bar{M}$.

§ 5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПАР СИЛ

Сформулируем условия эквивалентности двух пар сил, используя наиболее общую характеристику пары сил — ее векторный момент.

Известно, что пару сил можно как угодно поворачивать и переносить в плоскости ее действия; действие пары сил на твердое тело не изменяется, если алгебраический момент пары сил остается таким же. Следовательно, векторный момент пары сил можно переносить параллельно самому себе в любую точку твердого тела, лежащую в плоскости действия пары сил. Так как к тому же пару сил можно переносить в параллельную плоскость, то векторный момент пары сил можно переносить параллельно самому себе в любую точку тела, не изменяя действия пары сил на твердое тело. Поэтому *векторный момент пары сил, действующей на твердое тело, есть свободный вектор,* т. е. он характеризуется только модулем и направлением, а точкой приложения у него может быть любая точка тела; следовательно, векторный момент пары сил не обязательно прикладывать посередине отрезка, соединяющего точки приложения сил пары.

Итак, *две пары сил, действующие на одно и то же твердое тело, эквивалентны, если они имеют одинаковые по модулю и направлению векторные моменты.*

§ 6. ТЕОРЕМА О СУММЕ МОМЕНТОВ СИЛ ПАРЫ

Сумма векторных моментов сил, входящих в состав пары, относительно любой точки не зависит от выбора точки и равна векторному моменту этой пары сил, т. е. для пары сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}_2), \quad (3)$$

где O — любая точка (рис. 30).

Эту теорему докажем, вычисляя левую часть равенства (3):

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{F}_2,$$

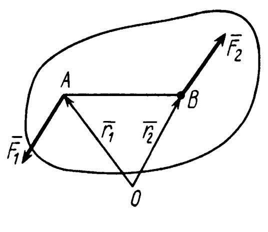


Рис. 30

так как для пары сил

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2.$$

Но

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overrightarrow{AB}$$

и не зависит от выбора точки O; следовательно,

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) = \overrightarrow{AB} \times \bar{F}_2,$$

что на основании формулы (2) совпадает с векторным моментом пары сил $\bar{M}$. Таким образом,

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{M}.$$

Взяв за точку O последовательно точки A и B, по формуле (3) имеем

$$\bar{M}_A(\bar{F}_2) = \bar{M}_B(\bar{F}_1) = \bar{M}, \tag{4}$$

т. е. *векторный момент пары сил равен векторному моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары.*

Эта теорема имеет важное значение при решении задач, когда надо вычислять сумму моментов сил пары относительно какой-либо точки. Для этого достаточно взять момент пары сил, что справедливо для любой точки.

Если моментная точка O выбирается в плоскости действия сил пары как частный случай, справедлива теорема о сумме алгебраических моментов сил пары: *сумма алгебраических моментов сил, входящих в состав пары сил, относительно точки, лежащей в плоскости действия пары сил, равна алгебраическому моменту пары сил и, следовательно, не зависит от выбора моментной точки,* т. е.

$$M_O(\bar{F}_1) + M_O(\bar{F}_2) = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2). \tag{5}$$

Выбирая A и B за моментные точки, лежащие на линиях действия сил пары, получаем

$$M_A(\bar{F}_2) = M_B(\bar{F}_1) = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2), \tag{6}$$

т. е. *алгебраический момент пары сил равен алгебраическому моменту одной из сил пары относительно точки, лежащей на линии действия другой силы этой пары.*

§ 7. СЛОЖЕНИЕ ПАР СИЛ

Рассмотрим случай, когда пары сил не лежат в одной или параллельных плоскостях, а расположены в пересекающихся плоскостях. Докажем, что *две пары сил, действующие на одно и то же тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной эквивалентной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил.*

Пусть имеются две пары сил $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$ и $(\bar{F}_2, \bar{F}'_2)$ (рис. 31), лежащие в пересекающихся плоскостях. Эти пары сил можно получить из пар сил, как угодно расположенных в пересекающихся плоскостях, путем параллельного переноса, поворота в плоскости действия и одновременного изменения плеч и сил пар. Сложим силы в точках A и B по правилу параллелограмма. После сложения получим две силы $\bar{R}$ и $\bar{R}'$:

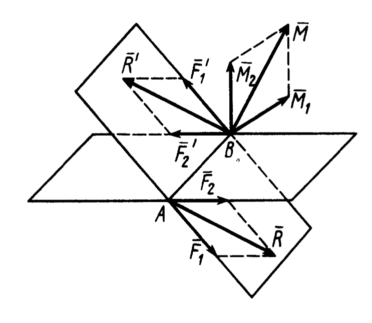


Рис. 31

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \\ \bar{R}' &= \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Силы $\bar{R}$ и $\bar{R}'$ составляют пару сил, так как они приложены в разных точках и $\bar{R} = -\bar{R}'$ как равнодействующие равных, но противоположных сил, образующих пары сил.

Итак, *при сложении двух пар сил, лежащих в пересекающихся плоскостях, получается эквивалентная пара сил.* Обозначим $\bar{M}$ векторный момент пары сил $(\bar{R}, \bar{R}')$. Тогда на основании формул (4) и (7)

$$\bar{M} = \overrightarrow{BA} \times \bar{R} = \overrightarrow{BA} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \overrightarrow{BA} \times \bar{F}_1 + \overrightarrow{BA} \times \bar{F}_2.$$

Учитывая, что

$$\overrightarrow{BA} \times \bar{F}_1 = \bar{M}_1; \qquad \overrightarrow{BA} \times \bar{F}_2 = \bar{M}_2,$$

где $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ — векторные моменты заданных пар сил $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$ и $(\bar{F}_2, \bar{F}'_2)$, имеем

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2, \tag{8}$$

т. е. *векторный момент эквивалентной пары сил равен сумме векторных моментов заданных пар.*

Таким образом, чтобы сложить две пары сил, лежащие в пересекающихся плоскостях, надо сложить их векторные моменты по правилу параллелограмма в какой-либо точке тела, например в точке B (рис. 31). Сложение пар сил, лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, есть частный случай сложения пар сил в пересекающихся плоскостях, так как в этом случае их векторные моменты параллельны и, следовательно, векторное сложение перейдет в алгебраическое.

Последовательно применяя правило параллелограмма ко всем векторным моментам пар сил, можно любое количество пар сил в общем случае заменить одной парой сил, векторный

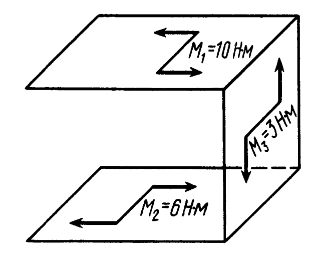


Рис. 32

момент которой $\bar{M}$ равен сумме векторных моментов заданных пар сил:

$$\bar{M}=\sum_{i=1}^{n}\bar{M}_i. \quad (9)$$

Если это сложение выполнять графически, особенно когда векторные моменты пар сил находятся в одной плоскости, то векторный момент эквивалентной пары сил изобразится замыкающей векторного многоугольника, построенного из векторных моментов заданных пар сил.

Для пар сил, расположенных в одной плоскости, теорема об их сложении формулируется так: *пары сил, действующие на твердое тело и расположенные в одной плоскости, можно привести к одной паре сил, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов составляющих пар сил*, т. е.

$$M=\sum_{i=1}^{n}M_i. \quad (9')$$

Так же складываются пары сил, расположенные в параллельных плоскостях, так как их предварительно можно перенести в одну плоскость.

Пример 1. Определить векторный момент пары сил, которая получается при сложении двух пар сил с моментами $M_1=40$ Н·м и $M_2=30$ Н·м, действующих на одно и то же твердое тело. Пары сил расположены в пересекающихся плоскостях, двугранный угол между которыми равен 60°.

Решение. Складываем по правилу параллелограмма векторные моменты заданных пар сил. Для модуля векторного момента эквивалентной пары сил $\bar{M}$ имеем

$$M=\sqrt{M_1^2+M_2^2+2M_1M_2\cos(\bar{M}_1,\hat{}\ \bar{M}_2)}=$$
$$=\sqrt{1600+900+2\cdot1200\cdot0{,}5}=\sqrt{3700}\approx61\ \text{Н·м},$$

так как угол между $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ равен двугранному углу между плоскостями действия пар сил.

Пример 2. Пары сил с моментами $M_1=10$ Н·м и $M_2=6$ Н·м противоположного направления вращения находятся в параллельных плоскостях. Пара, имеющая момент $M_3=3$ Н·м, расположена в перпендикулярной плоскости (рис. 32). Определить момент эквивалентной пары сил.

Решение. Сложим сначала алгебраически моменты пар сил, расположенных в параллельных плоскостях. Получим пару сил с моментом $M_{12}=M_1-$ $-M_2=10-6=4$ Н·м, так как моменты пар сил имеют противоположные знаки. Пару сил с моментом $\bar{M}_{12}$ сложим с парой сил, имеющей момент $\bar{M}_3$. Так как угол между $\bar{M}_{12}$ и $\bar{M}_3$ прямой, то момент эквивалентной пары

$$M=\sqrt{M_{12}^2+M_3^2}=\sqrt{16+9}=5\ \text{Н·м}.$$

§ 8. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПАР СИЛ

Если на твердое тело действуют пары сил, как угодно расположенные в пространстве, то эти пары сил можно заменить одной эквивалентной парой сил, векторный момент

которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил, т. е.

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i.$$

Векторный момент $\bar{M}$ геометрически изображается замыкающей векторного многоугольника, построенного на векторных моментах заданных пар сил.

Для равновесия пар сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы модуль векторного момента эквивалентной пары сил был равен нулю или чтобы векторный многоугольник, построенный на векторных моментах заданных пар сил, был замкнут.

Итак, $\bar{M} = 0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \\ M_y &= \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Таким образом, *для равновесия пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций векторных моментов пар сил на каждую из трех координатных осей была равна нулю.*

В общем случае пары сил можно уравновесить только парой сил и нельзя уравновесить одной силой или какой-либо другой системой сил, отличной от пары сил.

В том случае, когда пары сил действуют на твердое тело, находясь в одной плоскости, их можно заменить одной эквивалентной парой сил, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов составляющих пар сил:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Для равновесия таких пар сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраический момент эквивалентной им пары сил был равен нулю, т. е. *для равновесия пар сил, действующих на твердое тело в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма алгебраических моментов этих пар сил была равна нулю.*

Если на твердое тело действуют только пары сил, лежащие в одной плоскости, то реакции опор, уравновешивающие заданные пары сил, составляют пару сил. Например, если

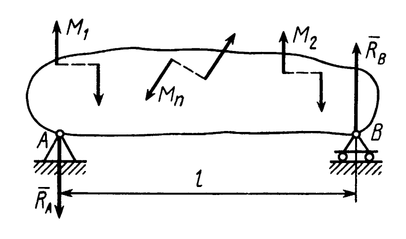


Рис. 33

одной из двух опор тела в его точке B является катковая опора (рис. 33), а другой — неподвижный шарнир в точке A, то направление реакции в шарнире A противоположно направлению реакции в точке B, так как эти реакции составляют пару сил. Реакция катковой опоры $\bar{R}_B$ перпендикулярна плоскости опоры катков и направлена вверх; следовательно, $\bar{R}_A$ направлена параллельно $\bar{R}_B$ вниз.

Величины этих реакций равны. Их можно найти приравняв момент пары сил опорных реакций сумме алгебраических моментов пар сил, действующих на тело. Таким образом,

$$\bar{R}_A = -\bar{R}_B \quad \text{и} \quad R_B l = \sum_{i=1}^{n} M_i;$$

$$R_A = R_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

ГЛАВА 4

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕЙ СИСТЕМЕ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 1. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К СИЛЕ И ПАРЕ СИЛ

Приведение силы к заданному центру

Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы. Пусть имеем силу $\bar{F}$, приложенную к твердому телу в точке A (рис. 34). Известно, что силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль ее линии действия, от чего действие силы на твердое тело не изменяется.

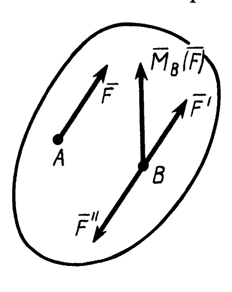


Рис. 34

Теперь докажем, что силу можно переносить на другую, параллельную линию действия. Но этот перенос следует компенсировать добавлением соответствующей пары сил. Приложим в точке тела B, выбранной за центр приведения, систему двух равных по модулю, но противоположных по направле-

нию сил $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельных заданной силе $\bar{F}$. Силы $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$ составляют систему сил, эквивалентную нулю, и ее можно добавить к любой заданной системе сил.

Пусть по модулю

$$F' = F'' = F.$$

Тогда

$$(\bar{F}) \backsim (\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}'') \backsim \{\bar{F}', (\bar{F}, \bar{F}'')\}.$$

Система двух равных по модулю и противоположных по направлению параллельных сил $(\bar{F}, \bar{F}'')$ составляет пару сил, которую называют *присоединенной парой сил.*

Итак, вместо силы $\bar{F}$, приложенной в точке A, получены сила $\bar{F}'$, равная ей по модулю и направлению, но приложенная в точке B, и присоединенная пара сил $(\bar{F}, \bar{F}'')$, векторный момент которой

$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}'') = \bar{M}_B(\bar{F}). \qquad (1)$$

Процесс замены силы $\bar{F}$ силой $\bar{F}'$ и парой сил $(\bar{F}, \bar{F}'')$ называют *приведением силы $\bar{F}$ к заданному центру B.* По теореме об эквивалентности пар сил пару $(\bar{F}, \bar{F}'')$ можно заменить любой другой парой сил с таким же векторным моментом.

Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил

Докажем основную теорему статики (теорему Пуансо): *любую произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно в общем случае привести к силе и паре сил.*

Такой процесс замены системы сил одной силой и парой сил называют *приведением системы сил к заданному центру.*

Пусть дана произвольная система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$, приложенных к твердому телу. Выберем произвольную точку O тела за центр приведения и каждую силу заданной системы сил приведем к точке O (рис. 35). Получим

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n) \backsim$$
$$\backsim \{\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_n; (\bar{F}_1, \bar{F}''_1), (\bar{F}_2, \bar{F}''_2), ..., (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)\}.$$

Таким образом, система из n сил заменена системой из $3n$ сил, т. е. в точке O приложена система сходящихся сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_n)$ и на твердое тело действует также система n присоединенных пар сил

$$\{(\bar{F}_1, \bar{F}''_1), (\bar{F}_2, \bar{F}''_2), ..., (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)\}.$$

Векторные моменты присоединенных пар сил, согласно формуле (1), можно выразить через векторные моменты заданных сил:

$$\bar{M}_i = \bar{M}(\bar{F}_i, \bar{F}''_i) = \bar{M}_O(\bar{F}_i); i = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

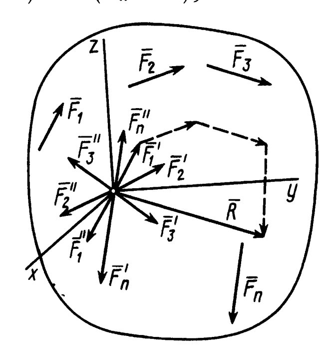


Рис. 35

Систему сходящихся сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_n)$ заменим их равнодействующей $\bar{R}$, которая равна векторной сумме сил $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_n$ и геометрически изображается замыкающим вектором силового многоугольника, построенного на этих силах (рис. 35).

Итак,

$$(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_n) \backsim (\bar{R}),$$

где

$$\bar{R} = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 + ... + \bar{F}'_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i.$$

Для системы сходящихся сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, ..., \bar{F}'_n)$ сила $\bar{R}$ является равнодействующей силой, а для заданной системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$ сила $\bar{R}$ является лишь только ее векторной суммой, или главным вектором.

Главным вектором системы сил называют вектор, равный векторной сумме этих сил. Он изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник, построенный на силах, т. е.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \tag{3}$$

Систему присоединенных пар сил $\{(\bar{F}_1, \bar{F}''_1), (\bar{F}_2, \bar{F}''_2), ..., (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)\}$ по теореме о сложении пар сил можно заменить одной парой сил $(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}')$ с векторным моментом $\bar{M}(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}') = \bar{L}_O$, который называют главным моментом. Главный момент $\bar{L}_O$ равен сумме векторных моментов присоединенных пар. Учитывая формулу (2), для $\bar{L}_O$ имеем

$$\bar{L}_O = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + ... + \bar{M}_O(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{F}_i). \tag{4}$$

Индекс O означает, что за центр приведения взята точка O.

Итак, *главным моментом системы сил относительно точки O тела называют сумму векторных моментов всех сил системы относительно этой точки.*

Главный момент системы сил является вектором, замыкающим векторный многоугольник, образованный при сложении векторных моментов сил системы относительно выбранного центра.

Таким образом, доказана основная теорема статики: *любую систему сил, действующих на твердое тело, можно привести к силе, равной главному вектору системы сил, и паре сил, векторный момент которой равен главному моменту системы сил относительно точки, выбранной за центр приведения.*

В краткой форме эту теорему можно выразить так:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n) \backsim (\bar{R}, \bar{L}_O),$$

т. е. *каждую систему сил можно привести к главному вектору и главному моменту относительно произвольного центра.* Следует учитывать, что это условная формулировка основной теоремы. Главный момент характеризует действие на тело пары сил $(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}')$ (рис. 36), лежащей в плоскости, перпендикулярной главному моменту.

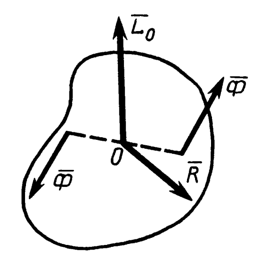


Рис. 36

Приведение плоской системы сил

Плоской системой сил, приложенных к твердому телу, называют такую систему сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Основная теорема статики справедлива для любой системы сил. Она справедлива и для плоской системы сил, действующих на твердое тело: *любую плоскую систему сил можно в общем случае привести к силе и паре сил.*

Для плоской системы сил главный вектор $\bar{R}$ лежит в плоскости действия сил, если за центр приведения выбрать точку в плоскости действия сил. Все присоединенные пары сил тоже лежат в этой плоскости, а следовательно, векторные моменты этих пар перпендикулярны ей и взаимно параллельны. Главный момент $\bar{L}_O$, характеризующий векторный момент пары сил, эквивалентный присоединенным парам, перпендикулярен главному вектору. Он является векторной суммой параллельных векторов.

В этом случае главный момент равен сумме алгебраических моментов присоединенных пар и, следовательно, сумме алгебраических моментов сил относительно центра приведения.

Для плоской системы сил вместо векторного главного момента используют понятие алгебраического главного момента. *Алгебраическим главным моментом* L_O плоской системы сил относительно центра приведения, лежащего в плоскости действия сил, называют сумму алгебраических моментов этих сил относительно центра приведения.

Формулы для вычисления главного вектора и главного момента

Для любой системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$ главный вектор $\bar{R}$ является векторной суммой этих сил:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \tag{3'}$$

а главный момент $\bar{L}_O$ — суммой векторных моментов сил относительно центра приведения:

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{F}_i). \tag{4'}$$

Главный вектор $\bar{R}$ геометрически изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на заданных силах. Проецируя обе части векторного равенства (3′) на координатные оси, для произвольной пространственной системы сил получаем

$$R_x=\sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y=\sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad R_z=\sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \tag{5}$$

По проекциям определяют модуль главного вектора и косинусы его углов с осями координат:

$$\left.\begin{aligned} &|\bar{R}|=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2};\\ &\cos(x,\wedge\bar{R})=\frac{R_x}{|\bar{R}|},\ \cos(y,\wedge\bar{R})=\frac{R_y}{|\bar{R}|};\\ &\cos(z,\wedge\bar{R})=\frac{R_z}{|\bar{R}|}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Главный момент $\bar{L}_O$ геометрически тоже изображается замыкающей векторного многоугольника, построенного на векторных моментах сил относительно центра приведения. Проецируя обе части векторного равенства (4′) на прямоугольные оси координат и используя связь момента силы относительно оси с проекцией векторного момента этой силы относительно точки на оси, имеем

$$\left.\begin{aligned} L_{Ox}=L_x=\sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{iz}-z_iF_{iy});\\ L_{Oy}=L_y=\sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{ix}-x_iF_{iz});\\ L_{Oz}=L_z=\sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy}-y_1F_{ix}). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Модуль главного момента и косинусы его углов с осями координат равны

$$\left.\begin{aligned} &|L_O|=\sqrt{L_x^2+L_y^2+L_z^2};\\ &\cos(x,\wedge\bar{L}_O)=L_x/|\bar{L}_O|,\ \cos(y,\wedge\bar{L}_O)=\\ &=L_y/|\bar{L}_O|,\ \cos(z,\wedge\bar{L}_O)=L_z/|\bar{L}_O|. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Если выбрать ось Oz перпендикулярно плоскости действия плоской системы сил, а оси Ox и Oy — в плоскости сил, то главный вектор $\bar{R}$ будет лежать в плоскости Oxy и, следовательно, для плоской системы сил

$$\left.\begin{aligned} &R_x=\sum_{i=1}^{n} F_{ix},\ R_y=\sum_{i=1}^{n} F_{iy},\ R_z\equiv 0;\\ &|\bar{R}|=\sqrt{R_x^2+R_y^2},\ \cos(x,\hat{}\,\bar{R})=R_x/|R|,\\ &\cos(y,\hat{}\,\bar{R})=R_y/|\bar{R}|. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Главный момент плоской системы сил перпендикулярен главному вектору и, следовательно, параллелен оси Oz. Тогда

$$L_x\equiv 0,\ L_y\equiv 0,\ L_O=L_z=\sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i)=\sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}_i), \quad (10)$$

где L_O — алгебраический главный момент.

§ 2. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ

Условия равновесия системы сил в векторной форме

Из теоремы о приведении системы сил к силе и паре сил можно вывести условия равновесия системы сил, действующих на твердое тело. Очевидно, что если система сил находится в равновесии, то в равновесии находится и эквивалентная ей система, состоящая из силы и пары сил. Чтобы такая система сил была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно равенства нулю как силы $\bar{R}$, так и момента пары $(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}')$, равного главному моменту $\bar{L}_O$. Получаются следующие векторные условия равновесия произвольной системы сил: *для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный момент системы сил относительно любого центра приведения также был равен нулю*. Иначе: для того чтобы $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)\backsim 0$, необходимы и достаточны условия

$$\bar{R}=0,\ \bar{L}_O=0. \quad (11)$$

Условия (11) являются векторными условиями равновесия для любой системы сил.

Условия равновесия пространственной системы сил в аналитической форме

Если при равновесии системы сил, приложенных к твердому телу, главный вектор $\bar{R}$ равен нулю, то его проекция на каждую координатную ось также равна нулю. Это справедливо и для главного момента $\bar{L}_O$. Таким образом, из векторных условий равновесия пространственной системы сил следует шесть условий:

$$\left.\begin{aligned} R_x=0,\ R_y=0,\ R_z=0; \\ L_x=0,\ L_y=0,\ L_z=0. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Учитывая формулы (5) и (7), эти шесть условий через силы системы выражают в форме

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0,\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0,\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0; \\ \sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i)=0,\ \sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i)=0,\ \sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i)=0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Таким образом, *для равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы три суммы проекций всех сил на оси декартовых координат были равны нулю и три суммы моментов всех сил относительно трех осей координат также были равны нулю.*

Из общих условий равновесия для произвольной пространственной системы сил получаются условия равновесия для частных систем сил, приложенных к твердому телу.

Условия равновесия пространственной системы параллельных сил

Направим ось Oz параллельно силам $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$ (рис. 37). Тогда проекции параллельных сил на перпендикулярные им оси Ox и Oy будут равны нулю и условия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0,$$

окажутся справедливыми для всех систем параллельных сил, т. е. превратятся в тождества. Момент относительно оси Oz каждой из параллельных сил равен нулю, и условие $\sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F})=0$ тоже выполняется для всех систем параллельных сил. Отбрасывая условия равновесия, которые выполняются тождественно при выбранном направлении оси Oz, и учитывая, что сумма проекций сил на эту ось является алгебраической суммой сил, из (13) получаем следующие три условия равновесия пространственной системы параллельных сил:

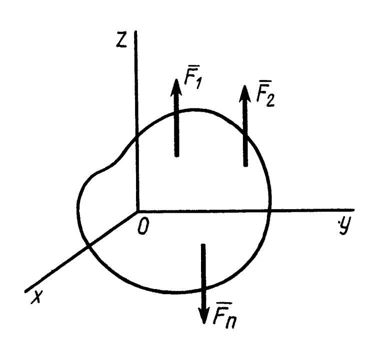


Рис. 37

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=\sum_{i=1}^{n} F_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i)=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i)=0, \quad (14)$$

т. е. *для равновесия пространственной системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма этих сил была равна нулю и суммы моментов сил относительно двух координатных осей, перпендикулярных силам, также были равны нулю.*

Условия равновесия плоской системы сил

Расположим оси Ox и Oy в плоскости действия сил (рис. 38). Так как ось Oz перпендикулярна силам, то $\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0$ выполняется для всех плоских систем сил, т. е. является тождеством. Каждая из сил расположена в одной плоскости с осями координат Ox и Oy, и поэтому ее моменты относительно этих осей равны нулю. Таким образом, условия равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i)=0$$

становятся тождествами. Моменты сил относительно оси Oz, перпендикулярной силам, равны алгебраическим моментам этих сил относительно точки O. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i)=\sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}_i).$$

Из (13) для плоской системы сил после отбрасывания тождеств имеем следующие три условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}_i)=0, \tag{15}$$

т. е. *для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных осей координат, расположенных в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил, также была равна нулю.*

Для плоской системы параллельных сил (рис. 39) одну из осей координат, например Oy, можно выбрать параллельной силам. Тогда сумма проекций параллельных сил на эту ось превратится в алгебраическую сумму сил. Проекция каждой из сил на ось Ox равна нулю; следовательно, сумма проекций сил на ось Ox равна нулю, даже если система сил не

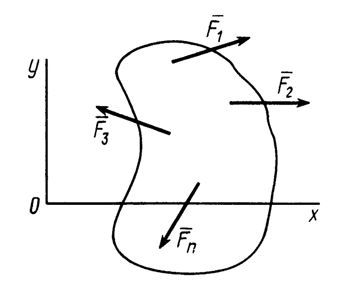


Рис. 38

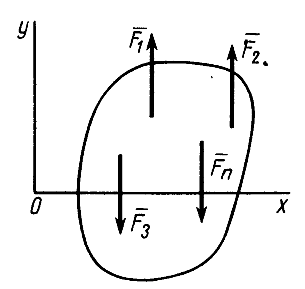


Рис. 39

находится в равновесии. Это условие выполняется тождественно, и его следует отбросить.

Итак, для плоской системы параллельных сил из (15) имеем следующие условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}_i) = 0, \qquad (16)$$

т. е. *для равновесия плоской системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма сил была равна нулю и сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки, находящейся в плоскости сил, также была равна нулю.*

Из условий равновесия плоской системы сил (15) можно получить и условия равновесия плоской системы сходящихся сил, для чего за моментную точку надо взять точку пересечения линий действия сходящихся сил. Тогда последнее из условий станет тождеством и в качестве условий равновесия для плоской системы сходящихся сил останутся только два первых условия из (15).

ГЛАВА 5

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ. ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

§ 1. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Плоскую систему сил можно привести к более простой системе сил, состоящей из силы или пары сил. Эти случаи возможны, если система сил не находится в равновесии, т. е. если одновременно не равны нулю главные вектор и момент системы сил. Рассмотрим эти частные случаи.

Случай приведения к равнодействующей силе

1. *Если при приведении плоской системы сил к какому-либо центру окажется, что главный вектор* $\bar{R} \neq 0$, *а главный момент* $L_O = 0$, *то такая плоская система сил приводится к одной силе* $\bar{R}^*$ — *равнодействующей системы сил.* Равнодействующая сила $\bar{R}^*$ в этом случае проходит через центр приведения, а по величине и направлению совпадает с главным вектором $\bar{R}$.

2. *Если при приведении плоской системы сил главный вектор* $R \neq 0$ *и главный момент* $L_O \neq 0$, *то такую систему можно упростить и привести к одной равнодействующей силе* $\bar{R}^*$.

Эта сила по величине и направлению совпадает с главным вектором $\bar{R}$, но ее линия действия отстоит от первоначального центра приведения на расстоянии d (рис. 40), которое определяют из соотношения

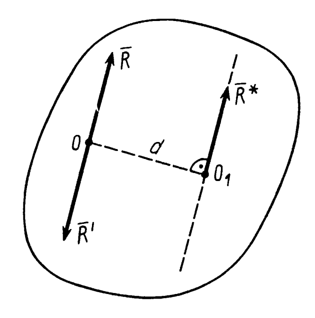


Рис. 40

$$d = L_O / R.$$

Действительно, пусть при приведении к точке O получаются главный вектор и пара сил, алгебраический момент которой равен главному моменту L_O. По теореме об эквивалентности пар сил, расположенных в одной плоскости, пару сил можно поворачивать, передвигать в плоскости ее действия и изменять плечо и силы пары, сохраняя ее алгебраический момент. Выберем силы $\bar{R}'$, $\bar{R}^*$, входящие в пару сил, равными по величине главному вектору. Тогда плечо пары сил d определим по формуле

$$d = L_O / R; \quad R' = R^* = R. \tag{1}$$

Повернем пару сил, чтобы ее силы были параллельны главному вектору $\bar{R}$, а точку приложения силы пары, противоположной по направлению главному вектору, совместим с центром приведения O. Тогда

$$(\bar{R}, \ \bar{R}', \ \bar{R}^*) \backsim (\bar{R}^*).$$

Так как $(\bar{R}, \bar{R}^*) \backsim 0$, то такую систему сил можно отбросить.

Итак, *систему сил*, приведенную к силе с парой сил, *в том случае, когда* $\bar{R} \neq 0$ *и* $L_O \neq 0$, *можно упростить и привести к одной силе* $\bar{R}^*$ — *равнодействующей заданной системы сил, отстоящей от центра приведения на расстоянии*

$$OO_1 = d = L_O / R.$$

Равнодействующую силу $\bar{R}^*$, приложенную к твердому телу, можно перенести в любую точку линии ее действия. Случай, когда $L_O = 0$, возможен, если за центр приведения O взять точку, лежащую на линии действия равнодействующей силы $\bar{R}^*$.

Случай приведения к паре сил

Если при приведении плоской системы сил к какому-либо центру окажется, что главный вектор $R = 0$, *а главный момент* $L_O \neq 0$, *то такую плоскую систему сил можно привести к одной паре сил, алгебраический момент которой равен главному моменту системы сил относительно центра приведения, и в этом случае главный момент не зависит от выбора центра приведения.*

Если главный вектор равен нулю при приведении к одному какому-либо центру, то он равен нулю и при приведении к любому другому центру, так как главный вектор, являясь векторной суммой сил системы, не зависит от выбора центра приведения. Главный момент не зависит от центра приведения только в том случае, когда $R=0$. В других случаях главный момент системы зависит от выбора центра приведения. Если бы при $R=0$ главный момент зависел от центра приведения, то одна и та же плоская система сил была бы эквивалентна парам сил, имеющим разные алгебраические моменты, что невозможно, так как эквивалентные пары сил, лежащие в одной плоскости, имеют одинаковые алгебраические моменты.

Таким образом, рассмотрены случаи, которые возможны при приведении плоской системы сил к какому-либо центру. Если $R=0$ и $L_O=0$, то система сил находится в равновесии; если $R\neq 0$, а $L_O=0$, или $R\neq 0$, $L_O\neq 0$, то система сил приводится к одной равнодействующей силе; если $R=0$, $L_O\neq 0$, то система приводится к одной паре сил.

§ 2. ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЫ (ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА)

Для случая, когда любая система сил, приложенных к твердому телу, плоская или пространственная, приводится к равнодействующей силе, часто применяют так называемую теорему Вариньона: *векторный момент равнодействующей рассматриваемой системы сил относительно любой точки равен сумме векторных моментов всех сил этой системы относительно той же точки.*

Пусть на твердое тело действует любая система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$ (рис. 41), имеющая равнодействующую $\bar{R}^*$, т. е.

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n) \backsim (\bar{R}^*). \qquad (2)$$

Добавим к заданной системе сил ее уравновешивающую силу $\bar{R}^{*\prime}$, которая равна по модулю, но противоположна по направлению равнодействующей силе $\bar{R}^*$ и имеет с ней общую линию действия. Тогда

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n, \bar{R}^{*\prime}) \backsim (\bar{R}^*, \bar{R}^{*\prime}) \backsim 0, \qquad (3)$$

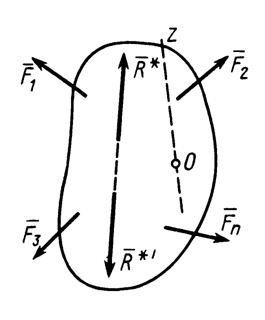


Рис. 41

т. е. при добавлении к системе сил уравновешивающей силы, согласно определению уравновешивающей силы, образуется новая система сил, эквивалентная нулю и, следовательно, удовлетворяющая условиям равновесия системы сил, приложенных к твердому телу. В частности, сумма векторных моментов сил этой новой системы сил относительно любой точки O равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{F}_i) + \bar{M}_O(\bar{R}^{*\prime}) = 0, \qquad (4)$$

но

$$\bar{M}_O(\bar{R}^{*\prime}) = -\bar{M}_O(\bar{R}^{*}), \qquad (5)$$

так как $\bar{R}^{*\prime}$ и $\bar{R}^{*}$ — две равные и противоположно направленные силы, действующие вдоль одной прямой. Подставляя (5) в (4), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{F}_i) - \bar{M}_O(\bar{R}^{*}) = 0,$$

откуда следует теорема Вариньона

$$\bar{M}_O(\bar{R}^{*}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{F}_i). \qquad (6)$$

Если правую и левую части векторного равенства (6) спроецировать на произвольную ось Oz, проходящую через точку O, то, учитывая связь момента силы относительно оси с проекцией векторного момента относительно точки на оси, получим теорему Вариньона относительно оси Oz:

$$M_z(\bar{R}^{*}) = \sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i), \qquad (7)$$

т. е. *момент равнодействующей силы относительно произвольной оси равен сумме моментов сил системы относительно той же оси.*

Для случая плоской системы сил, если точку O выбрать в плоскости действия сил, из (6) получаем

$$M_O(\bar{R}^{*}) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}_i). \qquad (8)$$

Это теорема Вариньона для плоской системы сил: *алгебраический момент равнодействующей плоской системы сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, равен сумме алгебраических моментов всех сил этой системы относительно той же точки.*

§ 3. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

В § 2 гл. 4 получены общие условия равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}_i) = 0. \qquad (9)$$

Условия равновесия (9) назовем *условиями равновесия плоской системы сил в первой форме.*

Условия равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, можно сформулировать в других эквивалентных формах. Существуют еще две эквивалентные формы необходимых и достаточных условий равновесия.

Рассмотрим эти условия равновесия в виде теоремы о трех моментах и третьей формы условий равновесия.

Теорема о трех моментах (вторая форма условий равновесия)

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i)=0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i)=0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_C(\bar{F}_i)=0. \qquad (10)$$

Необходимость этих условий равновесия плоской системы сил обусловлена тем, что если плоская система сил находится в равновесии, то силы этой системы удовлетворяют условиям равновесия в первой основной форме (9). А тогда из последнего условия (9) следует, что сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки (следовательно, и точек A, B, C) равна нулю (рис. 42).

Для доказательства достаточности условий (10) для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, можно привести следующие рассуждения. Так как главные моменты относительно трех точек A, B и C равны нулю, то для любой из этих точек, взятых за центр приведения, система приводится или к равнодействующей, если главный вектор системы отличен от нуля, или система сил оказывается в равновесии, если главный вектор системы равен нулю. Предположим, что она приводится к равнодействующей силе $\bar{R}^*$. Тогда если выбрать за центр приведения точку A, то, используя теорему Вариньона (8), согласно (10), получим

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i)=M_A(\bar{R}^*)=0.$$

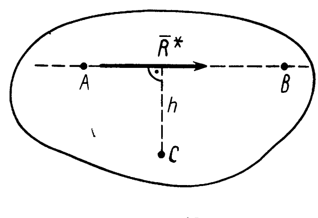


Рис. 42

Выбрав за центр приведения точку B, аналогично имеем

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i)=M_B(\bar{R}^*)=0.$$

Эти условия для равнодействующей силы $\bar{R}^*$, отличной от нуля, могут выполняться в том случае, если

линия действия равнодействующей силы $\bar{R}^*$ проходит через точки A и B.

Из последнего условия (10) после применения теоремы Вариньона получаем

$$\sum_{i=1}^{n} M_C(\bar{F}_i) = M_C(\bar{R}^*) = \pm hR^* = 0.$$

Но $h \neq 0$, так как точка C не находится на прямой, проходящей через точки A и B. Следовательно, равнодействующая сила равна нулю, что и является достаточным условием равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу.

Третья форма условий равновесия

Условия равновесия плоской системы сил можно сформулировать и так: *для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов сил относительно двух любых точек, лежащих в плоскости действия сил, были равны нулю и алгебраическая сумма проекций этих сил на какую-либо ось плоскости, не перпендикулярную прямой, проходящей через две моментные точки, также была равна нулю,* т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \tag{11}$$

где за ось Ox принята любая прямая, не перпендикулярная AB. Необходимость условий (11) для равновесия плоской системы сил следует из первой формы условий равновесия (9). Первая часть теоремы о достаточности условий (11) для равновесия (линия действия равнодействующей силы $\bar{R}^*$ проходит через точки A и B) доказывается так же, как и в теореме о трех моментах.

Из последнего условия (11) (рис. 43) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = R_x^* = R^* \cos(x, \widehat{\bar{R}^*}) = 0.$$

Но

$$\cos(x, \widehat{\bar{R}^*}) \neq 0,$$

так как ось Ox не перпендикулярна прямой, проходящей через точки A и B. Следовательно, равнодействующая сила $\bar{R}^*$ равна нулю, что и доказывает достаточность условий (11) для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу.

В частном случае плоской системы параллельных сил можно сформулировать другую форму условий равновесия этой системы сил: *для равновесия плоской системы параллельных*

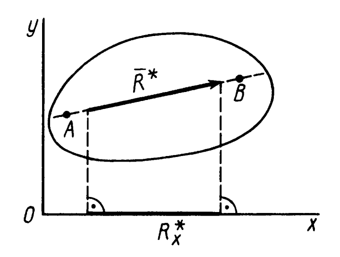


Рис. 43

сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов сил относительно двух любых точек, лежащих в плоскости сил, были равны нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i)=0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i)=0. \qquad (12)$$

Точки A и B нельзя брать на прямой линии, параллельной силам.

При применении условий равновесия (12) удобно за моментные точки A и B брать точки, через которые проходят искомые силы, например реакции связей. В этом случае получаются такие уравнения для определения искомых сил, в каждое из которых входит только по одной неизвестной силе; эти уравнения, как правило, решаются проще, чем уравнения, в каждое из которых входят обе неизвестные силы.

§ 4. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется только три независимых условия равновесия, каждое из которых не является следствием двух других. Независимые условия равновесия можно брать в трех различных формах.

Следовательно, для любой плоской системы сил из условий равновесия можно найти не более трех неизвестных, а для плоских систем параллельных и сходящихся сил — не более двух неизвестных. Если в какой-либо задаче число неизвестных окажется больше числа независимых условий равновесия, то такую задачу нельзя решить методами статики без рассмотрения прежде всего деформаций тела, т. е. без отказа от основной гипотезы статики об абсолютно твердом теле.

Задачи, в которых число неизвестных не больше числа независимых условий равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называют *статически определимыми.* Для любой плоской системы сил, приложенных к твердому телу, в статически определимой задаче число неизвестных должно быть не больше трех, а для плоских систем параллельных и сходящихся сил — не больше двух.

Пример простейшей *статически неопределимой* задачи приведен на рис. 44, где представлена балка заданной длины, закрепленная на концах с помощью двух неподвижных цилиндрических шарниров A и B. На балку действуют активные силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$. Известны также и точки приложения этих сил. Так как для цилиндрического шарнира имеются две неизвестные, например составляющие силы реакции по осям координат, то число неизвестных будет четыре, а независимых условий равновесия можно составить только три.

Чтобы сделать задачу статически определимой, надо балку на одном конце закрепить, например с помощью так называемой катковой опоры. Тогда одна неизвестная будет равна нулю; если катковая опора находится в точке B и плоскость опоры катков параллельна оси Ox, то сила X_B равна нулю.

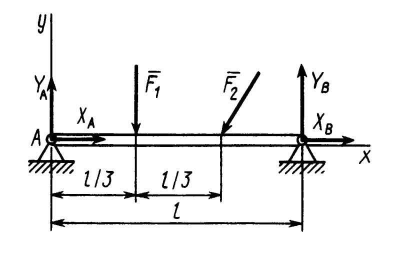


Рис. 44

§ 5. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Рассмотрим равновесие сил, приложенных к системе нескольких взаимодействующих между собой тел. Тела могут быть соединены между собой с помощью шарниров, соприкасаться друг с другом и взаимодействовать одно с другим, вызывая силы взаимодействия. Такую систему взаимодействующих тел иногда называют сочлененной системой тел.

Силы, действующие на рассматриваемую систему тел, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называют силы, с которыми на тела рассматриваемой системы действуют тела, не входящие в эту систему.

Внутренними называют силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

Если, например, рассматриваемой системой тел является железнодорожный поезд, то внешними силами являются силы веса вагонов и тепловоза, действие рельсов на колеса вагонов и тепловоза, силы сопротивления воздуха. Внутренними силами являются натяжения в стяжках, сила давления газа и т. п.

Силы веса для любой системы тел, в которую не входит Земля, всегда являются внешними.

При рассмотрении равновесия сил, приложенных к системе тел, можно мысленно расчленить систему тел на отдельные твердые тела и к силам, действующим на эти тела, применить условия равновесия, полученные для одного тела. В эти условия равновесия войдут как внешние, так и внутренние силы системы тел. Внутренние силы на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия в каждой точке сочленения двух тел образуют равновесную систему сил (силы $\bar{R}'_A$ и $\bar{R}''_A$, рис. 45). Поэтому

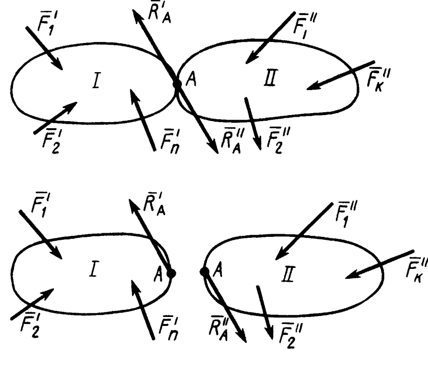


Рис. 45

внешние силы, действующие на систему тел отдельно, без внутренних сил, удовлетворяют условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, за которое следует принять эту систему тел.

Покажем это на примере системы двух тел и плоской системы сил (рис. 45). Если составить условия равновесия для каждого твердого тела системы тел, то для тела *I*

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}'_i + \bar{R}'_A = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}'_i) + M_O(\bar{R}'_A) = 0; \tag{13}$$

для тела *II*

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{F}''_i + \bar{R}''_A = 0; \quad \sum_{i=1}^{k} M_O(\bar{F}''_i) + M_O(\bar{R}''_A) = 0. \tag{14}$$

Кроме того, из аксиомы о равенстве сил действия и противодействия для двух взаимодействующих тел имеем

$$\bar{R}'_A = -\bar{R}''_A \tag{15}$$

и

$$M_O(\bar{R}'_A) = -M_O(\bar{R}''_A). \tag{16}$$

Если сложить (13) и (14), учитывая (15 и (16), то

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}'_i + \sum_{i=1}^{k} \bar{F}''_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}'_i) + \sum_{i=1}^{k} M_O(\bar{F}''_i) = 0.$$

Представленные равенства и есть условия равновесия внешних сил, действующих на систему двух тел.

Для системы N тел в том случае, когда на каждое тело действует любая плоская система сил, можно составить $3N$ условий равновесия и, следовательно, определить $3N$ неизвестных. Если число неизвестных больше $3N$, то задача является статически неопределимой. В случае статически определимой задачи $3N$ условий равновесия можно получить, если составлять их для каждого тела отдельно, учитывая и силы взаимодействия тел, или составлять условия равновесия для любых комбинаций групп тел, в том числе и для всей рассматриваемой системы тел. При этом внутренние силы для отдельных групп тел учитывать не надо.

§ 6. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИЛЫ

В статике рассматривают силы, приложенные к твердому телу в какой-либо его точке, и поэтому такие силы называют *сосредоточенными.* В действительности обычно силы бывают приложены к какой-либо части объема тела или его поверхности, а иногда к некоторой части линии. Так как все аксиомы и теоремы статики формулируются для сосредоточенных сил, приложенных к твердому телу, то необходимо

рассмотреть способы перехода от **распределенных сил** к **сосредоточенным** в простейших, наиболее часто возникающих случаях.

Распределенные силы прежде всего характеризуются **интенсивностью** распределенной силы, т. е. силой, приходящейся на единицу объема, поверхности или длины линии. В основном встречаются параллельные и сходящиеся распределенные силы. К параллельным силам, распределенным по объему тела, относится вес частиц этого тела. Сила давления воды на плотину относится к распределенным параллельным силам по поверхности плотины. Сила тяжести частиц тонкой проволоки характеризует распределенные силы по длине линии.

Рассмотрим замену сосредоточенными силами только распределенных сил по длине линии, т. е. линейных распределенных сил. Для простоты возьмем случаи, когда отрезок линии, по которому распределены силы, является отрезком прямой, а интенсивность этих сил или постоянна (силы распределены по прямоугольнику), или распределена по линейному закону, в простейшем случае — по треугольнику. Комбинируя эти два случая, можно получить линейное распределение интенсивности распределенной силы в более общем случае.

Параллельные силы постоянной интенсивности, распределенные по отрезку прямой линии

Пусть на участке AB прямой линии длиной l распределены параллельные силы, интенсивность которых q постоянна (рис. 46, *а*). Заменим эти распределенные силы сосредоточенными. Для этого отрезок AB разобьем на отрезки достаточно малых размеров по сравнению с его длиной. На каждый такой малый отрезок действует сила $\bar{q}\Delta l_i$, которую при достаточной малости длины отрезка Δl_i можно считать сосредоточенной силой. Заменяя полученную таким образом систему сосредоточенных параллельных сил $\bar{q}\Delta l_i$ одной равнодействующей силой, получим

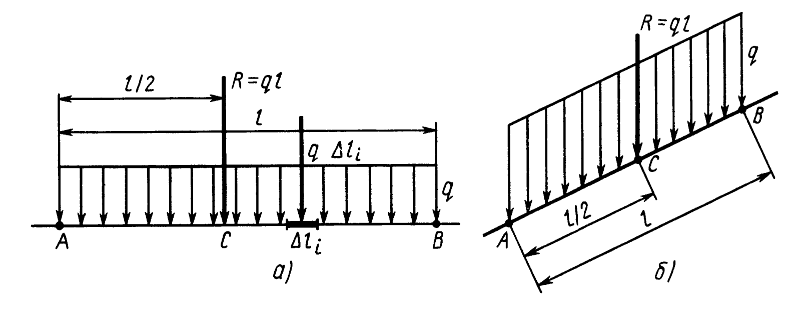


Рис. 46

$$\bar{R}=\sum_{i=1}^{n}\bar{q}\Delta l_i=\bar{q}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=\bar{q}l.$$

Равнодействующая $\bar{R}$ параллельна распределенным силам и приложена вследствие симметрии распределения сил в середине отрезка AB.

Если параллельные силы постоянной интенсивности q распределены по отрезку прямой, наклоненному к распределенным силам, то модуль равнодействующей R таких сил равен ql. Линия действия ее, параллельная распределенным силам, проходит через середину отрезка (рис. 46, *б*). Модуль равнодействующей в этом случае не равен площади параллелограмма, образованного прямой AB и распределенными силами.

Параллельные силы, распределенные по отрезку прямой с интенсивностью, изменяющейся по линейному закону

Рассмотрим распределенные параллельные силы, изменяющиеся по линейному закону (рис. 47, *а*). Обычно считают, что такие силы распределены по треугольнику. Параллельные распределенные по треугольнику силы приводятся к равнодействующей $\bar{R}$, по модулю равной

$$R=\frac{q_{\max}l}{2},$$

где $q_{\max}$ — наибольшая интенсивность силы. Это легко можно проверить путем сложения параллельных сосредоточенных сил $\bar{q}\Delta x$, приложенных к каждому элементарному отрезку длиной Δx. Наиболее просто это можно сделать путем интегрирования. Действительно,

$$R=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}q\Delta x=\int_0^l q\,\mathrm{d}x.$$

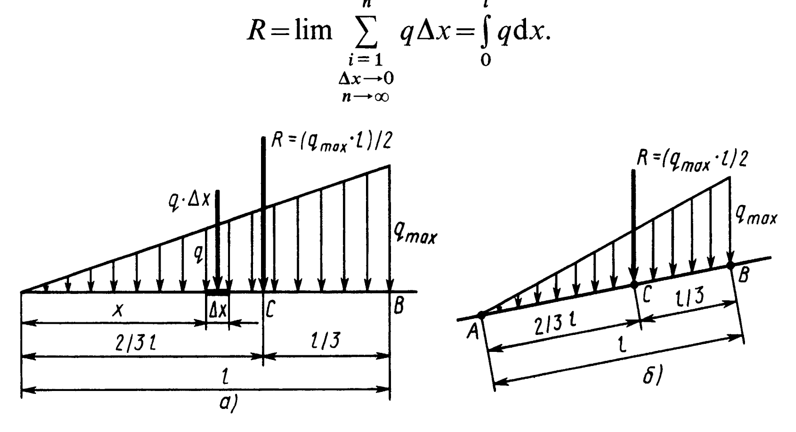


Рис. 47

Если x отсчитывать от точки A, то из подобия треугольников имеем

$$q/x = q_{max}/l.$$

После этого, вставляя под интеграл вместо q его значение, получаем

$$R = \int_0^l \frac{q_{max}}{l} x \, dx = \frac{q_{max}}{l} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{q_{max} l}{2}.$$

Точка приложения C равнодействующей силы смещается в сторону, где интенсивность силы больше, и совпадает с центром тяжести площади треугольника, который находится в точке пересечения медиан, расположенной на расстоянии $^1/_3$ от основания треугольника и $^2/_3$ от его вершины A, т. е. $AC = {^2/_3}\, l$. Точку приложения равнодействующей силы можно также определить вычислив момент элементарных сосредоточенных сил $\bar{q}\Delta x$, например относительно точки A, и применив затем теорему Вариньона о моменте равнодействующей силы.

Имеем

$$R \cdot AC = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} xq\Delta x = \int_0^l qx \, dx.$$

Заменяя q его значением $q = \frac{q_{max}}{l} x$, получаем

$$R \cdot AC = \frac{q_{max}}{l} \int_0^l x^2 \, dx = \frac{q_{max}}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{q_{max} l^2}{3}.$$

Учитывая, что $R = \frac{q_{max} l}{2}$, найдем

$$AC = \frac{q_{max} l^2}{3R} = \frac{2}{3} l.$$

Если параллельные силы с интенсивностью, изменяющейся по линейному закону, распределены по отрезку прямой, наклоненному к направлению сил (рис. 47, *б*), то их равнодействующая $R = \frac{q_{max} l}{2}$ и делит отрезок AB так же, как и в том случае, когда распределенные силы перпендикулярны отрезку AB. Величина равнодействующей в этом случае не равна площади треугольника, образованного отрезком прямой AB и распределенными силами.

В более сложных случаях распределенных сил равнодействующую силу и ее точку приложения обычно определяют путем интегрирования и применения теоремы Вариньона. Величину равнодействующей в случае непараллельных распределенных сил находят так же, как и для параллельных, только суммируют (и, следовательно, интегрируют) не элементарные сосредоточенные силы $\bar{q}_i \Delta l_i$, а их проекции на оси координат. По проекциям уже вычисляют равнодействующую силу и косинусы ее углов с осями координат.

Реакция заделки

Пусть имеем тело, например балку AB, один конец которой AA' заделан в стену (рис. 48, *а*). Такое крепление конца балки AA' называют заделкой в точке A. Пусть на балку действует плоская система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$. Определим силы, которые надо приложить в точке (сечении) A балки, если часть балки AA' отбросить.

К части балки AA' при освобождении ее от заделки в стене приложены распределенные силы. Если эти силы заменить элементарными сосредоточенными силами и затем привести их к точке A, то в точке A получим силу $\bar{R}_A$ (главный вектор элементарных сосредоточенных сил $\bar{q}_i \Delta l_i$) и пару сил с моментом M_A (главный момент относительно точки A элементарных сил $\bar{q}_i \Delta l_i$) Момент M_A называют *моментом заделки.*

Таким образом, заделка в отличие от шарнира создает не только не известную по величине и направлению реакцию $\bar{R}_A$, но еще и пару сил с не известным заранее моментом в заделке M_A (рис. 48, *б*).

Очевидно, если рассмотреть любую часть балки, расчленив ее мысленно по сечению *mn*, то в месте расчленения надо приложить неизвестные силу и пару сил, заменяющие действие отброшенной части балки на рассматриваемую ее часть, причем сила и момент пары сил, действующие на различные части балки, будут иметь противоположные направления действия и вращения соответственно, как всякое действие и противодействие.

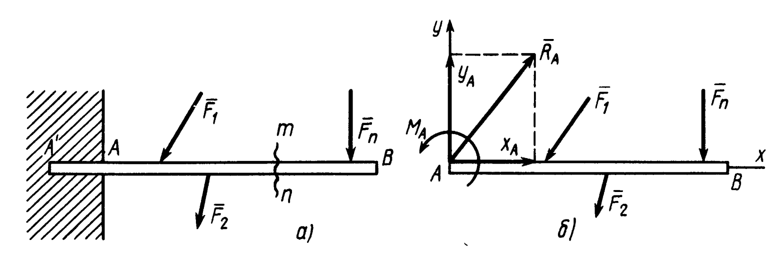


Рис. 48

§ 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ И СИСТЕМЕ ТЕЛ

Рассмотрим общие положения о решении задач на равновесие плоской системы сил, действующих на одно твердое тело и на систему тел. Весь процесс решения задачи на равновесие сил можно расчленить на ряд этапов, которые характерны для большинства задач.

К выбранному для рассмотрения телу или системе тел надо приложить все действующие силы, как активные, так и реакции связей; если нужно, расчленить систему тел на отдельные тела или группы тел. Если связью является абсолютно гладкая поверхность какого-либо тела, то реакция связи в этом случае направлена по нормали к общей касательной в точке соприкосновения в сторону, противоположную тому направлению, в котором связь препятствует перемещению рассматриваемого тела.

Если связью является цилиндрический шарнир, позволяющий телу вращаться вокруг его оси, то реакцию шарнира, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси, следует разложить на две заранее не известные составляющие по положительным направлениям осей координат. Если эти составляющие после их определения из уравнений равновесия будут иметь знак минус, то составляющие реакции направлены противоположно положительному направлению осей координат.

Все гибкие связи (канаты, тросы, ремни и т. п.) создают реакции, направленные по касательной к гибкой связи в данной точке.

Если связью является заделка, которая в отличие от цилиндрического шарнира не позволяет телу поворачиваться, то кроме двух неизвестных составляющих реакций в этой точке надо еще приложить пару сил с не известным заранее моментом заделки.

Эти же случаи связей возможны и при расчленении систем тел.

Выявление всех сил, действующих на рассматриваемое тело или систему тел, особенно правильная замена различных видов связей их реакциями, является одним из главных этапов при решении задач на равновесие.

При расчленении системы тел надо следить, чтобы силы взаимодействия между телами или группами тел сочленной системы в точках сочленения были равны по модулю, но противоположны по направлению. При рассмотрении системы тел (или их группы) силы взаимодействия между телами системы (или их группы) прикладывать не нужно, так как эти силы являются внутренними и в уравнения равновесия для системы тел (или группы) не войдут.

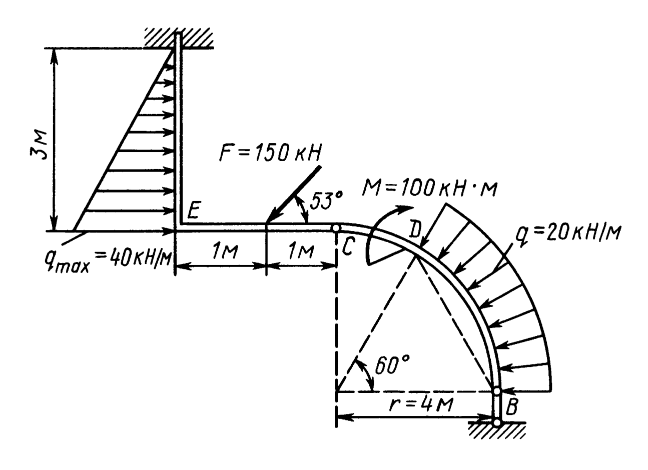


Рис. 49

После выявления всех сил надо выбрать оси координат и моментные точки, а затем, составив условия равновесия сил в одной из форм, решить полученные уравнения относительно неизвестных.

Решение уравнений будет более простым, если при их составлении в каждое из уравнений добавляется по одной новой неизвестной. Этого удается достичь, если за моментную точку брать такую, в которой пересекаются две искомые силы. Такой точкой обычно является цилиндрический шарнир. Оси координат надо брать так, чтобы одна или две неизвестные силы были перпендикулярны одной из осей координат и, следовательно, параллельны другой оси. В этом случае в соответствующее условие равновесия для одного тела войдет только одна неизвестная сила.

Приведем примеры решения задачи на плоскую систему сил.

Пример 1. Дана система двух твердых тел, соединенных с помощью шарнира C (рис. 49). Балка AC, изогнутая под прямым углом, имеет заделку в точке A. Круговая арка CB закреплена в точке B с помощью стержня, имеющего на концах шарниры. Размеры тел и приложенные силы указаны на рисунке. Дуговая стрелка условно обозначает пару сил. Силами тяжести тел пренебречь. Определить силы реакций в точках A и B.

Решение. Заменим распределенные силы сосредоточенными. Величина равнодействующей силы $\bar{R}_1$ (рис. 50) распределенных по треугольнику сил на участке AE определяется по формуле

$$R_1=\frac{1}{2}AE\cdot q_{\max}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 40=60 \text{ кН}.$$

Точка приложения силы $\bar{R}_1$ отстоит от точки E на $^1/_3$ AE, т. е. на 1 м. Значение равнодействующей $\bar{R}_2$ распределенных по арке радиальных сил определяем как произведение длины хорды $\overline{BD}$, стягивающей дугу $\overset{\frown}{BD}$, на интенсивность распределенных сил q, т. е.

$$R_2=\overline{BD}\cdot q=4\cdot 20=80 \text{ кН}.$$

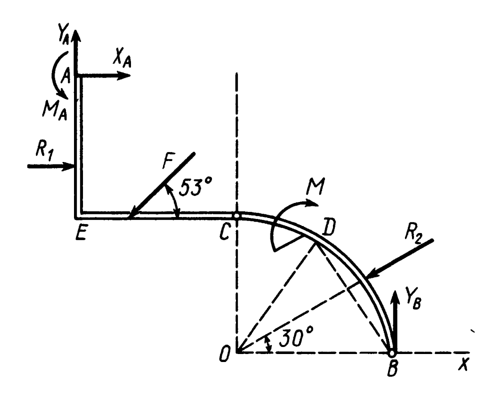


Рис. 50

Линия действия равнодействующей силы $\bar{R}_2$ вследствие симметрии распределения сил проходит через центр арки O, деля угол, стягивающий арку, на равные части.

Рассмотрим сначала равновесие системы двух тел, состоящих из балки AC и арки BC. На эту группу тел действуют силы $\bar{F}$, $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, пара сил с моментом M, силы реакций в заделке A и в опоре B.

Реакции заделки в точке A в общем случае дают три неизвестные: две составляющие силы по осям координат и момент пары сил; одна неизвестная сила имеется в точке B. Ее дает шарнирный стержень. Таким образом, имеем четыре неизвестные, а независимых уравнений для их определения — только три. Систему тел следует расчленить на отдельные тела (рис. 51), приложив к каждому из них в точке C силы действия одного тела на другое, которые равны по величине, но противоположны по направлению.

В дальнейшем целесообразно на рисунках у стрелок, изображающих силы, ставить только буквы, обозначающие значения сил, без знака вектора над ними (рис. 51). Это уменьшит число неизвестных и, следовательно, количество уравнений для их определения.

Всего имеется шесть неизвестных, считая составляющие силы реакции в шарнире C. Составляя по три уравнения равновесия сил для каждого тела, можно получить шесть уравнений для нахождения из них всех неизвестных. Требуется определить только четыре неизвестные реакции в точках A и B. Поэтому составим уравнения гак, чтобы в них не входили реакции в точке C и по возможности в каждое уравнение входило не более одной новой неизвестной.

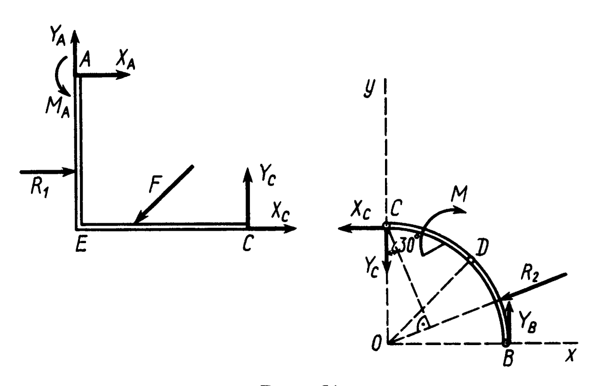


Рис. 51

Составим для арки CB одно условие равновесия сил в форме суммы моментов сил относительно точки C. Имеем

$$-M-R_2 r\cos 30^\circ+Y_B r=-100-80\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+Y_B\cdot 4=0,$$

откуда получаем $Y_B\approx 94$ кН.

После этого для всей системы тел применим условие равновесия в форме суммы проекций сил на оси Ox и Oy. Получим

$$X_A+R_1-F\cos 53^\circ-R_2\cos 30^\circ=0,$$
$$Y_A-F\sin 53^\circ-R_2\sin 30^\circ+Y_B=0,$$

откуда $X_A=99$ кН, $Y_A=66$ кН.

Для определения момента пары сил M_A в заделке достаточно применить для тела AC условие равновесия в форме суммы моментов сил относительно точки C. Имеем

$$F\sin 53^\circ\cdot 1-R_1\cdot 1-X_A\cdot 3-Y_A\cdot 2+M_A=0,$$

откуда $M_A=370$ кН·м.

Если дополнительно требуется определить силы X_C и Y_C, то следует применить условия равновесия для тела CB в форме проекций сил на оси Ox и Oy.
Тогда

$$-X_C-R_2\cos 30^\circ=0;\qquad -Y_C-R_2\sin 30^\circ+Y_B=0.$$

Из этих уравнений получаем

$$X_C=69 \text{ кН};\qquad Y_C=54 \text{ кН}.$$

Для контроля правильности определения реакций в точках A и B следует составить условие равновесия, например, в форме суммы моментов сил относительно точки C для всей системы. Полученные ранее значения неизвестных должны обратить его в тождество.

Задача считается решенной, если известны проекции искомых сил на оси координат, так как по проекциям легко определяются модули этих сил и косинусы углов сил с осями координат.

Пример 2. Для системы тел, находящихся в равновесии, определить реакцию шарнира B (рис. 52). Необходимые данные указаны на рисунке. Стержни AE и BC, блоки и нить считать невесомыми. Трением в шарнирах пренебречь. Дуговой стрелкой обозначена пара сил, $|M|$ — модуль алгебраического момента.

Решение. Рассмотрим всю систему тел, освободив ее от связей, т. е. от цилиндрических шарниров в A и B. Неизвестные по величине и направлению силы реакций этих шарниров разложим на составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$,

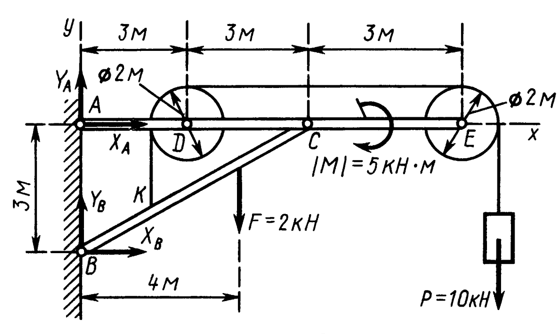


Рис. 52

предположив, что они направлены по положительному направлению осей координат. Неизвестных четыре, а условий равновесия сил для всей системы тел можно составить только три. Поэтому рассмотрим другие комбинации тел или отдельные тела.

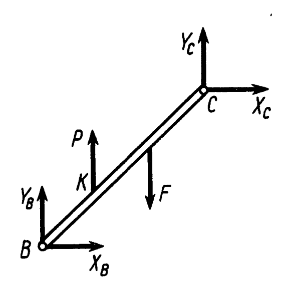


Рис. 53

Для определения X_B удобно составить условие равновесия для всей системы тел в форме суммы моментов сил относительно точки A. Имеем

$$\sum_{i=0}^{n} M_A(\bar{F}_i)=0; \quad X_B\cdot 3-F\cdot 4-|M|-P\cdot 10=0,$$

или

$$X_B\cdot 3-2\cdot 4-5-10\cdot 10=0,$$

откуда $X_B=37{,}7$ кН. Из приведенного уравнения X_B получилось со знаком плюс; следовательно, предположение о первоначальном направлении $\bar{X}_B$ в положительную сторону оси Ox оказалось правильным.

Другие условия равновесия сил для всей системы тел не позволяют определить неизвестную Y_B, так как в уравнения войдет неизвестная сила Y_A.

Рассмотрим отдельно равновесие стержня BC (рис. 53), освободив его от связей. В шарнире C неизвестную силу реакции заменим составляющими, направленными параллельно осям координат в положительную сторону. В точке K приложим силу натяжения отброшенной нити, которая по величине равна силе тяжести груза P и направлена по нити.

Для определения Y_B составим условие равновесия для сил, приложенных к стрежню BC, в форме суммы моментов сил относительно точки C. В это условие не войдут неизвестные силы X_C и Y_C, которые определять не требуется. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} M_C(\bar{F}_i)=0; \quad -Y_B\cdot 6+X_B\cdot 3-P\cdot 4+F\cdot 2=0,$$

или

$$Y_B\cdot 6+\frac{113}{3}\cdot 3-10\cdot 4+2\cdot 2=0.$$

Отсюда находим $Y_B=12{,}8$ кН. Знак плюс у этой силы указывает на правильность предположения о направленности $\bar{Y}_B$.

Для приобретения опыта силового анализа в системах тел рассмотрим дополнительно еще несколько вариантов частей ситемы тел и отдельных тел с приложенными к ним силами (рис. 54...57).

При замене отбрасываемых тел силами учтено, что оси блоков D и E являются цилиндрическими шарнирами и реакции от них следует разлагать на составляющие, параллельные осям координат. Рассматривая силы, с которыми тела действуют друг на друга, следует учитывать, что, согласно аксиоме статики, силы действия и противодействия равны по величине, но противоположны по направлению. Так, если стержень действует на блок

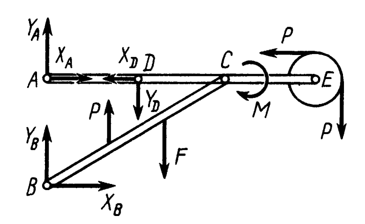


Рис. 54

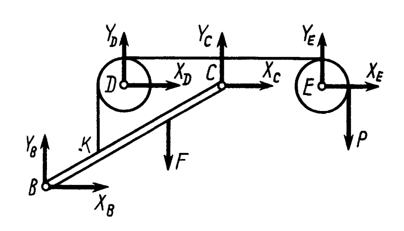


Рис. 55

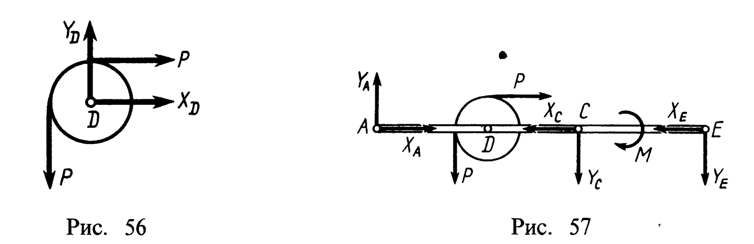


Рис. 56 Рис. 57

в точке D с силами $\bar{X}_D$ и $\bar{Y}_D$, направленными в положительные стороны осей координат (рис. 56), то блок будет действовать на стержень AE (рис. 57) с силами, равными по модулю, но направленными в противоположные стороны.

При отбрасывании нити следует учитывать, что ее натяжение во всех точках при отсутствии трения в осях блоков одинаково по величине и направлено по касательной к нити. Нить при этом должна испытывать только растяжение. При рассмотрении отдельного блока силы натяжения нитей следует приложить в двух точках, в которых отбрасываются части нити.

ГЛАВА 6
ТРЕНИЕ

При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхностей соприкосновения возникает сила трения скольжения.

Если одно тело, например цилиндрический каток, катить или стремиться катить по поверхности другого тела, то кроме силы трения скольжения из-за деформации поверхностей тел дополнительно возникает пара сил, препятствующая качению катка. Возникновение силы трения, препятствующей скольжению, иногда называют трением первого рода, а возникновение пары сил, препятствующей качению,—трением второго рода.

§ 1. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

Пусть на тело действует плоская система активных сил и тело находится в равновесии, соприкасаясь с поверхностью другого тела, являющегося связью для рассматриваемого тела. Если поверхности соприкасающихся тел абсолютно гладкие и тела абсолютно твердые, то реакция поверхности связи направлена по нормали к общей касательной в точке соприкосновения и направление реакции в этом случае не зависит от действующих на тело активных сил. От активных сил зависит только числовое значение силы реакции. В действительности абсолютно гладких поверхностей и абсолютно твердых тел не бывает. Все поверхности тел в той или иной степени шероховаты и все тела деформируемы. В связи с этим и сила реакции $\bar{R}$ шероховатой поверхности при равновесии

тела зависит от активных сил не только по модулю, но и по направлению (рис. 58).

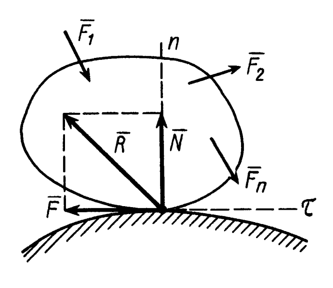


Рис. 58

Если силу реакции $\bar{R}$ шероховатой поверхности разложить на составляющие, одна из которых ($\bar{N}$) направлена по общей нормали к поверхности соприкосновения, а другая ($\bar{F}$) находится в касательной плоскости к этим поверхностям, то составляющая $\bar{F}$ силы реакции является *силой трения скольжения*, а составляющая $\bar{N}$ — *нормальной реакцией*.

В теоретической механике обычно рассматривается только сухое трение между поверхностями тел, т. е. такое трение, когда между ними нет смазывающего вещества. Для сухого трения надо различать трение скольжения при покое или равновесии тела и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной в точке соприкосновения поверхностей тел сила трения вычисляется по формуле

$$F=\sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}.$$

Аналогично, при выбранном направлении нормали нормальная реакция выражается через заданные силы

$$-N=\sum_{i=1}^{n} F_{in}.$$

В 1781 г. Кулон установил основные приближенные законы для сухого трения скольжения. В дальнейшем законы Кулона многократно проверялись другими исследователями. Но эти законы подтверждались в случае, когда поверхности тел не вдавливались друг в друга и шероховатость была не очень велика.

Законы Кулона можно установить на приборе, схема которого дана рис. 59. На этом приборе, изменяя вес гири, можно изменять нормальное давление $\bar{P}$ (или равную ему нормальную реакцию $\bar{N}$) между трущимися поверхностями. Изменяя же вес гирь Q, можно изменять силу $\bar{Q}$, которая стремится двигать тело вдоль поверхности другого тела, являющегося связью. Очевидно, что если сила $\bar{Q}=0$, то тело находится в равновесии и сила трения $\bar{F}$ равна нулю.

Если силу $\bar{Q}$ увеличить (при этом тело не скользит по поверхности, а находится в равновесии), то по условию равновесия возникает сила трения $\bar{F}$, которая равна, но

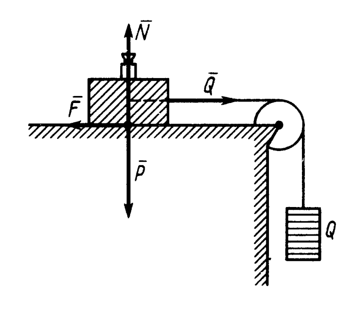


Рис. 59

противоположна активной силе $\bar{Q}$. Нормальная реакция $\bar{N}$ равна нормальному давлению $\bar{P}$. Увеличивая силу $\bar{Q}$ при одном и том же нормальном давлении $\bar{P}$, можно достичь и такого положения, когда ничтожно малое дальнейшее увеличение силы $\bar{Q}$ выведет тело из равновесия, заставляя его скользить по поверхности связи. Очевидно, будет достигнуто предельное положение, при котором сила трения станет наибольшей и не сможет уравновешивать силу $\bar{Q}$ при ее дальнейшем увеличении. Изменяя силу нормального давления $\bar{P}$, можно исследовать, как изменяется при этом предельная сила трения F_{max}. Можно также исследовать влияние на предельную силу трения площади соприкосновения тел, сохраняя при этом нормальное давление, а также влияние материала тел, характер обработки поверхностей и другие факторы. Такие опыты позволяют проверить законы Кулона для сухого трения скольжения.

Законы Кулона

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону, противоположную направлению возможного или реального скольжения тела под действием приложенных сил. Сила трения при покое зависит от активных сил и ее модуль заключен между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия, т. е.

$$0 \leqslant F \leqslant F_{max}.$$

2. Максимальная сила трения скольжения при прочих равных условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей. Из этого закона следует, что для того, чтобы сдвинуть, например, кирпич, надо приложить одну и ту же силу независимо от того, какой гранью он положен на поверхность, широкой или узкой.

3. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению (нормальной реакции), т. е.

$$F_{max} = f N, \tag{1}$$

где безразмерный коэффициент f называют *коэффициентом трения скольжения*; он не зависит от нормального давления.

4. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей, т. е. от величины и характера шероховатости, влажности, температуры

и других условий. Коэффициент трения скольжения в зависимости от различных условий устанавливается экспериментально. Так, коэффициент трения для кирпича по бетону равен 0,76; для стали по стали — 0,15; для дуба по дубу поперек волокон — 0,54, а для дуба по дубу вдоль волокон — 0,62.

Опыты показывают, что при скольжении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью возникает сила трения скольжения, равная максимальной, только при этом коэффициент трения скольжения незначительно изменяется в зависимости от скорости скольжения. Для большинства материалов он уменьшается с увеличением скорости скольжения, но для некоторых материалов, наоборот, увеличивается (трение кожи о металл).

В приближенных технических расчетах обычно считают, что коэффициент трения скольжения не зависит от относительной скорости скольжения.

В отличие от сухого трения трение при наличии смазывающего слоя между поверхностями определяется распределением относительной скорости скольжения в этом слое. В этом случае трение происходит не между поверхностями тел, а между слоями смазывающего вещества. Теория трения в смазывающем слое жидкости рассматривается в гидродинамике.

Угол и конус трения

Многие задачи на равновесие тела на шероховатой поверхности, т. е. при наличии силы трения, удобно решать геометрически. Для этой цели введем понятия угла и конуса трения.

Пусть твердое тело под действием активных сил находится на шероховатой поверхности в предельном состоянии равновесия, т. е. таком состоянии, когда сила трения достигает своего наибольшего значения при данном значении нормальной реакции (рис. 60). В этом случае полная реакция шероховатой поверхности $\bar{R}$ отклонена от нормали общей касательной плоскости трущихся поверхностей на наибольший угол.

Этот наибольший угол φ между полной реакцией, построенной на наибольшей силе трения при данной нормальной реакции, и направлением нормальной реакции называют *углом трения*.

Угол трения φ зависит от коэффициента трения, т. е.

$$\operatorname{tg}\varphi = F_{\max}/N.$$

Но по третьему закону Кулона,

$$F_{\max} = f N;$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = f, \qquad (2)$$

т. е. тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

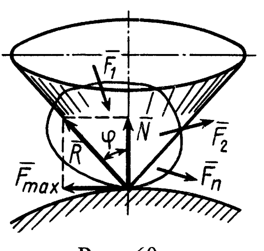


Рис. 60

Конусом трения называют конус, описанный полной реакцией, построенной на максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции. Его можно получить изменяя активные силы так, чтобы тело на шероховатой поверхности находилось в предельных положениях равновесия, стремясь выйти из равновесия по всем возможным направлениям, лежащим в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей.

Если коэффициент трения во всех направлениях одинаков, то конус трения круговой. Если не одинаков, то конус трения не круговой, например в случае, когда свойства соприкасающихся поверхностей различны (вследствие определенного направления волокон или в зависимости от направления обработки поверхности тел, если обработка происходит на строгальном станке и т. п.).

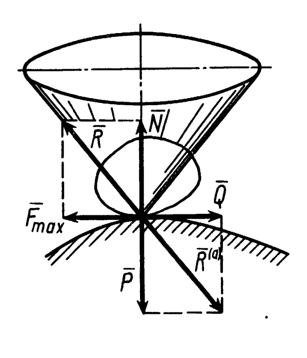
Равновесие тела на шероховатой поверхности

При равновесии сил, действующих на твердое тело, находящееся в равновесии на шероховатой поверхности, возникает дополнительно неизвестная сила реакции шероховатой поверхности — сила трения. В случае предельного равновесия сила трения достигает своего максимального значения и по формуле (1) выражается через нормальную реакцию. В общем случае равновесия сила трения находится между нулем и ее максимальным значением. Поэтому соответствующие условия равновесия, в которые входит сила трения после замены ее максимальным значением, становятся неравенствами. После этого неизвестные находят путем совместного решения уравнений и неравенств. Для всех неизвестных или для их части получают решения в виде неравенств.

Некоторые задачи на равновесие с учетом сил трения удобно решать геометрически с помощью конуса трения.

Можно сформулировать условия равновесия тела на шероховатой поверхности используя конус трения. Если активные силы, действующие на тело, приводятся к равнодействующей силе $\bar{R}^{(a)}$, то при равновесии тела на шероховатой поверхности равнодействующая активных сил $\bar{R}^{(a)}$ по аксиоме о равновесии двух сил, приложенных к твердому телу, уравновешивается полной реакцией $\bar{R}$ шероховатой поверхности (рис. 61). Полная реакция проходит через вершину конуса, а следовательно, через вершину конуса проходит и равнодействующая активных сил.

Очевидно, при изменении равнодействующей активных сил тело находится в равновесии до тех пор, пока составляющая $\bar{Q}$ равнодействующей активных сил, лежащая в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей, не будет превышать наибольшего значения силы трения $\bar{F}_{max}$.



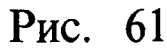


Рис. 61

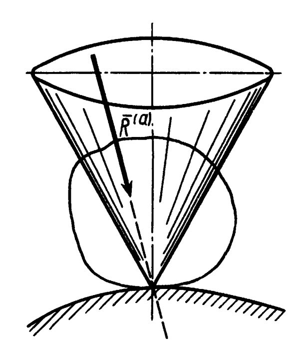


Рис. 62

Предельным положением равновесия тела является случай, когда сила Q равна силе F_{max}. В этом случае равнодействующая активных сил $\bar{R}^{(a)}$ направлена по образующей конуса трения, так как $\bar{P}$ — составляющая равнодействующей активных сил по нормали — уравновешена нормальной реакцией $\bar{N}$, если только активные силы не отделяют тела от шероховатой поверхности. Поэтому условие равновесия тела на шероховатой поверхности можно сформулировать так: *для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину* (рис. 62).

Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если ее линия действия проходит внутри конуса трения.

Если линия действия равнодействующей активных сил не проходит внутри конуса трения или по его образующей, то тело на шероховатой поверхности не может находиться в равновесии (рис. 63).

Пример 1. Тело, сила тяжести которого $P = 100$ Н, удерживается в равновесии силой $\bar{T}$ на шероховатой наклонной плоскости, имеющей угол

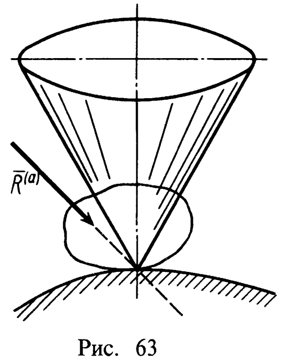


Рис. 63

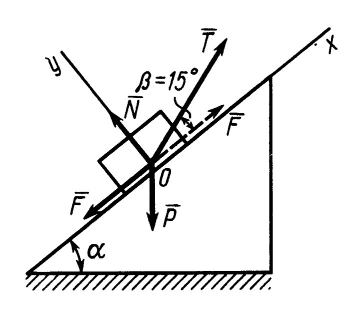


Рис. 64

наклона $\alpha=45°$ (рис. 64). Коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью $f=0{,}6$. Сила $\bar{T}$ действует на тело под углом $\beta=15°$ к линии наибольшего ската. Определить значение силы $\bar{T}$ при равновесии тела на шероховатой наклонной плоскости.

Решение. К телу приложены силы $\bar{N}$, $\bar{P}$, $\bar{T}$ и сила трения $\bar{F}$. Возможны два случая предельного равновесия тела и соответственно два предельных значения силы $\bar{T}$ при двух направлениях силы трения по наклонной плоскости вниз и вверх в зависимости от направления возможного скольжения вверх по наклонной плоскости и вниз. Для составления уравнений равновесия целесообразно ввести $f_1=kf$, где $k=\pm 1$.

Составляем условия равновесия в виде суммы проекций сил на координатные оси для обоих предельных случаев. Имеем

$$T\cos\beta - F - P\sin\alpha = 0; \qquad T\sin\beta + N - P\cos\alpha = 0.$$

По закону Кулона,

$$F = f_1 N = kfN.$$

Решая эти уравнения относительно T, получаем

$$T = P(\sin\alpha + kf\cos\alpha)/(\cos\beta + kf\sin\beta).$$

Отсюда при $k=+1$

$$T_1 = P(\sin\alpha + f\cos\alpha)/(\cos\beta + f\sin\beta) \approx 102 \text{ Н};$$

при $k=-1$

$$T_2 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/(\cos\beta - f\sin\beta) \approx 35 \text{ Н}.$$

Таким образом, сила T при равновесии тела должна удовлетворять условию $35 \leqslant T \leqslant 102$ Н.

Пример 2. Однородный тяжелый стержень AB длиной l опирается концом A на гладкую вертикальную стену, а другим B — на шероховатую вертикальную стену (рис. 65). Расстояние между стенами $h<l$. Определить коэффициент трения стены f, при котором возможно равновесие стержня.

Решение. Рассмотрим случай, когда точка A расположена выше точки B стержня. Равновесие стержня невозможно, если точка A расположена ниже точки B. На стержень действуют сила тяжести $\bar{P}$, приложенная посередине стержня, нормальная реакция гладкой стены $\bar{N}_A$ и реакция шероховатой стены $\bar{R}_B$, которую разложим на нормальную реакцию $\bar{N}_B$ и силу трения $\bar{F}_B$.

Составим условия равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix}=0; \qquad N_A - N_B = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy}=0; \qquad F_B - P = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n} M_B(\bar{F}_i)=0; \qquad P\frac{h}{2} - N_A l\sin\alpha = 0.$$

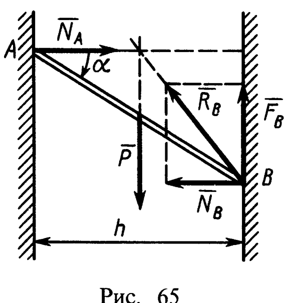


Рис. 65

К этим условиям следует добавить неравенство для силы трения

$$F_B \leqslant fN_B.$$

Из уравнений равновесия находим

$$N_A = N_B = N; \quad F_B = P; \quad N = N_A = Ph/(2l\sin\alpha).$$

Из геометрических условий задачи имеем

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}.$$

Итак, для силы трения F_B имеем следующие уравнение и неравенство:

$$F_B=P;\quad F_B\leqslant\frac{fPh}{2\sqrt{l^2-h^2}}.$$

Исключая из них силу трения F_B, после сокращения на P получаем

$$1\leqslant fh/(2\sqrt{l^2-h^2}).$$

Искомое условие для коэффициента трения f при равновесии стержня принимает вид

$$f\geqslant 2\sqrt{l^2-h^2}/h.$$

§ 2. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Если рассматриваемое тело имеет форму катка и под действием приложенных активных сил может катиться по поверхности другого тела, то из-за деформации поверхностей этих тел в месте соприкосновения могут возникнуть силы реакции, препятствующие не только скольжению, но и качению. Примерами таких катков являются различные колеса, как, например, у электровозов, вагонов, автомашин, шарики и ролики в шариковых и роликовых подшипниках и т. п.

Пусть цилиндрический каток находится на горизонтальной плоскости под действием активных сил. Соприкосновение катка с плоскостью из-за деформации фактически происходит не вдоль одной образующей, как в случае абсолютно твердых тел, а по некоторой площадке. Если активные силы приложены симметрично относительно среднего сечения катка, т. е. вызывают одинаковые деформации вдоль всей его образующей, то можно изучать только одно среднее сечение катка. Этот случай рассмотрен ниже.

Активные силы, действующие на катки в виде колес (рис. 66), кроме силы тяжести $\bar{P}$ обычно состоят из силы $\bar{Q}$, приложенной к центру колеса параллельно общей касательной в точке A, и пары сил с моментом L, стремящейся катить колесо, называемое в этом случае *ведомо-ведущим*. Если $L=0$, а $Q\neq 0$, то колесо называют *ведомым*; если $L\neq 0$, а $Q=0$, то *ведущим*. Ведомо-ведущими являются колеса локомотива, идущего вторым в составе поезда.

Если активные силы, действующие на колесо, привести к точке A соприкосновения катка с плоскостью, у которых нет деформации, то в общем случае получим силу и пару сил, стремящиеся заставить каток скользить и катиться. Следует различать ч и с т о е к а ч е н и е, когда точка соприкосновения A катка не скользит по неподвижной плоскости, и к а ч е н и е с о с к о л ь ж е н и е м, когда наряду с вращением катка есть и скольжение, т. е. точка A катка движется по плоскости. При чистом скольжении, наоборот, каток движется по плоскости, не имея вращения.

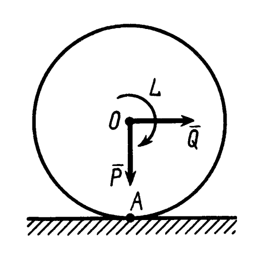


Рис. 66

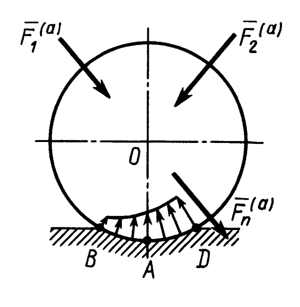




Рис. 67

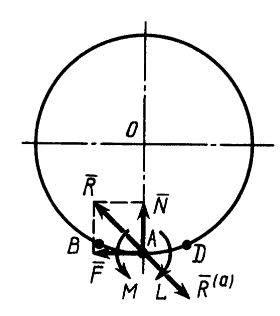


Рис. 68

Соприкосновение среднего сечения колеса с неподвижной плоскостью из-за деформации колеса и плоскости происходит по некоторой линии BD. По этой линии на колесо действуют распределенные силы реакции (рис. 67). Если привести распределенные силы к точке A, то в этой точке получим главный вектор $\bar{R}$ этих распределенных сил с составляющими $\bar{N}$ (нормальная реакция) и $\bar{F}$ (сила трения скольжения), а также пару сил с моментом M. При симметричном распределении сил по линии BD относительно точки A момент M пары сил равен нулю. В этом случае нет активных сил, стремящихся катить каток в каком-либо направлении.

Приведем активные силы $(\bar{F}_1^{(a)}, \bar{F}_2^{(a)}, \ldots, \bar{F}_n^{(a)})$ в общем случае к точке A. В этой точке получим главный вектор этих сил $\bar{R}^{(a)}$ и пару сил, момент которой равен главному моменту L (рис. 68).

При равновесии катка, т. е. когда каток не катится и не скользит по плоскости, активные силы уравновешиваюся силами реакций связи и, следовательно,

$$-\bar{R}=\bar{R}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{(a)}; \quad -M=L=\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\bar{F}_i^{(a)}\right).$$

Изменив активные силы, приложенные к катку так, чтобы увеличивался момент L пары активных сил, стремящейся катить каток. Пока каток находится в равновесии, увеличивается и равный ему по числовой величине, но противоположный по направлению момент M пары сил, препятствующий качению катка и возникающий от действия на каток неподвижной плоскости. Наибольшее значение M достигается в момент начала качения катка по плоскости.

Установлены следующие приближенные законы для наибольшего момента пары сил, препятствующей качению:

1. Наибольший момент пары сил, препятствующей качению, в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.

2. Предельное значение момента M_{max} пропорционально нормальному давлению, а следовательно, и равной ему нормальной реакции $\bar{N}$:

$$M_{max}=\delta N. \qquad (3)$$

Коэффициент пропорциональности δ называют *коэффициентом трения качения* при покое или коэффициентом трения второго рода. Из формулы (3) следует, что δ имеет размерность длины.

3. Коэффициент трения качения δ зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей. Коэффициент трения качения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости. Для случая качения вагонного колеса по стальному рельсу коэффициент трения качения $\delta \approx 0{,}5$ мм.

Законы трения качения, как и законы трения скольжения, справедливы для не очень больших нормальных давлений и не слишком легко деформирующихся материалов катка и плоскости.

Эти законы позволяют не рассматривать деформации катка и плоскости, считая их абсолютно твердыми телами, касающимися в одной точке. В этой точке соприкосновения в среднем сечении катка кроме нормальной реакции и силы трения надо приложить еще и пару сил, препятствующую качению.

Коэффициент трения качения равен длине d, которую вычислим следующим образом. Сложим нормальную реакцию $\bar{N}$ с парой сил, препятствующей качению в момент, когда $M=M_{max}$. Получим ту же силу $\bar{N}$, но сдвинутую параллельно самой себе на расстояние

$$d=M_{max}/N=\delta N/N=\delta.$$

В предельном случае равновесия катка $d=\delta$. Эту величину следует отложить в направлении, в котором активные силы стремятся катить каток (рис. 69).

Для того чтобы каток не скользил, необходимо выполнение условия

$$|F|<F_{max}=fN. \qquad (4)$$

Для заданных активных сил соответственно

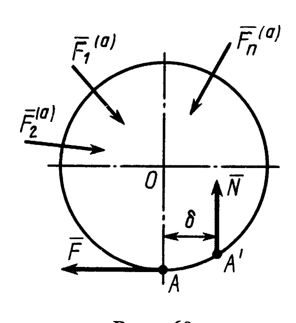
$$|-F|=\left|\sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}^{(a)}\right|<F_{max}.$$

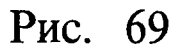
Для того чтобы каток не катился, должно выполняться условие

$$|M|<M_{max}=\delta N. \qquad (5)$$

Для активных сил оно имеет вид

$$|-M|=\left|\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\bar{F}_i^{(a)}\right)\right|<M_{max}.$$




Рис. 69

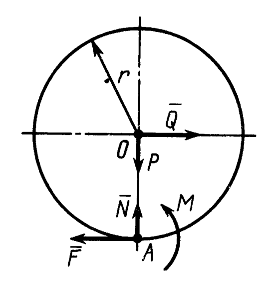


Рис. 70

Для примера рассмотрим случай ведомого колеса, к которому кроме силы тяжести $\bar{P}$ приложена еще горизонтальная активная сила $\bar{Q}$ (рис. 70).

Если каток находится в равновесии, то из условий равновесия плоской системы сил, приложенных к катку, получаем

$$F = Q; \quad N = P; \quad rQ = M,$$

где за моментную точку взята точка A.

В случае отсутствия скольжения по формуле (4) с учетом условий равновесия

$$Q = F \leqslant fP.$$

Аналогично, при отсутствии качения по формуле (5) имеем

$$rQ = M \leqslant \delta P.$$

Таким образом, при отсутствии скольжения сила $\bar{Q}$ должна удовлетворять условию $Q \leqslant fP$, а при отсутствии качения эта же сила $\bar{Q}$ — удовлетворять другому условию:

$$Q \leqslant \frac{\delta}{r} P.$$

Если $\delta/r < f$, то, пока $Q \leqslant \frac{\delta}{r} P$, каток находится в равновесии. Если $fP > Q \geqslant \frac{\delta}{r} P$, то каток катится без скольжения (чистое качение). При $Q \geqslant fP$ кроме качения появляется еще и скольжение.

При $\delta/r > f$ каток находится в равновесии, пока $Q \leqslant fP$. Если $\frac{\delta}{r} P > Q \geqslant fP$, он скользит не вращаясь (поступательное движение). При $Q \geqslant \frac{\delta}{r} P$ наряду со скольжением возникает качение.

В том случае, если $\frac{\delta}{r} = f$, каток находится в равновесии, пока $Q \leqslant \frac{\delta}{r} P = fP$. Если же $Q \geqslant \frac{\delta}{r} P = fP$, то он катится со скольжением.

Обычно $\delta/r \ll f$ и, следовательно, для начала качения катка требуется значительно меньшая сила $\bar{Q}$, чем для начала его скольжения. Поэтому по мере увеличения силы $\bar{Q}$ каток сначала начинает катиться, а при дальнейшем ее росте к качению добавляется еще и скольжение.

С точки зрения затраты энергии выгодно заменять скольжение качением. Этим объясняется преимущество шариковых и роликовых подшипников по сравнению с подшипниками скольжения, если даже в них трение и не уменьшается введением смазывающего вещества.

Аналогично трению качения можно рассмотреть и явление возникновения так называемого трения верчения, т. е. случая, когда активные силы стремятся вращать тело, например в форме шара, вокруг нормали к общей касательной поверхности соприкосновения.

В этом случае возникает пара сил, препятствующая верчению, причем наибольший ее момент, возникающий в момент начала верчения, также прямо пропорционален нормальной реакции. Коэффициент пропорциональности, т. е. коэффициент трения верчения, обычно значительно меньше коэффициента трения качения.

ГЛАВА 7

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ СИЛ. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

§ 1. ИЗМЕНЕНИЕ ГЛАВНОГО МОМЕНТА ПРИ ПЕРЕМЕНЕ ЦЕНТРА ПРИВЕДЕНИЯ

При перемене центра приведения векторные моменты сил изменяются, так как изменяются радиусы-векторы их точек приложения. Вследствие этого изменяется главный момент. Оценим изменение главного момента системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, ..., \bar{F}_n)$. Пусть система сил приведена к центру O и получены в этой точке главный вектор $\bar{R}$ и главный момент $\bar{L}_O$ (рис. 71). Выберем в качестве центра приведения другую точку O_1 и вычислим главный момент $\bar{L}_{O_1}$ рассматриваемой системы сил. Так как

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n) \backsim (\bar{R}, \bar{L}_O),$$

то для получения главного момента $\bar{L}_{O_1}$ достаточно привести к новому центру систему $(\bar{R}, \bar{L}_O)$. Силу $\bar{R}$ из точки O перенесем в точку O_1. Получим в этой точке силу $\bar{R}_1 = \bar{R}$ и, согласно теореме о параллельном переносе силы, присоединенную пару сил с векторным моментом $\bar{M}_{O_1}(\bar{R})$. Векторный момент пары

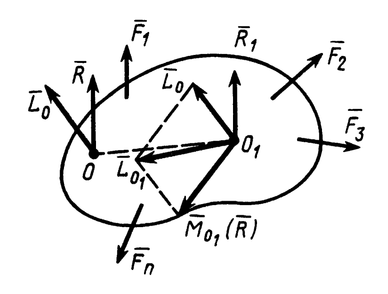


Рис. 71

сил $\bar{L}_O$, вычисленный относительно точки O как вектор свободный, можно приложить в любой точке тела. Новый главный момент относительно точки O_1 по правилу сложения пар сил является векторной суммой моментов $\bar{L}_O$ и $\bar{M}_{O_1}(\bar{R})$, т. е.

$$\bar{L}_{O_1} = \bar{L}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{R});$$

$$\bar{L}_{O_1} - \bar{L}_O = \bar{M}_{O_1}(\bar{R}). \tag{1}$$

По формуле для векторного момента силы имеем

$$\bar{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1 O} \times \bar{R} = -\overrightarrow{OO_1} \times \bar{R}.$$

С учетом этого формула (1) примет вид

$$\bar{L}_{O_1} = \bar{L}_O - \overrightarrow{OO_1} \times \bar{R}. \tag{2}$$

Итак, *главный момент системы сил при перемене центра приведения изменяется на векторный момент главного вектора* $\bar{R}$, приложенного в старом центре приведения, относительно нового центра приведения O_1.

§ 2. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ СИЛ

Инвариантами в статике называются такие величины для рассматриваемой системы сил, которые не изменяются при изменении центра приведения. Одним из инвариантов является главный вектор, так как в любом центре приведения он выражается векторной суммой системы сил. Если в одном центре приведения O главный вектор $\bar{R}$, а в другом O_1 он $\bar{R}_1$, то

$$\bar{R} = \bar{R}_1. \tag{3}$$

Таким образом, *главный вектор системы сил является векторным инвариантом.* Для одной и той же системы сил он не зависит от выбора центра приведения.

Из векторного равенства (3) следует, что равны модули и проекции главных векторов на любые оси координат, т. е.

$$R = R_1, \; R_x = R_{1x}, \; R_y = R_{1y}, \; R_z = R_{1z}. \tag{3'}$$

Для получения второго, скалярного, инварианта используем формулу (2):

$$\bar{L}_{O_1} = \bar{L}_O - \overrightarrow{OO_1} \times \bar{R}.$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на $\bar{R}_1$, причем в правой части при умножении вместо $\bar{R}_1$, согласно (3), возьмем $\bar{R}$, получим

$$\bar{L}_{O_1} \cdot \bar{R}_1 = \bar{L}_O \cdot \bar{R} - (\overrightarrow{OO} \times \bar{R}) \cdot \bar{R},$$

или

$$\bar{L}_{O_1}\cdot\bar{R}_1=\bar{L}_O\cdot\bar{R}, \qquad (4)$$

так как смешанное произведение векторов, содержащих два одинаковых множителя $\bar{R}$, равно нулю, т. е.

$$(\overrightarrow{OO_1}\times\bar{R})\cdot\bar{R}=0.$$

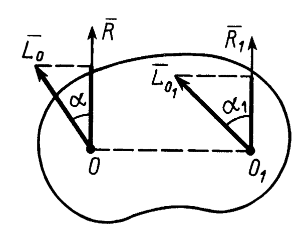


Рис. 72

Соотношение (4) является вторым скалярным инвариантом: *скалярное произведение главного момента на главный вектор не зависит от центра приведения*. Второй скалярный инвариант можно выразить в двух других эквивалентных формах, если раскрыть скалярное произведение векторов в (4). Обозначая проекции $\bar{L}_{O_1}$ на оси координат через L_{1x}, L_{1y}, L_{1z}, а проекции $\bar{L}_O$ — соответственно через L_x, L_y, L_z, второй инвариант можно выразить в форме

$$L_{1x}R_{1x}+L_{1y}R_{1y}+L_{1z}R_{1z}=L_xR_x+L_yR_y+L_zR_z. \qquad (4')$$

Кроме того, формуле (4) можно придать вид

$$L_{O_1}R_1\cos\alpha_1=L_OR\cos\alpha,$$

где α_1 — угол между векторами $\bar{L}_{O_1}$ и $\bar{R}_1$, а α — между $\bar{L}_O$ и $\bar{R}$ (рис. 72). После сокращения на $R_1=R$ получим

$$L_{O_1}\cos\alpha_1=L_O\cos\alpha. \qquad (4'')$$

В этой форме второй инвариант утверждает, что *проекция главного момента на направление главного вектора не зависит от центра приведения*.

Если главный момент в каждом центре приведения разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых направлена по главному вектору, то, учитывая, что главные векторы в различных центрах приведения параллельны, согласно (4″), получим

$$\bar{L}'_{O_1}=\bar{L}'_O, \qquad (5)$$

где $\bar{L}'_{O_1}$ — составляющая главного момента $\bar{L}_{O_1}$ по направлению главного вектора $\bar{R}_1$, а $\bar{L}'_O$ — составляющая главного момента $\bar{L}_O$ по направлению главного вектора $\bar{R}$. Соотношение (5) является следствием первого и второго инвариантов.

Рассмотренные инварианты (3) и (4) являются независимыми, т. е. из одного не следует другой. Комбинируя эти инварианты, можно получить другие, зависящие от них инварианты.

§ 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Произвольная система сил приводится к силе, равной главному вектору $\bar{R}$, и паре сил, векторный момент которой равен главному моменту $\bar{L}_O$. В зависимости от их модулей

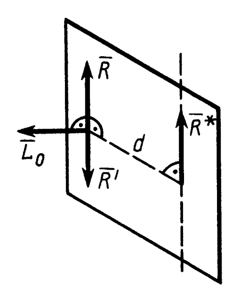


Рис. 73

и взаимного направления, т. е. угла α между ними, можно произвести дальнейшие упрощения.

Приведение к паре сил. Если $\bar{R}=0$, $\bar{L}_O \neq 0$, то система сил приводится к одной паре сил, причем главный момент в этом случае, согласно (2), не зависит от выбора центра приведения. В рассматриваемом случае оба инварианта системы сил равны нулю, т. е.

$$\bar{R}=0; \quad \bar{L}_O \cdot \bar{R}=0.$$

Приведение к равнодействующей. Возможны два случая.

1. Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{L}_{O_1}=0$ (первый инвариант $\bar{R} \neq 0$, второй — $\bar{L}_O \cdot \bar{R}=0$), то система приводится к равнодействующей силе $\bar{R}^*$, равной по модулю и направлению главному вектору $\bar{R}$, т. е.

$$\bar{R}^*=\bar{R}.$$

Линия действия равнодействующей силы в этом случае проходит через центр приведения.

2. Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{L}_O \neq 0$, но $\alpha=90°$, т. е. $\bar{L}_O \perp \bar{R}$ (первый инвариант $\bar{R} \neq 0$, второй — $\bar{L}_O \cdot \bar{R}=0$), то система сил тоже приводится к равнодействующей, причем опять

$$\bar{R}^*=\bar{R}.$$

Но линия действия равнодействующей силы $\bar{R}^*$ отстоит от центра приведения на расстоянии $d=L_O/R$. Действительно, в этом случае имеем силу и пару сил с векторным моментом $\bar{L}_O$, причем силы пары можно считать расположенными в одной плоскости с силой $\bar{R}$, так как векторный момент пары перпендикулярен силе $\bar{R}$ (рис. 73). Поворачивая и перемещая пару сил в ее плоскости, а также изменяя силы пары и ее плечо, при сохранении векторного момента можно получить одну из сил пары $\bar{R}'$, равной по модулю, но противоположной по направлению главному вектору $\bar{R}$. Другая сила пары $\bar{R}^*$ и будет равнодействующей силой. Действительно,

$$(\bar{R},\ \bar{L}_O) \backsim (\bar{R},\ \bar{R}',\ \bar{R}^*) \backsim (\bar{R}^*),\ (\bar{R}^*)=\bar{R},$$

так как система двух равных по модулю, но противоположных по направлению сил $(\bar{R},\ \bar{R}') \backsim 0$ и может быть отброшена. Таким образом, рассматриваемая система сил оказалась эквивалентной одной равнодействующей силе $\bar{R}^*$, которая по модулю и направлению совпадает с главным вектором $\bar{R}$. Плечо пары сил $(\bar{R}',\ \bar{R}^*)$ определяется из условия

$$d=L_O/R,$$

так как $R=R'=R^*$. Отрезок d определяет кратчайшее расстояние от центра приведения O до линии действия равнодейству-

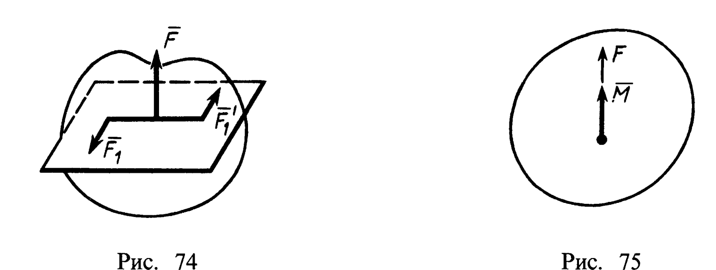


Рис. 74 Рис. 75

ющей силы $\bar{R}^*$. Первый случай является частным случаем второго, когда за центр приведения O взята точка, расположенная на линии действия равнодействующей силы.

Приведение к динаме. *Динамой* в механике называют такую совокупность силы $\bar{F}$ и пары сил $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$, действующих на твердое тело, у которой сила перпендикулярна плоскости действия пары сил (рис. 74). Используя векторный момент $\bar{M}$ пары сил $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$, можно также определить динаму как *совокупность силы и пары, у которых сила параллельна векторному моменту пары сил* (рис. 75). Сила $\bar{F}$ и векторный момент пары сил $\bar{M}$ могут быть направлены как в одну, так и в противоположные стороны.

Рассмотрим теперь случай, в котором $\bar{R}\neq 0$, $\bar{L}_O\neq 0$ и векторы $\bar{L}_O$ и $\bar{R}$ не перпендикулярны. В этом случае оба инварианта не равны нулю, т. е.

$$\bar{R}\neq 0,\quad \bar{L}_O\cdot\bar{R}\neq 0.$$

Покажем, что система сил в этом случае приводится к динаме, причем элементами динамы являются сила $\bar{R}_1=\bar{R}$ и момент пары $L_1=L_O\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\bar{L}_O$ и $\bar{R}$. Действительно, после приведения системы сил к центру O получим главный вектор $\bar{R}$ и главный момент $\bar{L}_O$. Косинус угла α между ними можно определить выражая скалярное произведение векторов $\bar{L}_O$ и $\bar{R}$ в двух формах:

$$L_O R_O \cos\alpha = L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z;$$

$$\cos\alpha = \frac{L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z}{L_O R}.$$

Разложим главный момент $\bar{L}_O$ на две взаимно перпендикулярные составляющие $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$, одна из которых $\bar{L}_1$ направлена по главному вектору $\bar{R}$ (рис. 76). Имеем

$$L_1 = L_O\cos\alpha = \frac{L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z}{R};\quad L_2 = L_O\sin\alpha. \tag{6}$$

Векторный момент пары сил $\bar{L}_2$ перпендикулярен главному вектору $\bar{R}$. Такая система силы $\bar{R}$ и пары с моментом $\bar{L}_2$ приведется к одной силе $\bar{R}_1=\bar{R}$, линия действия которой находится от точки O на расстоянии

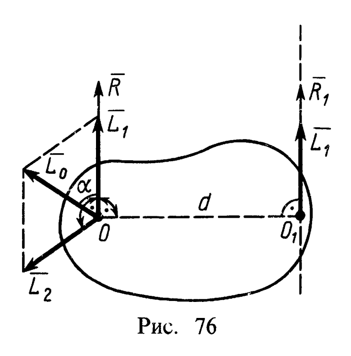


Рис. 76

$$d = \frac{L_2}{R} = \frac{L_O \sin\alpha}{R}. \qquad (7)$$

Рассматриваемая система сил заменилась эквивалентной системой сил, состоящей из силы $\bar{R}_1$ и пары сил с векторным моментом $\bar{L}_1$, который как свободный вектор можно перенести из точки O в любую точку, в том числе и точку O_1 на линии действия силы $\bar{R}_1$. Кратко результат можно выразить в форме

$$(\bar{R},\ \bar{L}_O) \backsim (\bar{R}_1,\ \bar{L}_1),$$

причем система сил $(\bar{R}_1,\ \bar{L}_1)$ является динамой. Сила $\bar{R}_1$ и векторный момент пары $\bar{L}_1$ есть элементы динамы:

$$\bar{R}_1 = \bar{R},\quad L_1 = L_O \cos\alpha = \frac{L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z}{R}. \qquad (8)$$

Линия, по которой направлена сила динамы, $\bar{R}_1$, называется **центральной винтовой осью**. Во всех точках винтовой оси, принятых за центры приведения, система сил приводится к одной и той же динаме. Расстояние от центра приведения O до центральной винтовой оси

$$d = L_O \sin\alpha / R.$$

Если брать за центры приведения точки на поверхности цилиндра, осью которого является центральная винтовая ось, то главные моменты относительно таких центров будут одинаковы по модулю и составляют одинаковый угол с образующими цилиндра. Эти главные моменты состоят из одного и того же момента $\bar{L}_1$, входящего в состав динамы, и моментов $\bar{L}_2$, перпендикулярных $\bar{L}_1$ и по числовой величине пропорциональных расстоянию центра приведения от центральной винтовой оси.

Совокупность сил, образующих динаму, можно заменить двумя скрещивающимися силами. Для этого следует одну из сил пары $\bar{R}''$ совместить с точкой приложения силы $\bar{R}_1$ и сложить с этой силой (рис. 77).

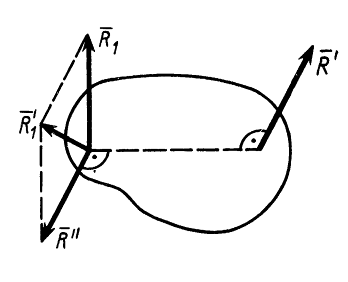


Рис. 77

Рассмотрены все возможные случаи, кроме случая равновесия системы сил ($\bar{R}=0$, $\bar{L}_O=0$), рассмотренного ранее. Таким образом убедились, что только при обращении в нуль главного вектора и главного момента система может находиться в равновесии, т. е. обращение в нуль

главного вектора и главного момента не только необходимо для равновесия системы сил, но и достаточно.

Из рассмотрения частных случаев приведения систем сил следует, что при приведении системы сил к равнодействующей силе $\bar{R}^*$ эта сила равна и параллельна главному вектору $\bar{R}$. Но линия действия равнодействующей может не проходить через центр приведения, в котором приложен главный вектор. Если главный вектор не равен нулю, то равнодействующей может и не быть, если система приводится к динаме.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ВИНТОВОЙ ОСИ

Предположим, что в центре приведения, принятом за начало координат, получены главный вектор $\bar{R}$ с проекциями на оси координат R_x, R_y, R_z и главный момент $\bar{L}_O$ с проекциями L_x, L_y, L_z. При приведении системы сил к центру приведения O_1 (рис. 78) получается динама с главным вектором $\bar{R}_1=\bar{R}$ и главным моментом $\bar{L}_{O_1}$. Векторы $\bar{L}_{O_1}$ и $\bar{R}_1$, как образующие динаму, параллельны и поэтому могут отличаться только скалярным множителем k_0. Имеем

$$\bar{L}_{O_1}=k_0\bar{R}, \tag{9}$$

так как $\bar{R}_1=\bar{R}$. Главные моменты $\bar{L}_{O_1}$ и $\bar{L}_O$, согласно (2), удовлетворяют соотношению

$$\bar{L}_{O_1}=\bar{L}_O-\overrightarrow{OO}_1\times\bar{R}. \tag{2'}$$

Подставляя $\bar{L}_{O_1}$ из (2′) в (9), получим

$$\bar{L}_O-\overrightarrow{OO}_1\times\bar{R}=k_0\bar{R}. \tag{9'}$$

Координаты точки O_1, в которой получена динама, обозначим x, y, z. Тогда проекции вектора $\overrightarrow{OO}_1$ на оси координат равны координатам x, y, z. Учитывая это, (9′) можно выразить в форме

$$\left(L_x\bar{i}+L_y\bar{j}+L_z\bar{k}\right)-\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ x&y&z\\ R_x&R_y&R_z\end{vmatrix}=k_0\left(R_x\bar{i}+R_y\bar{j}+R_z\bar{k}\right), \tag{9''}$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы осей координат, а векторное произведение $\overrightarrow{OO}_1\times\bar{R}$ представлено определителем. Векторное уравнение (9″) эквивалентно трем скалярным, которые после отбрасывания k_0 можно представить в виде

$$\frac{L_x-(yR_z-zR_y)}{R_x}=\frac{L_y-(zR_x-xR_z)}{R_y}=\frac{L_z-(xR_y-yR_x)}{R_z}. \tag{10}$$

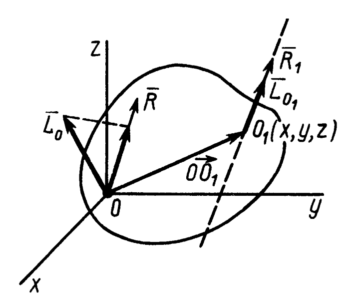


Рис. 78

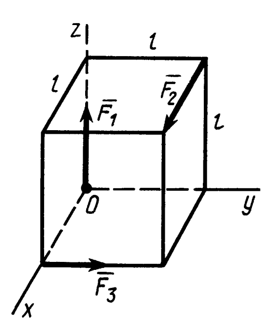


Рис. 79

Линейные уравнения (10) для координат x, y, z являются уравнениями прямой линии — центральной винтовой оси. Следовательно, существует прямая, в точках которой система сил приводится к динаме.

Пример 1. По ребрам куба с длиной стороны $l=3$ м действуют силы $F_1=F_2=2$ Н, $F_3=1$ Н (рис. 79). Привести систему сил $\bar F_1$, $\bar F_2$, $\bar F_3$ к простейшему виду.

Решение. Выберем точку O — начало координат — за центр приведения сил и вычислим главный вектор $\bar R$ и главный момент $\bar L_O$. Для проекций этих векторов на оси координат имеем:

$$R_x=\sum_i F_{ix}=F_2=2\text{ Н};\quad R_y=\sum_j F_{iy}=F_3=1\text{ Н};$$

$$R_z=\sum_i F_{iz}=F_1=2\text{ Н};\quad L_x=\sum_i M_x(\bar F_i)=0;$$

$$L_y=\sum_i M_y(\bar F_i)=F_2 l=6\text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$L_z=\sum_i M_z(\bar F_i)=F_3 l-F_2 l=-3\text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Величины главного вектора и главного момента имеют значения

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{9}=3\text{ Н};\quad L_O=\sqrt{L_x^2+L_y^2+L_z^2}=\sqrt{45}=6{,}8\text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определим угол α между векторами $\bar L_O$ и $\bar R$. Для этого образуем их скалярное произведение, которое выразим в двух следующих формах:

$$\bar L_O\cdot\bar R=L_O R\cos\alpha=L_x R_x+L_y R_y+L_z R_z,$$

или

$$\sqrt{45}\cdot 3\cdot\cos\alpha=0\cdot 2+6+1+(-3)\cdot 2.$$

Отсюда получаем $\cos\alpha=0$, т. е. векторы $\bar L_O$ и $\bar R$ перпендикулярны. Система сил в этом случае приводится к равнодействующей, которая по величине и направлению равна главному вектору, т. е. $\bar R^*=\bar R$, $R^*=R=3$ Н.

Кратчайшее расстояние от точки O (рис. 80) до линии действия равнодействующей вычислим по формуле

$$d=L_O/R=6{,}8/3\approx 2{,}3\text{ м}.$$

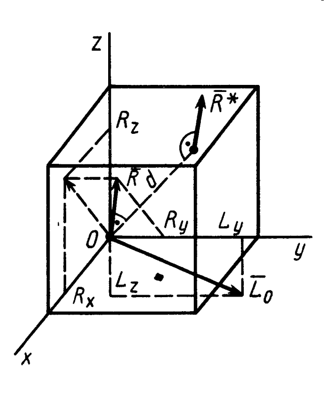


Рис. 80

Пример 2. К балке AB, один конец которой заделан в сечении A, в точке B приложена вертикальная сила $\bar P$ (рис. 81, *а*). К балке AB в сечении C под прямым углом жестко прикреплена балка CD. В концевом сечении балки CD в плоскости, параллельной координатной плоскости Ayz, действует пара сил с моментом $M=Pa$. Размеры тел и направление вращения пары сил указаны на рисунке. Определить силу и момент пары сил в заделке.

Решение. Рассматриваемые вместе балки AB и CD освобождаем от связей. Заделка для пространственной системы сил создает неизвестную силу $\bar R_A$ с проекциями на оси координат X_A, Y_A, Z_A и пару сил с векторным моментом $\bar M_A$, проекции которого на координатные оси — M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az} (рис. 81, *б*).

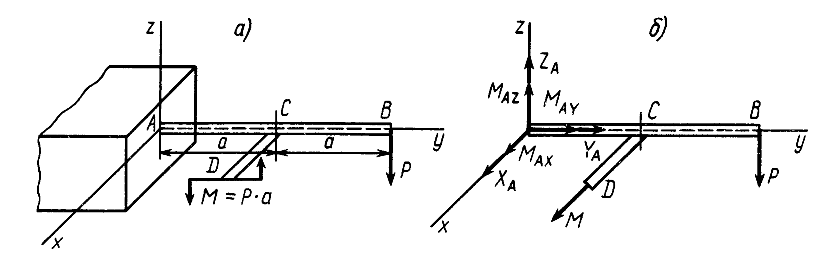


Рис. 81

В общем случае имеем шесть неизвестных. Для их определения составляем шесть условий равновесия пространственной системы сил. При проецировании сил на оси координат пары сил учитывать не надо, так как сумма проекций пары сил на любую ось равна нулю. В уравнения равновесия для моментов сил относительно осей координат следует включать проекции векторных моментов пар сил на эти оси. Для удобства проецирования пару сил в концевом сечении балки CD представим ее векторным моментом $\bar{M}$, который в рассматриваемом случае направлен по балке CD параллельно оси Ax.

Составляем условия равновесия:

$$\sum_i F_{ix}=0;\quad X_A=0;$$

$$\sum_i F_{iy}=0;\quad Y_A=0;$$

$$\sum_i F_{iz}=0;\quad Z_A-P=0;$$

$$\sum_i M_x(\bar{F}_i)=0;\quad M_{Ax}-P\cdot 2a+M=0;$$

$$\sum_i M_y(\bar{F}_i)=0;\quad M_{Ay}=0;$$

$$\sum_i M_z(\bar{F}_i)=0;\quad M_{Az}=0.$$

Учитывая, что $M=Pa$, имеем:

$$X_A=0;\quad Y_A=0;\quad Z_A=P;$$

$$M_{Ax}=Pa;\quad M_{Ay}=0;\quad M_{Az}=0.$$

Задача считается решенной, если определены проекции неизвестных силы $\bar{R}_A$ и момента пары сил $\bar{M}_A$ на какие-либо прямоугольные оси координат.

Пример 3. Изогнутый под прямым углом стержень $ABDC$ находится в горизонтальной плоскости. Стержень закреплен с помощью подпятника A и подшипника B (рис. 82). На стержень под прямым углом жестко насажен диск радиуса $R=0{,}5$ м. В плоскости диска по касательной действует сила $\bar{S}$ под углом $\gamma=30°$ к вертикали. В точке C стержня приложена сила $P=20$ кН под углом $\alpha=60°$ к вертикали и углом $\beta=60°$ к линии CK, которая находится в плоскости Axz.

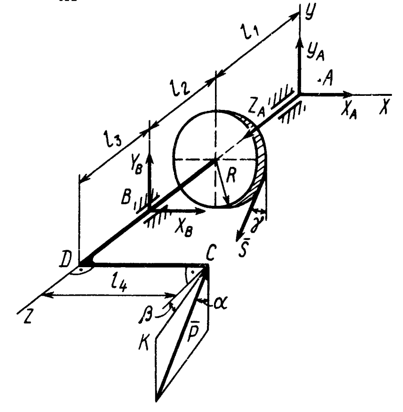


Рис. 82

Определить силы реакций подпятника и подшипника, а также значение силы S, необходимой для равновесия, если $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1$ м, $l_3 = 0{,}5$ м, $l_4 = 1{,}5$ м.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня $ABDC$ вместе с диском. На эту систему тел действуют силы $\bar{P}$, $\bar{S}$; реакция в подпятнике с составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$; реакция в подшипнике с составляющими $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$, которые предполагаем направленными в положительные стороны осей координат.

Составим шесть условий равновесия для сил. Для проекций сил на оси координат имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_{ix} = 0;\ X_A + X_B - P\sin\alpha\sin\beta - S\sin\gamma = 0; \\ \Sigma F_{iy} = 0;\ Y_A + Y_B + P\cos\alpha - S\cos\gamma = 0; \\ \Sigma F_{iz} = 0;\ Z_A - P\sin\alpha\cos\beta = 0. \end{array}\right\} \qquad (\text{а})$$

При определении проекций силы $\bar{P}$ на оси координат предварительно раскладываем ее на две перпендикулярные составляющие, одна из которых параллельна оси Oy и имеет проекцию на эту ось $P_y = P\cos\alpha$. Перпендикулярная составляющая расположится в плоскости Axz и будет иметь величину проекции на эту плоскость

$$P_{xz} = P\sin\alpha.$$

Силу P_{xz} как вектор проецируем на оси координат Ax и Az. Имеем

$$P_x = -P_{xz}\sin\beta = -P\sin\alpha\sin\beta;$$

$$P_z = P_{xz}\cos\beta = P\sin\alpha\cos\beta.$$

Для моментов сил относительно осей координат получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma M_x(\bar{F}_i) = 0;\quad -Y_B(l_1 + l_2) + S\cos\gamma\, l_1 - P\cos\alpha\,(l_1 + l_2 + l_3) = 0; \\ \Sigma M_y(\bar{F}_i) = 0;\quad X_B(l_1 + l_2) - S\sin\gamma\, l_1 - \\ \quad - P\sin\alpha\cos\beta\, l_4 - P\sin\alpha\sin\beta\,(l_1 + l_2 + l_3) = 0; \\ \Sigma M_z(\bar{F}_i) = 0;\quad -SR + P\cos\alpha\, l_4 = 0. \end{array}\right\} \qquad (\text{б})$$

При вычислении момента силы относительно оси координат, согласно определению, проецируем силу на плоскость, перпендикулярную оси, и затем вычисляем момент проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью. Силы, параллельные оси или ее пересекающие, дают моменты относительно этой оси, равные нулю. При определении момента силы $\bar{S}$ относительно осей координат раскладываем ее на составляющие, параллельные осям координат, вычисляем на основании теоремы Вариньона моменты каждой из составляющих относительно соответствующих осей координат и складываем их алгебраически. Значения составляющих сил равны проекциям этих сил на оси координат и их можно взять из уравнений (а). Аналогично вычисляются моменты силы $\bar{P}$.

Решая систему линейных уравнений (а) и (б) относительно проекций неизвестных сил, можно определить все неизвестные силы.

Подставляя в уравнения (а) и (б) заданные значения сил, расстояний и углов, получим:

$$X_A + X_B - 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - S\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

$$Y_A + Y_B + 20\cdot\frac{1}{2} - S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$Z_A - 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

$$-Y_B\cdot 2 + 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 - 20\cdot\frac{1}{2}\cdot 2{,}5 = 0,$$

$$X_B \cdot 2 - S \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2{,}5 = 0,$$

$$-S \cdot 0{,}5 + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, имеем:

$$S = 30 \text{ кН}; \quad X_B = 32{,}6 \text{ кН}; \quad X_A = 2{,}6 \text{ кН};$$

$$Y_B = 0{,}5 \text{ кН}; \quad Y_A = 15{,}4 \text{ кН}.$$

§ 5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

В отличие от произвольной системы сил пространственная система параллельных сил не приводится к динаме, так как для нее главный вектор и главный момент в общем случае взаимно перпендикулярны. Для доказательства этого рассмотрим пространственную систему параллельных сил, для которой главный вектор и главный момент не равны нулю. Выберем за центр приведения точку O — начало декартовой системы координат, ось Oz которой направим параллельно силам (рис. 83). Тогда проекции главного вектора на оси координат

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \equiv 0; \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \equiv 0,$$

так как параллельные силы перпендикулярны этим осям. Только проекция главного вектора на ось Oz в общем случае не равна нулю. Она равна алгебраической сумме параллельных сил, т. е.

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} F_i \neq 0.$$

Следовательно, главный вектор $\bar{R}$ параллелен оси Oz.

Для проекций главного момента на оси координат имеем:

$$L_x = \sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i) \neq 0; \quad L_y = \sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i) \neq 0; \quad L_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i) \equiv 0.$$

Проекция главного момента на ось Oz равна нулю, так как каждая сила параллельна этой оси.

Таким образом, главный момент расположен в плоскости Oxy, перпендикулярной главному вектору, направленному по оси Oz. В этом случае система сил приводится к равнодействующей.

Для системы параллельных сил возможны следующие частные случаи приведения:

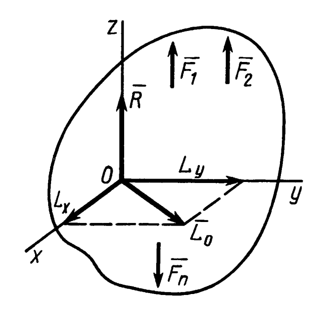


Рис. 83

$$\bar{R}=0, \quad \bar{L}_O \neq 0$$

— система приводится к паре сил;

$$\bar{R} \neq 0, \quad \bar{L}_0=0$$

или

$$\bar{R} \neq 0, \quad \bar{L}_0 \neq 0$$

— система приводится к равнодействующей силе;

$$\bar{R}=0, \quad \bar{L}_O=0$$

— имеем равновесную систему сил.

Если главный вектор не равен нулю, то система параллельных сил приводится только к равнодействующей силе, параллельной главному вектору и равной ему по величине.

§ 6. ЦЕНТР СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Для систем параллельных сил, приводящихся к равнодействующей, введем понятие центра параллельных сил. Для этого предположим, что на твердое тело действует система параллельных сил ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$), приводящаяся к равнодействующей, силы которой приложены в точках A_1, A_2, ..., A_n. При введении понятия центра параллельных сил считаем силы приложенными в точках твердого тела. При переносе сил вдоль линий действия положение центра параллельных сил изменяется.

Определим линию действия равнодействующей $\bar{R}^*$ параллельных сил для заданного направления этих сил. Затем через точки приложения параллельных сил проведем взаимно параллельные оси, перпендикулярные силам. Повернем параллельные силы вокруг этих осей на общий угол в одном и том же направлении (рис. 84). Получим новую систему параллельных сил ($\bar{F}'_1$, $\bar{F}'_2$, ..., $\bar{F}'_n$). Равнодействующая этой системы параллельных сил $\bar{R}^{*\prime}$ равна по модулю равнодействующей силе $\bar{R}^*$, так как при повороте числовые значения параллельных сил не изменялись.

Линии действия двух равнодействующих сил $\bar{R}^*$ и $\bar{R}^{*\prime}$ пересекутся в точке C, которая и называется *центром параллельных сил.* Если равнодействующую силу $\bar{R}^*$ приложить в точке C вместо C_1, то при повороте заданных параллельных сил ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$) на угол α она повернется на тот же угол α вокруг оси, проходящей через точку C и параллельной осям, вокруг которых поворачиваются заданные параллельные силы. Оси поворота параллельных сил должны быть перпендикулярны параллельным силам.

Центр параллельных сил не зависит от угла поворота и направления параллельных осей, вокруг которых поворачиваются параллельные силы. Из определения центра параллельных

сил следует, что его положение зависит от точек приложения параллельных сил. Поэтому параллельные силы следует считать приложенными в точках твердого тела.

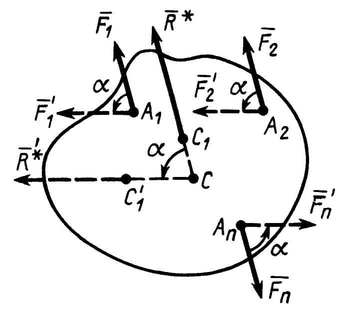


Рис. 84

Получим формулу для определения радиуса-вектора центра параллельных сил, если известны параллельные силы и радиусы-векторы точек их приложения. Для этого выберем единичный вектор $\bar{l}$, параллельный силам. Тогда каждая из параллельных сил

$$\bar{F}_i = F_i \bar{l},$$

где F_i — алгебраическое значение силы. Оно положительно, если сила $\bar{F}_i$ направлена в одну сторону с единичным вектором $\bar{l}$, и отрицательно, если направление силы противоположно направлению единичного вектора.

Для равнодействующей силы параллельных сил соответственно имеем

$$\bar{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{l} \sum_{i=1}^{n} F_i.$$

Так как система параллельных сил, по предположению, приводится к равнодействующей, то к ней можно применить теорему Вариньона относительно точки O:

$$\bar{M}_O(\bar{R}^*) = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{F}_i). \tag{11}$$

Для векторных моментов сил относительно точки O имеем

$$\bar{M}_O(\bar{R}^*) = \bar{r}_C \times \bar{R}^* = \bar{r}_C \times \bar{l} \sum_{i=1}^{n} F_i; \quad \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{r}_i \times \bar{l} F_i,$$

где $\bar{r}_C$ — радиус-вектор центра параллельных сил, проведенный из точки O; $\bar{r}_i$ — радиус-вектор точки приложения силы $\bar{F}_i$, проведенный из той же точки (рис. 85).

Если подставить эти значения векторных моментов сил в (11), то после переноса всех слагаемых в левую часть равенства и вынесения за скобку общего множителя $\bar{l}$ получим

$$\left(\bar{r}_C \sum_{i=1}^{n} F_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i\right) \times \bar{l} = 0. \tag{11'}$$

Так как центр параллельных сил, а следовательно, и его радиус-вектор не зависят от направления параллельных сил, характеризуемого единичным вектором $\bar{l}$, то условие (11′) должно выполняться при любом направлении этого вектора.

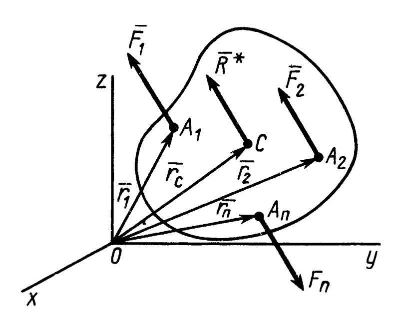


Рис. 85

Это возможно только при обращении в нуль векторной величины, стоящей в скобках, т. е.

$$\bar{r}_C \sum_{i=1}^{n} F_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i = 0,$$

или

$$\bar{r}_C = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} F_i. \qquad (12)$$

По формуле (12) определяют радиус-вектор центра параллельных сил, если заданы эти силы и их точки приложения.

Так как алгебраические значения параллельных сил входят в числитель и в знаменатель (12), то $\bar{r}_C$ не зависит от того, какое из двух направлений параллельных сил считается положительным.

В проекциях на оси координат из (12) получаем:

$$x_C = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} F_i; \quad y_C = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} F_i;$$

$$z_C = \sum_{i=1}^{n} z_i F_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} F_i. \qquad (13)$$

По формулам (13) вычисляют координаты центра параллельных сил x_C, y_C, z_C, если известны алгебраические значения параллельных сил F_i и координаты точек приложения этих сил x_i, y_i, z_i.

Векторную величину

$$\bar{S}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i$$

называют *статическим моментом* системы параллельных сил *относительно точки O*. Алгебраические величины

$$S_{Oyz} = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i; \quad S_{Oxz} = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i; \quad S_{Oxy} = \sum_{i=1}^{n} z_i F_i$$

называют *статическими моментами* относительно *координатных плоскостей*. Для плоской системы параллельных сил, расположенных, например, в плоскости Oxy, вводят понятие статических моментов относительно осей координат Ox и Oy по формулам

$$S_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i; \qquad S_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i.$$

Статические моменты параллельных сил относительно точки и координатных плоскостей определяются по единому правилу:

алгебраические значения сил умножают на расстояния от точек приложения сил до точки или плоскости и результаты суммируют. Расстояния от точек приложения сил до координатных плоскостей есть величины скалярные; это соответствующие координаты этих точек. Расстояния от точки O до точек приложения параллельных сил берутся векторные. Ими являются радиусы-векторы точек приложения параллельных сил, проведенные из точки O.

§ 7. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Равновесие твердого тела с двумя закрепленными точками

Твердое тело с двумя закрепленными точками A и B имеет неподвижную ось вращения, проходящую через эти точки. Пусть тело находится в равновесии под действием приложенных сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$. Освободим тело от связей, приложив в закрепленных точках A и B, рассматриваемых как шаровые шарниры без трения, не известные по модулю и направлению силы реакций $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$. Эти силы разложим на составляющие, параллельные осям координат $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ и $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$, $\bar{Z}_B$, и для освобожденного от связей тела составим шесть условий равновесия сил. Обозначив AB через h (рис. 86), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}+X_A+X_B=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i)-Y_B h=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}+Y_A+Y_B=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i)+X_B h=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}+Z_A+Z_B=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i)=0.$$

Пять первых уравнений содержат неизвестные реакции закрепленных точек, поэтому их называют *уравнениями равновесия.* В последнее (шестое) уравнение входят только заданные силы и не входят неизвестные силы реакций. Такие соотношения, которым должны удовлетворять при равновесии тела только одни заданные силы, называют *условиями равновесия.* Тело в рассматриваемом случае имеет одну степень свободы, оно может только вращаться вокруг оси Oz (ось AB). Приложенные силы удовлетворяют тоже одному

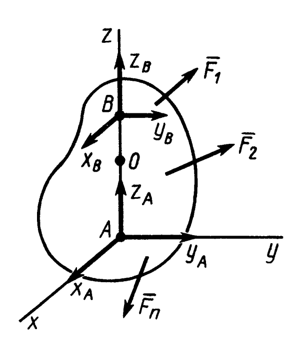


Рис. 86

условию равновесия. Сумма моментов заданных сил относительно оси Oz обращается в ноль. В остальном приложенные силы могут быть любыми. Изменяя систему приложенных сил так, чтобы они удовлетворяли при этом условию равновесия, получим в соответствии с уравнениями равновесия каждый раз свои силы реакций.

Неизвестных реакций шесть, а уравнений для их определения только пять и, следовательно, только пять неизвестных можно определить. Из рассмотрения уравнений равновесия убеждаемся, что нельзя по отдельности определить Z_A и Z_B, можно определить только их сумму Z_A+Z_B. Задача нахождения сил реакций является статически неопределимой. Для того чтобы ее сделать статически определимой, в одной из точек вместо шарового следует установить цилиндрический шарнир. Если цилиндрический шарнир поместить в точке A, то $Z_A=0$, так как реакция цилиндрического шарнира перпендикулярна его оси; в рассматриваемом случае перпендикулярна оси Oz. После этого неизвестных реакций останется только пять. Столько же уравнений имеется для их определения.

Твердое тело с одной закрепленной точкой

Тело с одной закрепленной точкой имеет три степени свободы. Оно, например, может вращаться вокруг каждой из трех осей координат, проходящих через закрепленную точку. Если твердое тело с одной закрепленной точкой A, принимаемой за шарнир, освободить от этой связи, то для составляющих силы реакций связи $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ и приложенных к телу сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$ можно составить следующие шесть условий (рис. 87):

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}+X_A=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i)=0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}+Y_A=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i)=0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}+Z_A=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i)=0.$$

В этом случае имеем три уравнения равновесия с тремя неизвестными. Задача статически определима. Приложенные силы удовлетворяют тоже трем условиям равновесия, т. е. равны нулю суммы моментов приложенных сил относительно каждой из трех осей координат. В эти условия не входят неизвестные силы реакций. Существует много разных систем сил, удовлетворяющих этим трем условиям. Для каждой из таких систем приложенных сил получим свои реакции связи.

В рассмотренных двух случаях число условий равновесия, которым должны удовлетворять заданные силы при равновесии

твердого тела, совпало с числом степеней свободы этого тела. Это справедливо и для свободного твердого тела, у которого шесть степеней свободы и соответственно шесть условий равновесия для сил. При изучении аналитической статики, которая излагается вместе с аналитической динамикой (в одной главе), увидим, что число степеней свободы не только для твердого тела, но и для механических систем совпадает с числом условий равновесия для заданных сил, если связи, наложенные на систему, удовлетворяют некоторым специальным условиям.

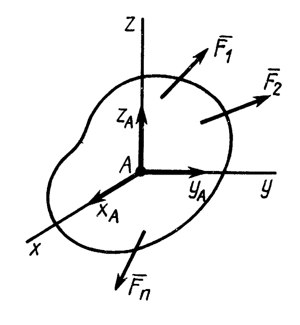


Рис. 87

ГЛАВА 8

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

При рассмотрении движения тел, особенно таких, как самолеты, ракеты, космические корабли, важное значение имеет понятие центра тяжести.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ

Для введения понятия центра тяжести разобьем мысленно рассматриваемое тело на достаточно большое число малых по сравнению с телом или элементарных его частей произвольной формы. Силу тяжести элементарной частицы тела с индексом i от действия на нее Земли обозначим через ΔP_i, а силу тяжести всего тела — через P. Силы тяжести элементарных частиц тела направлены приближенно к центру Земли, т. е. образуют систему сходящихся сил. Если размеры рассматриваемого тела малы по сравнению с размерами земного шара, то силы тяжести элементарных частиц тела можно считать системой параллельных сил, направленных в одну сторону. *Центром тяжести тела называют центр системы параллельных сил, которую приближенно образуют силы тяжести его элементарных частиц.*

Радиус-вектор центра тяжести тела $\bar{r}_C$ вычисляем как радиус-вектор центра параллельных сил (рис. 88) по формуле

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta P_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta P_i}{P}, \quad (1)$$

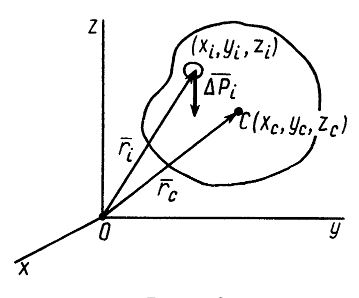


Рис. 88

где $\bar{r}_i$ — радиус-вектор точки приложения силы тяжести элементарной части тела, принятой за точку; ΔP_i — сила тяжести элементарной частицы; $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i$ — сила тяжести всего тела; n — число частей, на которое мысленно разбито все тело. Центр тяжести является точкой приложения равнодействующей силы тяжести, если силы тяжести отдельных его частей считать системой параллельных сил.

Если в (1) перейти к пределу, увеличивая число элементарных частей n до бесконечности, то после замены ΔP_i дифференциалом $\mathrm{d}P$, а суммы — интегралом получим

$$\bar{r}_C=\frac{\int \bar{r}\,\mathrm{d}P}{\int \mathrm{d}P}=\frac{\int \bar{r}\,\mathrm{d}P}{P}, \qquad (1')$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор элементарной части тела, принятой за точку. В проекциях на оси координат из (1) и (1′) получаем:

$$x_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Delta P_i}{P}, \quad y_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\Delta P_i}{P}, \quad z_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i\Delta P_i}{P},$$

$$x_C=\frac{\int x\,\mathrm{d}P}{P}, \quad y_C=\frac{\int y\,\mathrm{d}P}{P}, \quad z_C=\frac{\int z\,\mathrm{d}P}{P},$$

где x_C, y_C, z_C — координаты центра тяжести; x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения силы тяжести $\Delta\bar{P}_i$.

Используя понятие центра тяжести тела, введем понятие его ц е н т р а м а с с. Силы тяжести элементарных частей тела и всего тела можно выразить через их массы Δm_i и M и ускорение силы тяжести g с помощью формул

$$\Delta P_i=\Delta m_i g, \qquad P=Mg.$$

Подставляя эти значения сил тяжести в (1) и (1′) после сокращения на g, которое принимаем одинаковым для всех частей тела, имеем

$$\bar{r}_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{r}_i\Delta m_i}{M} \qquad (2)$$

и соответственно

$$\bar{r}_C=\frac{\int \bar{r}\,\mathrm{d}m}{M}. \qquad (2')$$

По формулам (2) и (2′) определяют *радиус-вектор центра масс тела.* Центр масс обычно определяют независимо от центра тяжести как геометрическую точку, радиус-вектор

которой вычисляется по формулам (2) или (2′). В проекциях на оси координат из (2) и (2′) получаем:

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\Delta m_i}{M},\quad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\Delta m_i}{M},\quad z_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i\Delta m_i}{M}$$

и

$$x_C=\frac{\int x\mathrm{d}m}{M},\quad y_C=\frac{\int y\mathrm{d}m}{M},\quad z_C=\frac{\int z\mathrm{d}m}{M},$$

где x_C, y_C, z_C — координаты центра масс тела.

Для однородного тела силу тяжести элементарной частицы тела и её массу можно вычислить по формулам

$$\Delta P_i=\gamma_v\Delta v_i,\qquad \Delta m_i=\rho_v\Delta v_i,$$

где Δv_i — объем элементарной частицы тела; γ_v и ρ_v — соответственно удельный вес и плотность тела. Сила тяжести и масса всего тела

$$P=\gamma_v v,\qquad M=\rho_v v,$$

где v — объем тела. Подставляя эти значения в (2) и (2′), после сокращения на γ_v и ρ_v соответственно получим формулы

$$\bar{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i\Delta v_i}{v},\qquad \bar{r}_C=\frac{\int \bar{r}\mathrm{d}v}{v},$$

по которым определяют центр тяжести объема тела.

Если тело имеет форму поверхности, т. е. один из размеров мал по сравнению с двумя другими, как, например, у тонкого листа железа, то имеем

$$\Delta P_i=\gamma_S\Delta S_i,\qquad P=\gamma_S S,$$

где γ_S — удельный вес; ΔS_i — площадь элементарной частицы поверхности; S — площадь всей поверхности. После сокращения на γ_S для однородной поверхности получим следующие формулы для определения центра тяжести ее площади:

$$\bar{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i\Delta S_i}{S},\qquad r_C=\frac{\int \bar{r}\mathrm{d}S}{S}.$$

Для однородных тел типа проволоки, у которых два размера малы по сравнению с третьим, можно определить радиус-вектор центра тяжести длины линии по формулам

$$\bar{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i\Delta l_i}{l},\qquad \bar{r}_C=\frac{\int \bar{r}\mathrm{d}l}{l},$$

где Δl_i — длина элемента линии; l — общая длина линии, центр тяжести которой определяется.

§ 2. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ (ЦЕНТРОВ МАСС)

1. Метод симметрии. При определении центров тяжести широко используется симметрия тел. Докажем, что *для однородного тела, имеющего плоскость симметрии, центр тяжести находится в плоскости симметрии.* Для доказательства выберем начало координат в плоскости симметрии тела и одну из осей координат, ось Oz направим перпендикулярно плоскости симметрии, а две других оси расположатся в плоскости симметрии (рис. 89). Каждая частица массой Δm_i, находясь по одну сторону плоскости симметрии, имеет симметричную частицу такой же массы по другую сторону этой плоскости. Координаты x_i, y_i у симметричных частиц одинаковы при сделанном выборе осей координат, а координаты по оси Oz отличаются только знаком. Для координаты центра масс z_C имеем следующее выражение:

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i}{M}.$$

Разбивая сумму в числителе на две по симметричным частям тела, получаем, что

$$z_C = \frac{\sum_{(1)} z_i \Delta m_i - \sum_{(2)} z_i \Delta m_i}{M} = 0,$$

так как симметричные части тела *1* и *2* одинаковы.

Таким образом, центр масс расположен в плоскости симметрии и для его определения достаточно вычислить только две его координаты x_C и y_C в этой плоскости.

Аналогично доказывается, что *для однородного тела, имеющего ось или центр симметрии, центр масс находится соответственно на оси симметрии или в центре симметрии.*

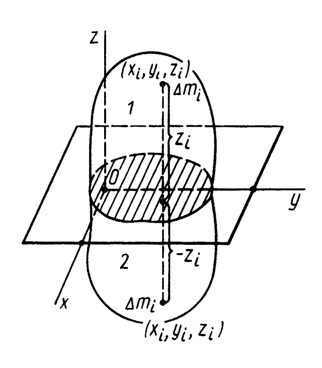


Рис. 89

2. Метод разбиения на части (метод группировки). Некоторые тела сложной формы можно разбить на части, центры тяжести которых известны или предварительно могут быть определены. В таких случаях центры тяжести сложных тел вычисляются по общим формулам, определяющим центр тяжести, только вместо элементарных частиц тела берутся его конечные части, на которые оно разбито. Покажем это на частном примере плоской фигуры, изображенной на рис. 90. Плоскую фигуру можно разбить на три

части, центры тяжести которых C_1, C_2 и C_3 известны. Они находятся на пересечении диагоналей прямоугольников. Их радиусы-векторы обозначим $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ и площади S_1, S_2, S_3. Общая площадь сложной фигуры будет $S = S_1 + S_2 + S_3$.

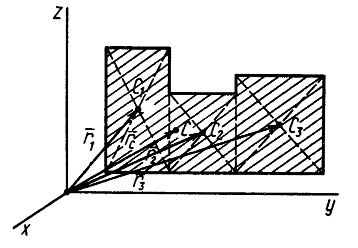


Рис. 90

Используя определение центра тяжести и производя группировку слагаемых под знаком суммы по частям фигуры, на которые она разбита, получим

$$\bar{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta S_i}{S} = \frac{\sum\limits_{(1)} \bar{r}_i \Delta S_i + \sum\limits_{(2)} \bar{r}_i \Delta S_i + \sum\limits_{(3)} \bar{r}_i \Delta S_i}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

Радиусы-векторы центров тяжести частей тела выразятся в такой форме:

$$\bar{r}_1 = \frac{\sum\limits_{(1)} \bar{r}_i \Delta S_i}{S_1}, \quad \bar{r}_2 = \frac{\sum\limits_{(2)} \bar{r}_i \Delta S_i}{S_2}, \quad \bar{r}_3 = \frac{\sum\limits_{(3)} \bar{r}_i \Delta S_i}{S_3},$$

или

$$\sum_{(1)} \bar{r}_i \Delta S_i = \bar{r}_1 S_1, \quad \sum_{(2)} \bar{r}_i \Delta S_i = \bar{r}_2 S_2, \quad \sum_{(3)} \bar{r}_i \Delta S_i = \bar{r}_3 S_3.$$

Используя эти формулы для радиуса-вектора всей фигуры, имеем

$$\bar{r}_C = \frac{\bar{r}_1 S_1 + \bar{r}_2 S_2 + \bar{r}_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}. \tag{3}$$

Полученная формула имеет ту же структуру, что и формула, определяющая радиус-вектор центра тяжести тела при разбиении его на элементарные частицы, только в нее входят величины для конечных частей тела.

3. Метод отрицательных масс. Видоизменением метода разбиения на части является метод отрицательных масс. Проиллюстрируем его тоже на примере плоской фигуры (рис. 91). Для определения центра тяжести этой фигуры ее можно разбить на три части. Можно поступить по-другому. Для этого дополним нашу фигуру до прямоугольника и примем, что этот прямоугольник с площадью S_1 и центром масс C_1 полностью заполнен массой (имеет положительную площадь). На той части фигуры, которую добавили, следует распределить отрицательную массу (отрицательную

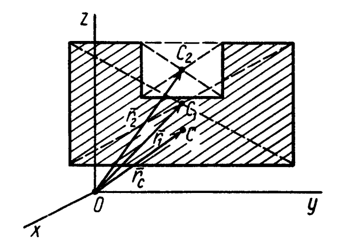


Рис. 91

площадь) той же плотности. Площадь этой фигуры с отрицательной массой обозначим S_2, а ее центр масс — C_2. Применяя метод разбиения на части, радиус-вектор заданной фигуры определим по формуле

$$\bar{r}_C = \frac{\bar{r}_1 S_1 + \bar{r}_2(-S_2)}{S_1 + (-S_2)}. \tag{4}$$

В отличие от обычного метода разбиения на части в формуле (4) массы и, следовательно, площади входят со знаком минус.

Метод отрицательных масс особенно удобен при вычислении положения центров тяжести тел, имеющих отверстия.

§ 3. ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ ПРОСТЕЙШИХ ТЕЛ

Для определения центров тяжести тел сложной формы методом разбиения на части или методом отрицательных масс необходимо уметь вычислять центры тяжести простейших тел, на которые разбивается тело сложной формы. Рассмотрим некоторые из тел, для определения центров тяжести которых известны простые способы их нахождения или вычисления по формулам.

1. Прямолинейный отрезок. Центр тяжести прямолинейного однородного отрезка располагается на его середине, а неоднородного — на само́м отрезке и не может находиться вне отрезка.

2. Площадь треугольника. Для определения центра тяжести площади треугольника разобьем его прямыми линиями, параллельными одной из его сторон AD, на полоски, которые в пределе можно принять за прямолинейные отрезки (рис. 92). Центры тяжести отрезков и, следовательно, полосок находятся посередине полоски. Все они расположатся на медиане C_1B. В пределе центры тяжести полосок непрерывно покроют медиану, но не равномерно, так как площади полосок разные. В каждом центре масс полоски следует считать сосредоточенной массу или площадь этой полоски, пропорциональную длине полоски, если ширину полосок выбирать одинаковой.

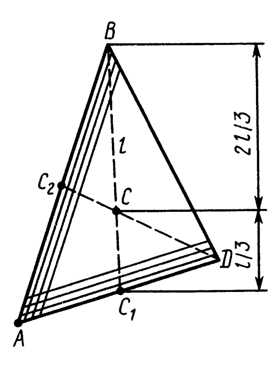


Рис. 92

Затем разобьем треугольник на полоски прямыми линиями, параллельными другой стороне AB треугольника. Центры их тяжести в пределе покроют неравномерно медиану C_2D. Центры тяжести неоднородных прямолинейных отрезков C_1B и C_2D должны располагаться на этих отрезках, а следовательно, в точке их пересечения C, являющейся точкой пересечения медиан треугольника. Эта точка делит медианы в отношении 1 к 2, т. е. если длина медианы C_1B равна l, то $C_1C = {}^1/_3 l$, $CB = {}^2/_3 l$.

3. Дуга окружности. Дуга окружности AB определяется радиусом R и стягиваемым ею центральным углом 2α (рис. 93). Она имеет ось симметрии, делящую угол пополам. Центр тяжести находится на оси симметрии дуги, которую примем за ось координат Ox. Координату центра тяжести дуги AB вычисляем по формуле



Рис. 93

$$OC = x_C, \qquad x_C = \frac{\int_A^B x \, dl}{l}.$$

В рассматриваемом случае

$$l = R \cdot 2\alpha, \quad x = R\cos\varphi, \quad dl = R\,d\varphi.$$

Подставляя эти значения в формулу для x_C, получим

$$OC = \frac{1}{R \cdot 2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R^2 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \sin\varphi \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} =$$

$$= \frac{R}{2\alpha} \left[\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right] = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$OC = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{5}$$

Для полуокружности $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Приняв $\pi = \frac{22}{7}$, получим:

$$OC = R\frac{1}{\pi/2} = \frac{2R}{\pi} = \frac{7}{11}R > \frac{R}{2}.$$

4. Площадь кругового сектора. Центр тяжести площади кругового сектора с радиусом R и центральным углом 2α находится на оси симметрии, принимаемой за ось Ox (рис. 94). Разобьем сектор на элементарные треугольники одинаковой величины. Центры тяжести треугольников в пределе при увеличении их числа до бесконечности равномерно покроют дугу окружности радиусом $r = \frac{2}{3}R$. Используя формулу для центра тяжести дуги окружности, получим

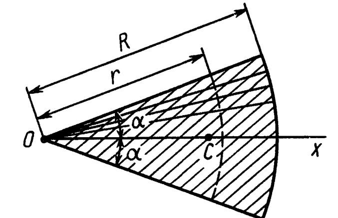


Рис. 94

$$OC = r\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

или

$$OC=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (6)$$

Для площади полукруга $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=1$. При $\pi=\frac{22}{7}$ получим

$$OC=\frac{2}{3}R\frac{1}{\pi/2}=\frac{4R}{3\pi}=\frac{14}{33}R<\frac{R}{2}.$$

5. Объем пирамиды и конуса. Определим положение центра тяжести объема конуса (рис. 95). Для простоты рассмотрим прямой конус, у которого высота является осью симметрии. Высотой конуса является отрезок, соединяющий его вершину O с центром тяжести площади основания C_1. Выберем начало координат в вершине конуса, а ось Oz направим по оси симметрии конуса. Тогда центр тяжести объема конуса расположится на оси Oz.

Разобьем конус плоскостями, перпендикулярными оси Oz, на элементарные тонкие диски толщиной $\mathrm{d}z$ и площадью S_z. Все полученные сечения (диски) конуса подобны его основанию. Координату z_C центра тяжести объема конуса вычислим по формуле

$$z_C=\frac{\int z\mathrm{d}v}{v}.$$

Отношения линейных размеров сечений к соответствующим размерам основания конуса пропорциональны их расстояниям до вершины конуса. Отношения площадей пропорциональны квадратам расстояний. Приняв $OC_1=h$, получим

$$\frac{S_z}{S}=\frac{z^2}{h^2}, \qquad S_z=\frac{S}{h^2}z^2.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{d}v=S_z\mathrm{d}z, \qquad v=\frac{1}{3}Sh,$$

имеем

$$z_C=\frac{\int_0^h z\frac{S}{h^2}z^2\mathrm{d}z}{{}^1/_3Sh}=\frac{3}{h^3}\int_0^h z^3\mathrm{d}z=\frac{3}{4}h,$$

или

$$OC={}^3/_4h. \qquad (7)$$

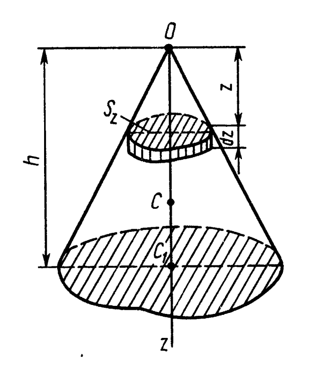


Рис. 95

Таким образом, центр тяжести прямого конуса находится на расстоянии ${}^3/_4h$ от вершины или ${}^1/_4h$ от основания.

Это справедливо для объема любого конуса и любой пирамиды, как прямых, так и наклонных, т. е. *центр тяжести объема пирамиды или конуса находится на расстоянии* $^1/_4$ *расстояния от центра тяжести площади основания до вершины.*

6. Объем полушара. Полушар имеет ось симметрии, которую примем за координатную ось Ox (рис. 96). Разобьем объем полушара на элементарные диски толщиной $\mathrm{d}x$ и радиусом y, который является координатой точки окружности, которая получилась от пересечения полушара с координатной плоскостью Oxy. Уравнение этой окружности

$$x^2+y^2=R^2,$$

где R — радиус полушара. Для координаты центра тяжести объема полушара имеем

$$OC=x_C, \quad x_C=\frac{\int x\,\mathrm{d}v}{v},$$

где x — координата центра тяжести элементарного диска. Объем полушара

$$v=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем элементарного диска

$$\mathrm{d}v=\pi r^2\mathrm{d}x=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x,$$

так как радиус диска $r=y$. Выполняя интегрирование в пределах от $x=0$ до $x=R$, получим

$$OC=\frac{\int\limits_0^R \pi\left(R^2-x^2\right)x\,\mathrm{d}x}{^2/_3\pi R^3}=\frac{3}{2R^3}\left(R^2\frac{R^2}{2}-\frac{R^4}{4}\right)=\frac{3}{8}R.$$

Таким образом, центр тяжести объема полушара находится от его центра на расстоянии

$$OC=\frac{3}{8}R. \tag{8}$$

Это расстояние меньше половины радиуса полушара.

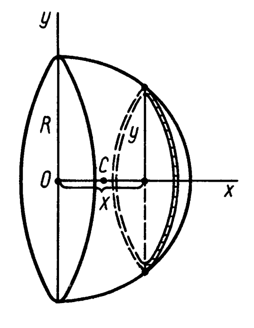


Рис. 96

Пример. Определить координаты центра тяжести площади плоской фигуры, имеющей размеры, указанные на рис. 97.

Решение. Присоединим к заданной фигуре дополнительно полукруг *3* и разобьем полученную фигуру на прямоугольник *1* и треугольник *2*. Получили три фигуры, две из которых имеют положительные площади (прямоугольник *1* и треугольник *2*) и одна — отрицательную (полукруг *3*). В выбранной системе координат для координат центра тяжести заданной фигуры имеем

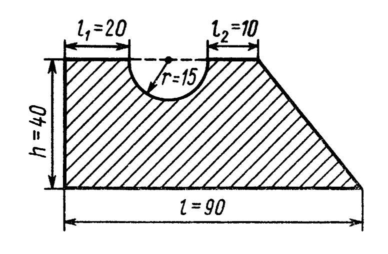


Рис. 97

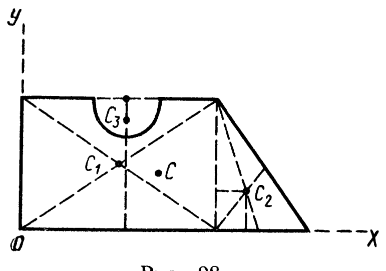


Рис. 98

$$x_C=\frac{S_1x_1+S_2x_2-S_3x_3}{S_1+S_2-S_3},\quad y_C=\frac{S_1y_1+S_2y_2-S_3y_3}{S_1+S_2-S_3},\qquad \text{(a)}$$

где x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 — координаты центров тяжести отдельных фигур; S_1, S_2, S_3 — площади этих фигур.

Вычислим площади и координаты центров тяжести отдельных фигур, учитывая рис. 98. Имеем:

$$S_1=40\cdot 60=2400\ \text{см}^2;\quad S_2=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 30=600\ \text{см}^2;\quad S_3=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{\pi\cdot 225}{2}\approx 353{,}2\ \text{см}^2;$$

$$x_1=30\ \text{см};\ y_1=20\ \text{см};\ x_2=60+\frac{1}{3}\cdot 30=70\ \text{см};\ y_2=\frac{1}{3}\cdot 40=\frac{40}{3}\ \text{см};\ x_3=20+15=35\ \text{см};$$

$$y_3=\left(h-\frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=40-\frac{60}{3\pi}\approx 33{,}6\ \text{см},$$

так как $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Подставляя полученные значения в (a), получим:

$$x_C=\frac{72\,000+42\,000-12\,362}{2646{,}8}=38{,}4\ \text{см};$$

$$y_C=\frac{48\,000+12\,000-11857{,}5}{2646{,}8}=18{,}2\ \text{см}.$$

РАЗДЕЛ II
КИНЕМАТИКА

ВВЕДЕНИЕ

В *кинематике изучается движение материальных объектов* (точки, твердого тела, сплошной среды) *без рассмотрения причин, вызывающих или изменяющих это движение*. Такое изучение движения материальных объектов не требует учета материальных характеристик этих объектов — массы, моментов инерции и др.

В кинематике рассматривают такие характеристики движения, как скорость и ускорение точки, угловые скорость и ускорение твердого тела и др.

Движение материальных объектов, в частности материальной точки, совершается в пространстве при изменении времени. Пространство в классической механике считается эвклидовым, не зависящим от времени и движущихся в нем материальных объектов. Время принимается универсальным, не связанным с пространством и не зависящим как от движения наблюдателя, с точки зрения которого рассматривается движение материального объекта, так и от движения самого материального объекта.

Движение материального объекта всегда следует рассматривать относительно какого-либо твердого тела — тела отсчета, т. е. движение является относительным. С телом отсчета скрепляют систему осей координат, например декартовых, принимая ее за систему отсчета, относительно которой рассматривается движение материального объекта. Системой отсчета для трехмерного эвклидова пространства не может служить одна точка, линия или плоскость, а должны быть три оси, не обязательно прямолинейные, но не лежащие в одной плоскости.

Независимость времени от движения означает, что во всех системах отсчета, произвольно движущихся друг относительно друга, оно одно и то же, если за начало отсчета выбрано общее для них событие.

В кинематике сплошной среды телами отсчета, относительно которых рассматривается движение, могут быть также деформируемые тела.

В курсе теоретической механики обычно изучаются движение точки и твердого тела. Соответственно кинематика делится на кинематику точки и кинематику твердого тела. В настоящем курсе дополнительно излагаются также основы кинематики сплошной среды.

ГЛАВА 1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

В кинематике точки рассматриваются характеристики движения точки, такие, как скорость, ускорение, и методы их определения при различных способах задания движения. Важным в кинематике точки является понятие траектории. Траекторией точки называется геометрическое место ее последовательных положений в пространстве с течением времени относительно рассматриваемой системы отсчета.

По виду траекторий движения точки делятся на *прямолинейные* и *криволинейные*. Форма траектории зависит от выбранной системы отсчета. Одно и то же движение точки может быть прямолинейным относительно одной системы отсчета и криволинейным относительно другой. Например, если с летящего горизонтально Земле с постоянной скоростью самолета отцеплен груз, то, пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая только действие силы тяжести, получим в качестве траектории движения центра масс груза относительно самолета прямую линию, а относительно Земли — параболу.

§ 1. СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Одной из основных характеристик движения точки является ее скорость относительно выбранной системы отсчета, которая изображена в виде декартовой прямоугольной системы координат (рис. 1).

Положение движущейся точки M относительно рассматриваемой системы отсчета определяется в момент времени t радиусом-вектором $\bar{r}$, который соединяет неподвижную точку O с этой точкой. В другой момент времени $t_1 = t + \Delta t$ движущаяся точка займет положение M_1 и ее радиусом-вектором будет $\bar{r}_1$. За время Δt радиус-вектор движущейся точки изменится на $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$.

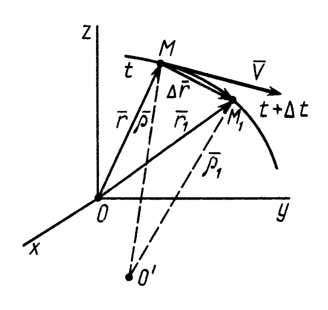


Рис. 1

Средней скоростью $\bar{v}_{ср}$ точки за время Δt называют отношение $\Delta\bar{r}/\Delta t$, т. е.

$$\bar{v}_{ср} = \Delta\bar{r}/\Delta t.$$

Средняя скорость параллельна вектору $\Delta\bar{r}$. В общем случае она зависит от времени осреднения Δt. У нее нет конкретной точки приложения на траектории.

Введем скорость точки $\bar{v}$ в момент t, которая определяется

как предел средней скорости, если промежуток времени, за который определяется средняя скорость, стремится к нулю, т. е.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\bar{r}/\Delta t = \mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t.$$

Скорость точки направлена в сторону ее движения по предельному направлению вектора $\Delta\bar{r}$ при Δt, стремящемся к нулю, т. е. по предельному направлению секущей MM_1, которая совпадает с касательной к траектории в точке M. Таким образом, *скорость точки равна первой производной по времени от ее радиуса-вектора.* Она направлена по касательной к траектории в сторону движения точки.

Начало радиуса-вектора движущейся точки можно выбрать в любой неподвижной точке. На рис. 1 представлен случай, в котором радиусом-вектором является также $\bar{\rho}$ с началом в точке O'. Радиусы-векторы $\bar{r}$ и $\bar{\rho}$ имеют одинаковые изменения $\Delta\bar{r}$ и $\Delta\bar{\rho}$ за время Δt и поэтому

$$\bar{v} = \mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}\bar{t} = \mathrm{d}\bar{\rho}/\mathrm{d}t. \quad (1)$$

Размерность скорости в СИ получаем из (1):

$$[v] = \text{длина/время} = \text{м/с}.$$

Часто скорость выражают в км/ч; км/ч $= 3{,}6\ v$ м/с.

Для характеристики переменного вектора используют понятие его годографа. *Годографом вектора называют геометрическое место его концов, если переменный вектор в различные моменты времени откладывать от одной и той же общей точки.*

Траектория точки, очевидно, является годографом радиуса-вектора $\bar{r}$ или $\bar{\rho}$ (рис. 1). Последовательные положения вектора $\bar{r}$ в различные моменты времени откладываются в этом случае от точки O, а вектора $\bar{\rho}$ — от точки O'.

Первая производная по времени от радиуса-вектора есть скорость точки, направленная по касательной к траектории. Следовательно, параллельно касательной к годографу направлена первая производная по скалярному аргументу от любого переменного вектора.

Годографом вектора скорости является линия, на которой располагаются концы этого вектора в различные моменты времени, если их начала совместить в одной общей точке. Для построения годографа вектора скорости выбираем точку, например O_1 (рис. 2, *б*), и начала векторов скорости для различных моментов времени переносим в эту точку, не изменяя их величин и направлений. Каждой точке траектории M (рис. 2, *а*) будет соответствовать своя изображающая точка M' на годографе вектора скорости (рис. 2, *б*). Масштаб для скоростей при построении годографа вектора скорости может быть выбран отличным от масштаба для скоростей, изображаемых в точках траектории. При движении точки по траектории соответствующая ей изображающая точка движется по годографу вектора скорости.

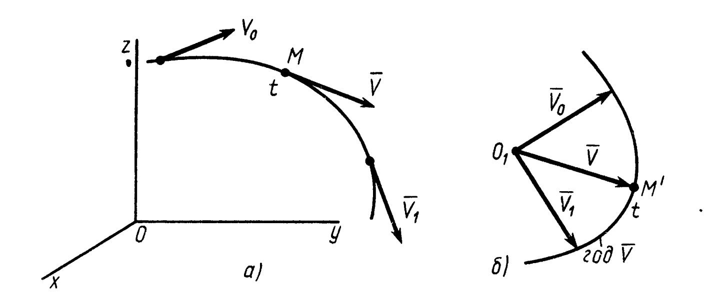


Рис. 2

При равномерном движении точки по прямой годографом вектора скорости является одна точка; при неравномерном движении — отрезок прямой, параллельный траектории.

§ 2. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Пусть движущаяся точка M в момент времени t имеет скорость $\bar{v}$. В момент времени $t_1=t+\Delta t$ эта точка занимает положение M_1, имея скорость v_1 (рис. 3, *а*). Чтобы изобразить приращение скорости $\Delta\bar{v}$ за время Δt, перенесем вектор скорости $\bar{v}_1$ параллельно самому себе в точку M.

Средним ускорением точки $\bar{a}_{\text{ср}}$ за время Δt называют отношение $\Delta\bar{v}/\Delta t$, т. е. $\bar{a}_{\text{ср}}=\Delta\bar{v}/\Delta t$. Среднее ускорение точки параллельно приращению скорости $\Delta\bar{v}$. Как и средняя скорость, среднее ускорение не имеет на траектории конкретной точки приложения и изображено в точке M условно. В общем случае среднее ускорение зависит от времени Δt.

Ускорением точки $\bar{a}$ в момент времени t называют предел, к которому стремится среднее ускорение при Δt, стремящемся к нулю, т. е.

$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{a}_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\bar{v}/\Delta t=\mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}t. \qquad (2)$$

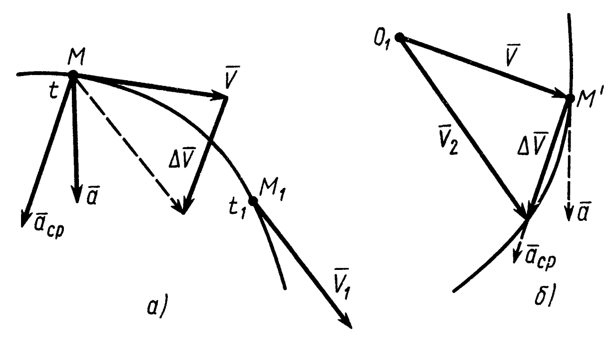


Рис. 3

Таким образом, *ускорение точки равно первой производной по времени от скорости точки.*

Приращение скорости Δv и, следовательно, среднее ускорение направлены внутрь вогнутости траектории. Так же направлены и их предельные значения при Δt, стремящемся к нулю. Поэтому ускорение точки направлено тоже внутрь вогнутости траектории. Кроме того, ускорение как первая производная по времени от скорости, по свойству годографа вектора, параллельна касательной к годографу вектора скорости (рис. 3, *б*).

Размерность ускорения в СИ получаем из (2):

$$[a]=[v]/[t]=\text{скорость/время}=\text{м/с}^2=\text{м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

§ 3. ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Движение точки относительно рассматриваемой системы отсчета при векторном способе изучения движения задается радиусом-вектором $\bar{r}$ этой точки (рис. 4). Движение точки считается заданным, если известен радиус-вектор движущейся точки как функция времени, т. е.

$$\bar{r}=\bar{r}(t). \tag{3}$$

Задание в е к т о р н о г о у р а в н е н и я д в и ж е н и я (3) полностью определяет движение точки.

Траекторией точки является годограф радиуса-вектора. Скорость точки направлена по касательной к траектории и вычисляется, согласно ее определению, по формуле

$$\bar{v}=\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t=\dot{\bar{r}}. \tag{4}$$

Для ускорения точки соответственно имеем

$$\bar{a}=\mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\bar{r}/\mathrm{d}t^2=\ddot{\bar{r}}. \tag{5}$$

Таким образом, если движение точки задано векторным способом, то скорость и ускорение вычисляются по формулам (4) и (5).

Определение скорости и ускорения точки сводится к чисто математической задаче вычисления первой и второй производных по времени от радиуса-вектора этой точки. Для практического вычисления скорости и ускорения обычно используют координатный и естественный способы изучения движения. Векторный способ ввиду его краткости и компактности удобен для теоретического изложения кинематики точки.

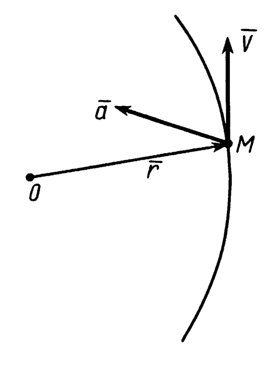


Рис. 4

§ 4. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Задание движения и траектория

Движение точки можно изучать используя любую систему координат. Рассмотрим случай декартовых прямоугольных осей координат, которые являются также системой отсчета, относительно которой рассматривается движение точки. Движение точки в декартовых координатах считается заданным, если известны координаты точки как непрерывные, дважды дифференцируемые функции времени (рис. 5), т. е. заданы уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t). \tag{6}$$

Уравнения движения точки в декартовых координатах полностью определяют движение точки. Они позволяют найти положение точки, ее скорость и ускорение в любой момент времени. Уравнения движения (6) есть также уравнения траектории точки в параметрической форме. Параметром является время t. Уравнения траектории в координатной форме из (6) получают исключением параметра t. Исключая время, например, из первых двух уравнений и затем из второго и третьего, получим уравнения двух поверхностей:

$$F_1(x, y)=0, \quad F_1(y, z)=0.$$

Это и есть уравнения траектории в координатной форме. Траекторией является линия пересечения двух поверхностей. Эти поверхности являются цилиндрическими, так как их уравнения не содержат одной из координат: первое — координаты z, второе — координаты x. Ось первой цилиндрической поверхности параллельна оси Oz, второй — оси Ox.

Исключая время из уравнений движения в другом порядке, получим траекторию точки как линию пересечения двух других цилиндрических поверхностей, например

$$F_1(x, y)=0, \quad F_3(x, z)=0.$$

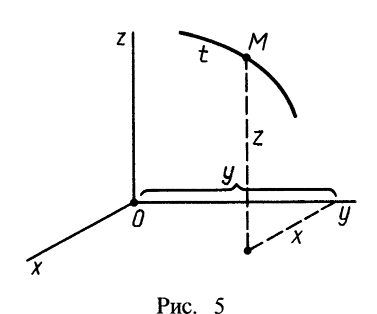


Рис. 5

При исключении параметра t из уравнений движения могут быть получены отрезки линий или точки, которые не содержатся в уравнениях (6). Эти дополнительные точки не следует считать точками траектории.

Пример. Даны уравнения движения точки по плоскости

$$x=b\sin^2 kt, \quad y=c\cos^2 kt, \tag{a}$$

где b, c, k — положительные постоянные величины. Определить уравнение траектории в координатной форме.

Решение. Уравнения движения (а) есть уравнения траектории точки в параметрической форме с параметром t. Исключим его из уравнений движения. Для этого достаточно сложить правые и левые части уравнений, разделив предварительно первое уравнение на b, а второе — на c. Получим

$$x/b+y/c=1, \qquad (б)$$

так как

$$\sin^2 kt+\cos^2 kt=1.$$

Рис. 6

Уравнение (б) есть уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки b и c (рис. 6).

Из уравнений (а) следует, что координаты точки x и y все время положительны и удовлетворяют условиям $x\leqslant b$, $y\leqslant c$, т. е. они могут изменяться только в пределах $0\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant c$. Точки прямой, для которых $x>b$ и $y>c$, не содержатся в уравнениях движения (а). Они дополнительно появились при исключении из уравнений параметра t. Их не следует включать в траекторию.

Траектория точки M_0M в координатной форме выражается уравнением и двумя неравенствами:

$$x/b+y/c=1,\quad 0\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant c.$$

Скорость в декартовых координатах

Разложим радиус-вектор и скорость точки на составляющие, параллельные осям координат (рис. 7). Получим

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k};\quad \bar{v}=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k}, \qquad (7)$$

где x, y, z — координаты точки M; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы осей координат; v_x, v_y, v_z — проекции скорости на оси координат.

Учитывая (7), согласно определению скорости, имеем

$$\bar{v}=\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}, \qquad (8)$$

так как $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ не изменяются при движении точки M. Точки над x, y, z означают их производные по времени. Сравнивая (7) и (8), получаем для проекций скорости на декартовы оси координат следующие формулы:

$$v_x=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=\dot{x};\quad v_y=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=\dot{y};\quad v_z=\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=\dot{z}. \qquad (9)$$

Проекция скорости точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты этой точки. По проекциям определяют числовое значение (модуль) скорости и косинусы углов вектора скорости с осями координат:

$$\left.\begin{aligned} &v=|\bar{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2};\ \cos(\bar{v},\widehat{\ }x)=v_x/v=\dot{x}/v;\\ &\cos(\bar{v},\widehat{\ }y)=v_y/v=\dot{y}/v;\ \cos(\bar{v},\widehat{\ }z)=v_z/v=\dot{z}/v. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

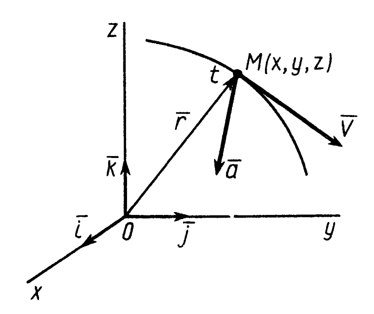


Рис. 7

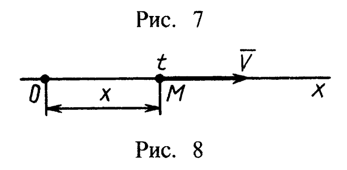


Рис. 8

Если точка движется в плоскости, то, выбрав оси координат Ox и Oy в этой плоскости, получим:

$$z=\text{const}=0,\quad v_z=\dot z=0,\quad v_x=\dot x,\quad v_y=\dot y;$$
$$\bar v=\dot x\bar i+\dot y\bar j.$$

Соответственно

$$v=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2};\quad \cos(\bar v,\hat{}\,x)=\dot x/v;$$
$$\cos(\bar v,\hat{}\,y)=\dot y/v.$$

Для прямолинейного движения точки координатную ось, например Ox, направляют по траектории (рис. 8). Тогда $y=\text{const}=0$ и $z=\text{const}=0$, $\dot y=0$, $\dot z=0$. Проекция скорости и ее модуль определяются по формулам

$$v_x=\dot x,\quad v=|\dot x|.$$

Уравнение годографа вектора скорости

Известны уравнения движения точки в декартовых координатах. Получим уравнения годографа вектора скорости. На рис. 9, *а* изображены траектория точки и несколько векторов скорости в выбранном масштабе для различных моментов времени, а на рис. 9, *б* представлен годограф вектора скорости этого движения. Точке $M(x, y, z)$ на траектории соответствует точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на годографе вектора скорости.

Координаты точки M_1, согласно определению годографа, выражаются через проекции вектора скорости на оси координат $O_1x_1y_1z_1$ по формулам

$$x_1=v_{x_1};\quad y_1=v_{y_1};\quad z_1=v_{z_1}.$$

Если оси координат для годографа вектора скорости параллельны соответствующим осям координат, относительно которых заданы уравнения движения точки, то

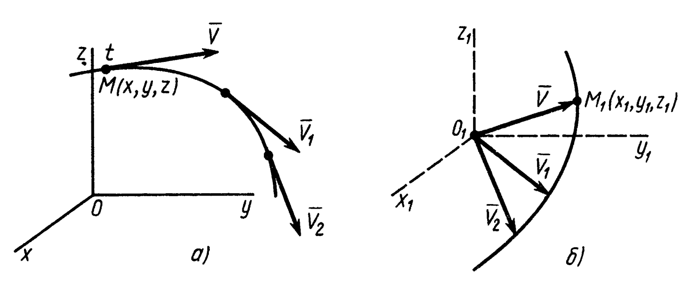


Рис. 9

$$v_{x_1}=v_x=\dot{x};\;\; v_{y_1}=v_y=\dot{y};\;\; v_{z_1}=v_z=\dot{z}.$$

Параметрические уравнения годографа вектора скорости принимают такую форму:

$$x_1=\dot{x};\;\; y_1=\dot{y};\;\; z_1=\dot{z}.$$

Исключая из этих уравнений параметр t, получим уравнения годографа вектора скорости в координатной форме.

Годограф вектора скорости дает наглядное представление о скоростях движущейся точки в разные моменты времени. Он также позволяет определить направление вектора ускорения, так как ускорение параллельно касательной к годографу вектора скорости.

Ускорение точки в декартовых координатах

Разложим ускорение точки на составляющие, параллельные осям декартовой системы координат. Получим

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}, \tag{11}$$

где a_x, a_y, a_z — проекции ускорения на координатные оси. Согласно определению ускорения и формулам (7) и (8), имеем

$$\bar{a}=\mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k}\right)=\left(\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t\right)\bar{i}+\left(\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t\right)\bar{j}+$$
$$+\left(\mathrm{d}v_z(\mathrm{d}t\right)\bar{k}=\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}+\ddot{z}\bar{k}. \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), получаем формулы для проекций ускорения на оси декартовой системы координат:

$$a_x=\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t=\ddot{x};\;\; a_y=\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t=\ddot{y};\;\; a_z=\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t=\ddot{z} \tag{13}$$

Проекция ускорения на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты движущейся точки.

Числовое значение ускорения и косинусы углов вектора ускорения с осями координат определяем по формулам

$$a=|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2};$$
$$\cos\left(\bar{a},\hat{}\,x\right)=a_x/a=\ddot{x}/a;\;\; \cos\left(\bar{a},\hat{}\,y\right)=a_y/a=\ddot{y}/a;$$
$$\cos\left(\bar{a},\hat{}\,z\right)=a_z/a=\ddot{z}/a.$$

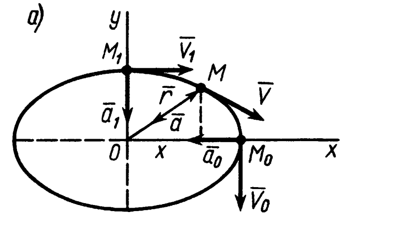
При движении точки по плоскости оси Ox и Oy выбирают в этой же плоскости. Тогда $z=\mathrm{const}=0$, $a_z=\ddot{z}=0$. Формулы для ускорения и его проекций на оси координат примут вид

$$\bar{a}=\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j};\;\; a_x=\ddot{x};\;\; a_y=\ddot{y}.$$

Соответственно

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2};\;\; \cos\left(\bar{a},\hat{}\,x\right)=\ddot{x}/a;\;\; \cos\left(\bar{a},\hat{}\,y\right)=\ddot{y}/a.$$

Для прямолинейного движения ось Ox направим по траектории точки. Тогда $y=\mathrm{const}=0$, $z=\mathrm{const}=0$ и $a_y=\ddot{y}=0$,



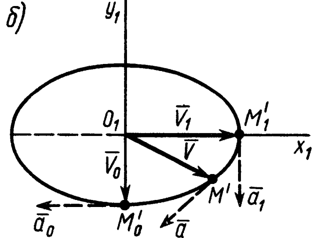


Рис. 10

$a_z = \ddot{z} = 0$. Формулы для ускорения и его проекции на ось Ox принимают вид

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{i}; \quad a_x = \ddot{x}.$$

Соответственно для числового значения ускорения имеем

$$a = |\ddot{x}|.$$

Пример. Движение точки по плоскости Oxy задано уравнениями

$$x = b \sin \omega t; \quad y = d \cos \omega t,$$

где b, d и ω — постоянные положительные величины. Определить уравнение траектории в координатной форме, значения скорости и ускорения точки в момент времени $t = \pi/(2\omega)$, а также уравнение годографа вектора скорости.

Решение. Уравнение траектории в координатной форме находим исключением времени из уравнений движения. Для этого поделим первое уравнение на b, второе — на d, возводим в квадрат и складываем. Получаем уравнение эллипса (рис. 10, a) с полуосями b и d:

$$x^2/b^2 + y^2/d^2 = 1,$$

так как

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1.$$

При $t = \pi/(2\omega)$ точка имеет координаты $x = b$, $y = 0$, т. е. занимает положение M_0. Определим проекции скорости и ускорения на оси координат. Имеем:

$$v_x = \dot{x} = b\omega \cos \omega t, \quad v_y = \dot{y} = -d\omega \sin \omega t,$$

$$a_x = \ddot{x} = -b\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x, \quad a_y = \ddot{y} = -d\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 y.$$

Для момента времени $t = \pi/(2\omega)$ получаем:

$$v_x = 0, \quad v_y = -d\omega, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = d\omega;$$

$$a_x = -b\omega^2, \quad a_y = 0, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = b\omega^2.$$

По проекциям устанавливаем направление скорости по касательной к траектории и направление ускорения по радиусу-вектору к точке O. Изображаем эти векторы в точке M_0 и дополнительно в точках M и M_1.

Если выбрать для годографа вектора скорости оси O_1x_1 и O_1y_1 параллельными осям Ox и Oy, то для его текущих координат имеем

$$x_1 = v_x = b\omega \cos \omega t, \quad y_1 = v_y = -d\omega \sin \omega t.$$

Исключая из этих параметрических уравнений годографа вектора скорости время t, получим следующее его уравнение в координатной форме:

$$x_1^2/(b^2\omega^2) + y_1^2/(d^2\omega^2) = 1.$$

На рис. 10, $б$ отмечены три изображающие точки годографа M'_O, M' и M'_1, соответствующие точкам траектории M_O, M и M_1, а также указаны направления ускорения в этих точках.

§ 5. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Естественный способ задания движения

При естественном способе задания движения задаются траектория и закон движения точки по траектории. Движение точки рассматривается относительно фиксированной системы отсчета. Задание траектории относительно выбранной системы отсчета осуществляется различными способами: уравнениями (возможно, вместе с неравенствами), словесно или в виде графика (в каком-либо масштабе). Например, можно сказать, что траекторией автомобиля, принимаемого за точку, является дуга окружности радиусом 10 км и т. д.

Для задания закона движения точки по траектории необходимо выбрать на траектории точку O, принимаемую за начало отсчета расстояний (рис. 11). Расстояния в одну сторону от точки O по траектории считаются положительными (например, вправо), в другую — отрицательными. Кроме того, следует задать начало отсчета времени. Обычно за $t=0$ принимают момент времени, в который движущаяся точка проходит через точку O, или момент начала движения. Время до этого события считается отрицательным, а после него — положительным.

Если в момент времени t движущаяся точка занимает положение M, то закон движения точки по траектории задается зависимостью от времени расстояния s, отсчитываемого от точки O до точки M, т. е. $s=f(t)$. Эта функция должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой. Расстояние s берется по траектории, какой бы сложной ни была форма траектории. Это расстояние не имеет прямого отношения к пройденному точкой пути за время t, так как за начало отсчета расстояний может быть выбрана, в частности, и конечная точка пути. К тому же движение точки может быть колебательным вокруг начальной точки O.

От задания движения в декартовых координатах можно перейти к его заданию естественным способом. Закон движения точки по траектории в дифференциальной форме через декартовы координаты выражается в виде

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

и после интегрирования — в конечной форме

$$s=\int_0^t \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=$$

$$=\int_0^t \sqrt{[f'_1(t)]^2+[f'_2(t)]^2+[f'_3(t)]^2}\,dt,$$

Рис. 11

если

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$

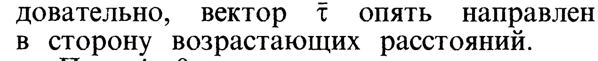
За начало отсчета расстояний принята точка траектории, в которой находится движущаяся точка в начальный момент времени. Знак у квадратного корня определяется выбором направления положительных и отрицательных расстояний.

Скорость точки при естественном способе задания движения

Пусть движение точки задано естественным способом, т. е. заданы траектория точки и закон ее движения по траектории $s=f(t)$. Вычислим скорость точки. Для этого используем радиус-вектор $\bar{r}$ движущейся точки, начало которого находится в неподвижной точке O_1 (рис. 12). При движении точки ее радиус-вектор изменяется с течением времени, а следовательно, он изменяется в зависимости от расстояния. Используя определение скорости, имеем

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\dot{s},$$

или $\bar{v}=\dot{s}\bar{\tau}$, где $\bar{\tau}=d\bar{r}/ds$. Вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной к траектории как производная от вектора по скалярному аргументу и является единичным вектором. Модуль этого вектора равен единице, как предел отношения длины хорды $|\Delta\bar{r}|$ к длине стягивающей ее дуги $|\Delta s|$ при стремлении ее к нулю.

Единичный вектор $\bar{\tau}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону возрастающих (положительных) расстояний независимо от направления движения точки. При $ds>0$ направления векторов $\bar{\tau}$ и $d\bar{r}$ совпадают. Вектор $d\bar{r}$ в этом случае направлен в сторону возрастающих расстояний. Если точка движется в сторону убывающих расстояний, то $ds<0$ и направления векторов $\bar{\tau}$ и $d\bar{r}$ противоположны. Но вектор $d\bar{r}$ направлен в сторону убывающих расстояний, а сле-

довательно, вектор $\bar{\tau}$ опять направлен в сторону возрастающих расстояний.

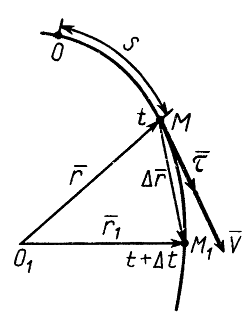


Рис. 12

При $\dot{s}>0$ вектор скорости направлен по $\bar{\tau}$, т. е. в сторону возрастающих расстояний; при $\dot{s}<0$ он имеет направление, противоположное $\bar{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Величина $v_\tau=\dot{s}$ называется *алгебраической скоростью точки*. Ее можно считать проекцией скорости на положительное направление касательной к траектории, совпадающее с направлением единичного вектора $\bar{\tau}$.

Естественное задание движения точки полностью определяет скорость точки по величине и направлению. Алгебраическую скорость находят дифференцированием по времени закона изменения расстояний. Единичный вектор $\bar{\tau}$ определяют по заданной траектории.

Геометрические понятия. Дифференцирование единичного вектора

Радиус кривизны и соприкасающаяся плоскость. В точке M кривой линии проведем касательную $M\tau$ (рис. 13). В другой близкой точке кривой M_1, отстоящей от точки M на расстоянии Δs, построим касательную $M_1\tau_1$. В общем случае пространственной кривой касательные $M\tau$ и $M_1\tau_1$ будут скрещиваться. Проведем в точке M прямую линию $M\tau_1'$, параллельную $M_1\tau_1$. Угол $\Delta\varphi$ между линиями $M\tau$ и $M\tau_1''$ называется *углом смежности*. *Кривизной кривой* k в точке M называют предел, к которому стремится угол смежности, приходящийся на единицу расстояния Δs, причем Δs стремится к нулю, т. е.

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\varphi/\Delta s=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s.$$

Радиусом кривизны кривой ρ в точке M называют величину, обратную кривизне кривой в этой точке, т. е.

$$\rho=1/k=\mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi.$$

Вычислим радиус кривизны дуги окружности радиусом R (рис. 14). Дуга окружности длиной s, опирающаяся на центральный угол φ, выражается зависимостью $s=R\varphi$. Для радиуса кривизны имеем

$$\rho=\mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi=R,$$

т. е. для окружности радиус кривизны в каждой ее точке один и тот же и совпадает с радиусом окружности.

Участок кривой из малой окрестности какой-либо ее точки лучше всего аппроксимирует по сравнению с дугами других окружностей элемент дуги окружности, радиус которой равен радиусу кривизны кривой в рассматриваемой точке.

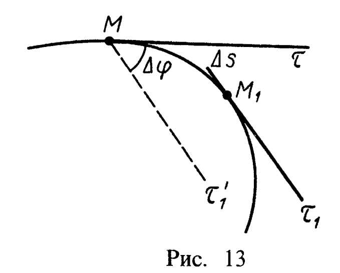


Рис. 13

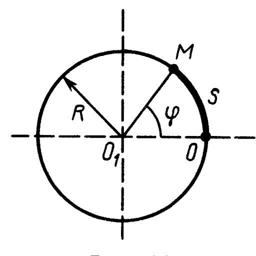


Рис. 14

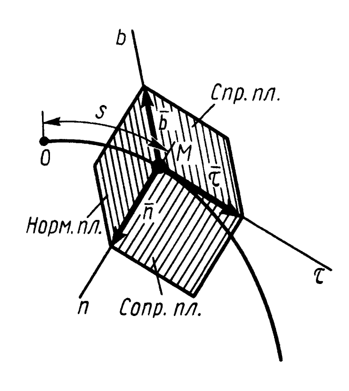


Рис. 15

Для определения понятия соприкасающейся плоскости проводим вспомогательную плоскость через две пересекающиеся прямые $M\tau$ и $M\tau_1'$ (см. рис. 13). Предельное положение этой плоскости при совпадении в пределе точки M_1 с точкой M называется *соприкасающейся плоскостью кривой* в точке M.

В случае плоской кривой соприкасающейся плоскостью для всех точек кривой является сама плоскость, в которой расположена эта кривая.

Естественный трехгранник. Построим в точке M кривой линии естественные оси этой кривой (рис. 15). Первой естественной осью является касательная $M\tau$. Ее положительное направление совпадает с направлением единичного вектора касательной $\bar{\tau}$, направленного в сторону возрастающих расстояний.

Перпендикулярно касательной $M\tau$ располагается нормальная плоскость кривой. Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью* Mn. Она является линией пересечения нормальной плоскости с соприкасающейся плоскостью. По главной нормали внутрь вогнутости кривой направим единичный вектор $\bar{n}$. Он определяет положительное направление второй естественной оси.

Нормаль, перпендикулярная главной нормали, называется *бинормалью*. Единичный вектор $\bar{b}$, направленный по бинормали так, чтобы три вектора $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ и $\bar{b}$ образовывали правую систему осей координат, определит положительное направление третьей естественной оси.

Три взаимно перпендикулярные оси $M\tau$, Mn и Mb, положительные направления которых совпадают с направлениями единичных векторов $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, называются *естественными осями кривой*. Эти оси образуют в точке M естественный трехгранник. При движении точки по кривой естественный трехгранник движется вместе с точкой как твердое тело, поворачиваясь вокруг вершины, совпадающей с движущейся точкой.

Дифференцирование единичного вектора. Вычислим производную от единичного вектора по скалярному аргументу. В кинематике точки скалярными аргументами обычно являются время и расстояние по траектории. В качестве единичного вектора выберем $\bar{\tau}$, направленный по касательной к траектории, и вычислим его производную по времени.

Производная $d\bar{\tau}/dt$ перпендикулярна самому единичному вектору $\bar{\tau}$. Для доказательства этого используем тождество

$$\bar{\tau}\cdot\bar{\tau}=1.$$

Дифференцируя по времени обе части этого тождества, получим

$$2\frac{d\bar{\tau}}{dt}\cdot\bar{\tau}=0.$$

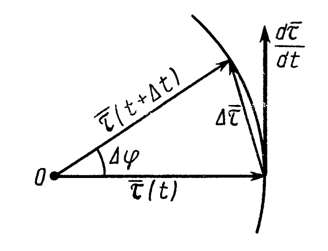


Рис. 16

Каждый из сомножителей этого выражения не равен нулю, поэтому векторы $d\bar{\tau}/dt$ и $\bar{\tau}$ перпендикулярны друг другу. Это справедливо для любого другого вектора, числовая величина (модуль) которого постоянна.

Направим по вектору $d\bar{\tau}/dt$ единичный вектор $\bar{n}$. Тогда

$$d\bar{\tau}/dt=|d\bar{\tau}/dt|\,\bar{n}. \tag{14}$$

Годографом вектора $\bar{\tau}$ является кривая, расположенная на сфере единичного радиуса, так как единичный вектор изменяется только по направлению (рис. 16).

По определению модуля производной от вектора имеем

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{\tau}|}{|\Delta t|}.$$

Длина малой хорды $|\Delta\bar{\tau}|$ с точностью до малых величин более высокого порядка равна длине дуги, которую стягивает хорда, т. е.

$$|\Delta\bar{\tau}|=1\cdot|\Delta\varphi|,$$

где $\Delta\varphi$ — угол, опирающийся на эту дугу. Используя это выражение, получим

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{\tau}|}{|\Delta t|}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta t|}=\frac{|d\varphi|}{|dt|}.$$

Подставляя это значение в (14) и используя выражение для радиуса кривизны и переменную s, получим

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt}=\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|\bar{n}=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right|\bar{n}=\frac{|\dot{s}|}{\rho}\bar{n}. \tag{15}$$

Радиус кривизны ρ считаем положительным.

Вектор $d\bar{\tau}/dt$ и совпадающий с ним по направлению единичный вектор $\bar{n}$ направлены параллельно предельному положению вектора $\Delta\bar{\tau}$ при Δt, стремящемся к нулю, т. е. они расположены в соприкасающейся плоскости кривой. Единичный вектор $\bar{n}$ перпендикулярен вектору $\bar{\tau}$, направленному по касательной к кривой. Следовательно, вектор $\bar{n}$ направлен по главной нормали кривой в сторону ее вогнутости, так как в эту сторону направлено предельное положение вектора $\Delta\bar{\tau}$.

Если имеем любой другой вектор $\bar{b}$ с постоянным модулем, то для него остается справедливым все, что было получено

для единичного вектора, только радиус годографа следует заменить его модулем b. Получим

$$\frac{d\bar{b}}{dt}=b\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|\bar{n}, \qquad (15')$$

где $\bar{n}$ — теперь единичный вектор, перпендикулярный вектору $\bar{b}$ и направленный параллельно $d\bar{b}/dt$.

Формулу (15′) можно выразить векторным произведением:

$$d\bar{b}/dt=\bar{\omega}\times\bar{b},$$

где $\bar{\omega}$ — вектор угловой скорости поворота вектора $\bar{b}$, модуль которого $|\bar{\omega}|=|d\varphi/dt|$. Вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ следует направить перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\bar{b}$ и $\bar{n}$, причем так, чтобы с его стрелки увидеть поворот вектора $\bar{b}$ к $\bar{n}$ в этой плоскости на угол 90° против часовой стрелки. Подробнее понятие вектора угловой скорости дается при рассмотрении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и в других случаях его движений.

Ускорение точки при естественном способе задания движения

Учитывая, что для скорости точки имеем

$$\bar{v}=\dot{s}\bar{\tau}=v_{\tau}\bar{\tau}, \qquad (16)$$

в соответствии с определением ускорения и (15) получаем

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau})=\ddot{s}\bar{\tau}+\dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt}=\ddot{s}\bar{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\bar{n}, \qquad (17)$$

так как $\dot{s}^2=v^2$ и $d\bar{\tau}/dt$ направлен внутрь вогнутости траектории параллельно единичному вектору главной нормали $\bar{n}$.

Получено разложение ускорения точки по осям естественного трехгранника. Часть ускорения

$$\bar{a}_{\tau}=\ddot{s}\bar{\tau}=(dv_{\tau}/dt)\bar{\tau}$$

называется *касательной составляющей ускорения*. Другая часть ускорения

$$\bar{a}_n=(v^2/\rho)\bar{n}=(\dot{s}^2/\rho)\bar{n}$$

называется *нормальной составляющей ускорения*. Она направлена внутрь вогнутости траектории, т. е. в сторону положительного направления единичного вектора главной нормали $\bar{n}$, так как внутрь вогнутости траектории направлено полное ускорение. Таким образом, ускорение точки

$$\bar{a}=\bar{a}_{\tau}+\bar{a}_n. \qquad (18)$$

Из (17) получим формулы для проекций ускорения на естественные оси. Имеем:

$$a_\tau = \ddot{s} = \mathrm{d}v_\tau/\mathrm{d}\tau, \quad a_n = v^2/\rho, \quad a_b = 0. \qquad (19)$$

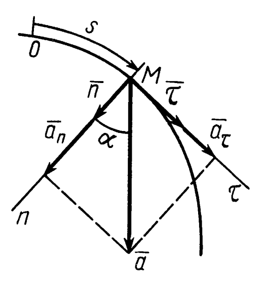


Рис. 17

Проекция ускорения на положительное направление касательной, совпадающее с направлением единичного вектора $\bar{\tau}$, называется *касательным ускорением*, а на главную нормаль, направленную по единичному вектору $\bar{n}$,— *нормальным ускорением*. Проекция ускорения на бинормаль, направленную по единичному вектору $\bar{b}$, равна нулю; следовательно, ускорение точки расположено в соприкасающейся плоскости траектории. В этой плоскости находятся единичные векторы касательной и главной нормали.

Учитывая ортогональность $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$ (рис. 17), в соответствии с уравнением (18) имеем

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = |a_\tau|/a_n. \qquad (20)$$

Нормальная составляющая ускорения $\bar{a}_n$ всегда направлена внутрь вогнутости траектории. Касательная составляющая $\bar{a}_\tau$ при $\ddot{s} > 0$ направлена в положительную сторону касательной, т. е. по направлению единичного вектора $\bar{\tau}$, а при $\ddot{s} < 0$ — в отрицательную, противоположно $\bar{\tau}$.

При $\dot{s} > 0$ и $\ddot{s} > 0$ векторы скорости и касательной составляющей ускорения направлены в одну сторону — по $\bar{\tau}$. Движение точки является ускоренным в положительном направлении касательной к траектории. При $\dot{s} < 0$ и $\ddot{s} < 0$ опять векторы скорости и касательной составляющей ускорения имеют одинаковые направления и, следовательно, движение точки является ускоренным, но в отрицательном направлении касательной к траектории.

Если $\dot{s} > 0$ и $\ddot{s} < 0$, то вектор скорости направлен по $\bar{\tau}$, а вектор касательной составляющей ускорения противоположен ему по направлению. Движение точки является замедленным в положительном направлении касательной к траектории. При $\dot{s} < 0$ и $\ddot{s} > 0$ имеем замедленное движение точки в отрицательную сторону касательной к траектории точки.

Случаи обращения в нуль касательного ускорения получают из условия

$$a_\tau = \mathrm{d}v_\tau/\mathrm{d}t = 0.$$

Это условие выполняется все время, пока $v = |v_\tau| = \mathrm{const}$, т. е. при р а в н о м е р н о м д в и ж е н и и точки по траектории любой формы. Касательное ускорение обращается в нуль также в те моменты времени, в которые алгебраическая скорость v_τ достигает экстремума, например максимума или минимума. Для изображенного на рис. 18 изменения алгебраической скорости в зависимости от времени касательное ускорение равно

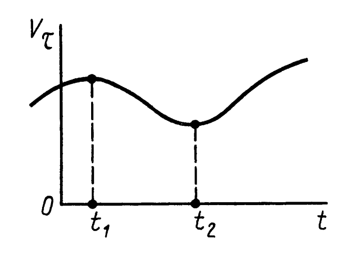


Рис. 18

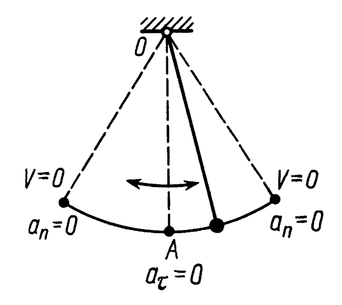


Рис. 19

нулю в моменты времени t_1 и t_2. При колебаниях маятника (рис. 19) эти моменты соответствуют его прохождению через точку A. При движении маятника в одну сторону алгебраическая скорость в точке A достигает максимума, при движении в обратном направлении — минимума.

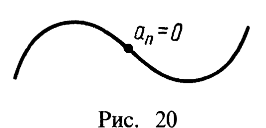


Рис. 20

Случаи обращения в нуль нормального ускорения следуют из условия

$$a_n = v^2/\rho = 0.$$

Это условие выполняется при $\rho = \infty$, т. е. при прямолинейном движении точки. При движении точки по криволинейной траектории $\rho = \infty$ в точках перегиба, в которых происходит изменение выпуклости траектории на вогнутость, и наоборот (рис. 20). Нормальное ускорение обращается также в нуль в моменты времени, в которые $v = 0$, т. е. в моменты изменения направления движения точки по траектории. Для маятника такими моментами являются моменты отклонения маятника на наибольший угол как в одну сторону, так и в другую. Эти моменты соответствуют мгновенным остановкам маятника.

Случаи обращения в нуль касательного и нормального ускорений, а также общие формулы для них показывают, что *касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине, а нормальное — по направлению.*

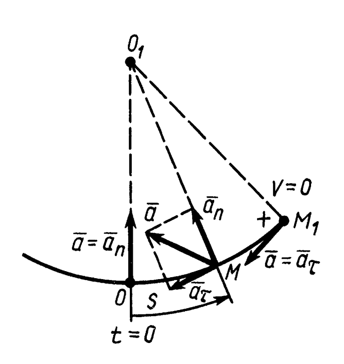


Рис. 21

Пример. Точка M движется по дуге окружности радиусом R по закону $s = R \cdot \sin \omega t$, где $\omega = \text{const}$. Начало отсчета расстояний и времени, а также направление положительных расстояний указаны на рис. 21. Определить скорость и ускорение точки в момент времени t, а также их значения в точке O и в точке траектории M_1, в которой скорость обращается в нуль.

Решение. Скорость и проекции ускорения на естественные оси определяем по формулам (16) и (19). Имеем:

$$v_\tau = \dot{s} = R\omega \cos\omega t; \quad a_\tau = \ddot{s} = -R\omega^2 \sin\omega t; \quad a_n = v^2/\rho = R^2\omega^2 \cos^2\omega t/R = R\omega^2\cos^2\omega t.$$

Скорость обращается в нуль, если $\cos\omega t = 0$, т. е. в момент времени $t_1 = \pi/(2\omega)$ и другие моменты времени, которые в этом примере не рассматриваются. При $t_1 = \pi/(2\omega)$, т. е. в момент изменения направления движения точки, имеем

$$a_\tau = -R\omega^2, \quad a_n = 0.$$

Подставляя в формулы для v_τ, a_τ и a_n значение $t=0$, получаем

$$v_\tau = R\omega, \quad a_\tau = 0, \quad a_n = R\omega^2.$$

Касательное ускорение в этот момент времени обращается в нуль, так как алгебраическая скорость достигает своего максимума.

Частные случаи движения точки

Равномерное движение. При равномерном движении точки по траектории любой формы $v = \text{const}$; следовательно, постоянна и алгебраическая скорость v_τ, которая может отличаться от v только знаком. Так как

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v_\tau,$$

то

$$\mathrm{d}s = v_\tau \mathrm{d}t, \quad s = v_\tau \int_0^t \mathrm{d}t = v_\tau t,$$

если принять при $t=0$ $s=0$.

Равнопеременное движение. Равнопеременным движением называют такое движение по траектории любой формы, при котором касательное ускорение $a_\tau = \text{const}$. Движение является равноускоренным, если алгебраическая скорость v_τ и касательное ускорение a_τ имеют одинаковые знаки. Если v_τ и a_τ имеют разные знаки, то движение является равнозамедленным.

Получим формулы для алгебраической скорости и расстояния при равнопеременном движении. Имеем:

$$\mathrm{d}v_\tau/dt = a_\tau, \quad \mathrm{d}v_\tau = a_\tau \mathrm{d}t, \quad \int_{v_0}^{v_\tau} \mathrm{d}v_\tau = a_\tau \int_0^t \mathrm{d}t;$$

следовательно,

$$v_\tau = v_0 + a_\tau t, \tag{21}$$

если принять при $t=0$ $v_\tau = v_0$.

Так как $v_\tau = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, то с учетом (21)

$$\mathrm{d}s = v_0 \mathrm{d}t + a_\tau t \mathrm{d}t, \quad \int_0^s \mathrm{d}s = v_0 \int_0^t \mathrm{d}t + a_\tau \int_0^t t\,\mathrm{d}t,$$

если при $t=0$ $s=0$. Выполняя интегрирование, получим

$$s = v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{22}$$

Из (21) и (22) можно определить любые две неизвестные величины, если известны остальные три величины, входящие в эти формулы.

§ 6. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим движение точки по плоскости. В этом случае движение можно задать в полярных координатах. Для этого примем какую-либо точку O плоскости за полюс и проведем из нее полярную ось, например ось Ox (рис. 22). Положение движущейся точки M на плоскости известно, если заданы радиус-вектор r и полярный угол φ как функции времени, т. е.

$$r=f_1(t), \quad \varphi=f_2(t). \tag{23}$$

Полярный угол считается положительным, если он откладывается от полярной оси до радиуса-вектора против часовой стрелки. Радиус-вектор как расстояние от точки O до точки M принимает только положительные значения.

Уравнения (23) называются *уравнениями движения точки в полярных координатах*. Они являются также уравнениями траектории точки в параметрической форме. Если из (23) исключить параметр — время t, то получим уравнение траектории в полярных координатах:

$$F(r, \varphi)=0.$$

Введем единичный вектор $\bar{r}^0$, направленный по радиусу-вектору от полюса O к точке M. Тогда

$$\overrightarrow{OM}=\bar{r}=r\bar{r}^0.$$

Для скорости $\bar{v}$ получаем

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r\bar{r}^0\right)=\frac{dr}{dt}\bar{r}^0+r\frac{d\bar{r}^0}{dt}.$$

Согласно (15), для производной по времени от единичного вектора имеем

$$\frac{d\bar{r}^0}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}\bar{p}^0=\dot{\varphi}\bar{p}^0,$$

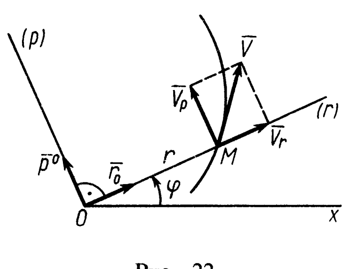


Рис. 22

где вместо единичного вектора $\bar{n}$ введен единичный вектор $\bar{p}^0$, направление которого получается поворотом вектора $\bar{r}^0$ на 90° в положительном направлении угла φ, т. е. против часовой стрелки (рис. 22). После этого для скорости точки получаем

$$\bar{v}=\dot{r}\bar{r}^0+r\dot{\varphi}\bar{p}^0. \qquad (24)$$

Это разложение скорости точки на радиальную $\bar{v}_r$ и трансверсальную (поперечную) $\bar{v}_p$ составляющие, т. е.

$$\bar{v}=\bar{v}_r+\bar{v}_p, \qquad (25)$$

где

$$\bar{v}_r=\dot{r}\bar{r}^0, \quad \bar{v}_p=r\dot{\varphi}\bar{p}^0.$$

Для проекций скорости на оси, положительные направления которых совпадают с направлениями единичных векторов $\bar{r}^0$ и $\bar{p}^0$ из (24), получаем

$$v_r=\dot{r}, \quad v_p=r\dot{\varphi}. \qquad (26)$$

Они соответственно называются *радиальной* и *трансверсальной* скоростями. В зависимости от знаков производных $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ радиальная и трансверсальная скорости могут быть как положительными, так и отрицательными.

Используя (24), определяем ускорение точки в полярных координатах. Имеем

$$\bar{a}=\mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\dot{r}\bar{r}^0+r\dot{\varphi}\bar{p}^0\right).$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\bar{a}=\ddot{r}\bar{r}^0+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\bar{r}^0}{\mathrm{d}t}+r\ddot{\varphi}\bar{p}^0+\dot{r}\dot{\varphi}\bar{p}^0+r\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\bar{p}^0}{\mathrm{d}t}.$$

Для производной по времени от единичного вектора $\bar{p}^0$ имеем

$$\mathrm{d}\bar{p}^0/\mathrm{d}t=\dot{\varphi}\left(-\bar{r}^0\right),$$

так как вектор $\bar{p}^0$ поворачивается с той же угловой скоростью $\dot{\varphi}$, что и вектор $\bar{r}^0$, а единичным вектором, по которому направлен вектор $\mathrm{d}\bar{p}^0/\mathrm{d}t$, является вектор $(-\bar{r}^0)$.

После подстановки в выражение для ускорения производных от единичных векторов и объединения слагаемых имеем

$$\bar{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\bar{r}^0+\left(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\bar{p}^0. \qquad (27)$$

Получили разложение ускорения точки на радиальную $\bar{a}_r$ и трансверсальную $\bar{a}_p$ составляющие, т. е.

$$\bar{a}=\bar{a}_r+\bar{a}_p, \quad \bar{a}_r=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\bar{r}^0, \quad \bar{a}_p=\left(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\bar{p}^0.$$

Для проекций ускорения на оси Or и Op получаем

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2, \quad a_p=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}. \qquad (28)$$

Ускорение a_r называется *радиальным*, а a_p — *трансверсальным*. Трансверсальное ускорение можно выразить также в форме

$$a_p=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\varphi}\right).$$

Это выражение для трансверсального ускорения широко используется при рассмотрении движения планет и искусственных спутников Земли.

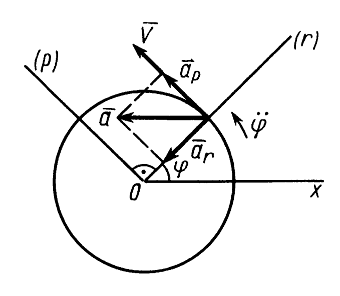


Рис. 23

Радиальная и трансверсальная составляющие ускорения взаимно перпендикулярны, поэтому

$$a=\sqrt{a_r^2+a_p^2}. \qquad (29)$$

Отметим, что для неподвижных осей координат Ox, Oy и Oz справедливы формулы

$$a_x=\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t,\quad a_y=\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t,\quad a_z=\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t.$$

Для подвижных осей Or и Op, как следует из (26) и (28), a_r и a_p не равны производным по времени от v_r и v_p.

Частные случаи. 1. Если $\varphi=\mathrm{const}$, то имеем прямолинейное движение по прямой Or. В этом случае $\dot\varphi=0$, $\ddot\varphi=0$ и из (26) и (28) получаем:

$$v_r=\dot r,\quad v_p=0,\quad v=|\dot r|,$$

$$a_r=\ddot r,\quad a_p=0,\quad a=|\ddot r|.$$

Эти величины совпадают с ранее полученными выражениями для них при изучении движения точки в декартовых координатах. Только расстояние r следует заменить на координату x.

2. При $r=\mathrm{const}$ (рис. 23) получаем движение точки по окружности. В этом случае $\dot r=0$, $\ddot r=0$. Из (26) и (28) имеем:

$$v_r=0;\quad v_p=r\dot\varphi;\quad v=r|\dot\varphi|;$$

$$a_r=-r\dot\varphi^2;\quad a_p=r\ddot\varphi;\quad a=\sqrt{a_r^2+a_p^2}=r\sqrt{\ddot\varphi^2+\dot\varphi^4}.$$

В этих формулах $\dot\varphi$ является угловой скоростью вращения радиуса-вектора, а $\ddot\varphi$ — его угловым ускорением.

Пример 1. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями

$$r=l(1+\cos\omega t),\quad \varphi=\omega t,$$

где l и ω — постоянные величины. Определить уравнение траектории, скорость и ускорение точки в полярных координатах для момента времени t и момента времени $t=0$.

Решение. Исключая из уравнений движения параметр t, получим следующее уравнение траектории в полярных координатах:

$$r=l(1+\cos\varphi).$$

Это уравнение кардиоиды (рис. 24).

Проекции скорости и ускорения на полярные оси определяем по формулам (26) и (28). Имеем:

$$v_r=\dot r=-l\omega\sin\omega t,\quad v_p=r\dot\varphi=l\omega(1+\cos\omega t),$$

$$v=\sqrt{v_r^2+v_p^2}=l\omega\sqrt{2(1+\cos\omega t)}=2l\omega\cos(\omega t/2);$$

$$a_r=\ddot r-r\dot\varphi^2=-l\omega^2(1+2\cos\omega t),\quad a_p=r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi=-2l\omega^2\sin\omega t,$$

$$a=\sqrt{a_r^2+a_p^2}=l\omega^2\sqrt{(1+2\cos\omega t)^2+4\sin^2\omega t}=l\omega^2\sqrt{5+4\cos\omega t}.$$

Для момента времени $t=0$ из этих формул получаем:

$$v_r=0,\quad v_p=2l\omega,\quad v=|v_p|=2l\omega;$$

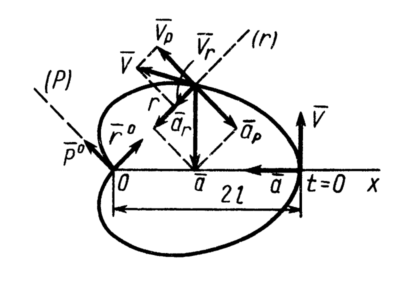


Рис. 24

Рис. 25

$$a_r = -3l\omega^2, \quad a_p = 0, \quad a = |a_r| = 3l\omega^2.$$

Векторы скорости и ускорения для моментов времени t и $t=0$ изображаем на рисунке.

Пример 2. Движение точки задано в прямоугольной системе координат уравнениями

$$x = 4\sin t, \quad y = 3\cos 2t,$$

где x и y — в метрах, t — в секундах.

Определить уравнение траектории в координатной форме, а также скорость, ускорение, касательное и нормальное ускорения, радиальную и трансверсальную составляющие скорости и радиус кривизны траектории в момент времени $t=\pi/6$ с. Изобразить на рисунке траекторию, скорости и ускорения в указанный момент времени.

Решение. Уравнения движения представляют собой уравнение траектории в параметрической форме. Для определения уравнения траектории в координатной форме следует из уравнений движения исключить время t. Имеем:

$$x = 4\sin t; \quad \sin t = x/4;$$

$$y = 3\cos 2t = 3(\cos^2 t - \sin^2 t) = 3(1 - 2\sin^2 t);$$

следовательно,

$$y = 3(1 - x^2/8).$$

Это уравнение параболы. Не все точки параболы являются точками траектории. Так как при любых значениях t $|\sin t| \leqslant 1$ и $|\cos 2t| \leqslant 1$, то из уравнений движения получаем дополнительные ограничения для координат точек траектории $|x| \leqslant 4$, $|y| \leqslant 3$.

Таким образом, точки траектории удовлетворяют условиям

$$y = 3(1 - x^2/8); \quad |x| \leqslant 4; \quad |y| \leqslant 3.$$

Часть точек параболы, не являющихся точками траектории, дополнительно появилась при исключении из уравнений движения параметра t.

На рис. 25 приведена траектория точки. Траекторией является только часть параболы ABC.

Определяем проекции скорости на оси и скорость в любой момент времени:

$$v_x = \dot{x} = 4\cos t; \quad v_y = \dot{y} = -6\sin 2t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16\cos^2 t + 36\sin^2 2t}.$$

При $t = \pi/6$ с

$v_x = 4\cos t = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ м/с; $v_y = -6\sin 2t = -3\sqrt{3} \approx -5{,}2$ м/с; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{39} \approx 6{,}2$ м/с.

Проекции ускорения в любой момент времени определяем по формулам

$$a_x = \ddot{x} = -4\sin t; \quad a_y = \ddot{y} = -12\cos 2t.$$

При $t=\pi/6$ с

$$a_x=-2 \text{ м/с}^2;\; a_y=-6 \text{ м/с}^2;$$
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{40}\approx 6{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Для модуля касательного ускорения при $t=\pi/6$ с имеем

$$|a_\tau|=\left|\frac{dv}{dt}\right|=\left|\frac{-16\cdot 2\cos t\sin t+36\cdot 2\sin 2t\cos 2t\cdot 2}{2\sqrt{16\cos^2 t+36\sin^2 2t}}\right|_{t=\pi/6}=\frac{14\sqrt{3}}{\sqrt{39}}\approx 3{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение при $t=\pi/6$ с

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{40-\frac{196}{13}}=5 \text{ м/с}^2.$$

Для вычисления радиальной скорости предварительно определяем радиус-вектор:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16\sin^2 t+9\cos^2 2t}.$$

Тогда при $t=\pi/6$ с получаем

$$v_r=\dot{r}=\left.\frac{16\cdot 2\sin t\cos t-9\cdot 2\cdot 2\cos 2t\cdot\sin 2t}{2\sqrt{16\sin^2 t+9\cos^2 2t}}\right|_{t=\pi/6}=-\sqrt{3}/5\approx -0{,}3 \text{ м/с}.$$

Трансверсальную скорость при $t=\pi/6$ с определяем по формуле

$$|v_p|=\sqrt{v^2-v_r^2}=\sqrt{39-3/25}\approx 6{,}2 \text{ м/с}.$$

Координаты движущейся точки при $t=\pi/6$ с

$$x=4\sin t|_{t=\pi/6}=2 \text{ м};\quad y=3\cos 2t|_{t=\pi/6}=1{,}5 \text{ м}.$$

По координатам отмечаем положение движущейся точки на траектории и, выбрав масштабы, изображаем векторы скорости и ускорения по их проекциям на оси. Для радиальной составляющей скорости $\bar{v}_r$ учитываем ее направление, противоположное единичному вектору $\bar{r}^0$, так как v_r получилось со знаком минус.

Для трансверсальной составляющей скорости определено только числовое значение. Из рис. 25 следует, что направление вектора $\bar{v}_p$ противоположно направлению единичного вектора $\bar{p}^0$ (направление $\bar{p}^0$ получается поворотом на 90° вектора $\bar{r}^0$ против часовой стрелки). Следовательно, в рассматриваемом случае v_p надо взять со знаком минус, т. е. $v_p=-6{,}2$ м/с.

Для проверки правильности определения v_p можно использовать формулы

$$v_p=r\dot{\varphi},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Нормальное ускорение $\bar{a}_n$ всегда направлено внутрь вогнутости траектории. Направление касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ определяем по $\bar{a}$ и $\bar{a}_n$; оно оказалось направленным по вектору скорости. Следовательно, точка в рассматриваемый момент времени движется ускоренно.

Определим радиус кривизны траектории в момент времени $t=\pi/6$ с. Все необходимые величины для этого уже имеются. Получим

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=39/5\approx 7{,}8 \text{ м}.$$

§ 7. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

При движении точки в пространстве иногда используются цилиндрические оси координат. Они получаются добавлением к полярным координатам на плоскости координаты z, отсчи-

тываемой вдоль неподвижной оси Oz, перпендикулярной плоскости, в которой расположены полярные оси координат (рис. 26).

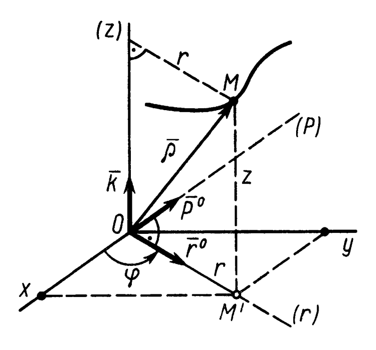


Рис. 26

Положение точки M определяют заданием трех ее цилиндрических координат как функций времени:

$$r = f_1(t);\quad \varphi = (t);\quad z = f_3(t).$$

Разложение векторов скорости и ускорения на составляющие, параллельные осям цилиндрической системы координат Or, Op, Oz, выразится в следующей форме:

$$\bar{v} = v_r \bar{r}^0 + v_p \bar{p}^0 + v_z \bar{k}; \tag{30}$$

$$\bar{a} = a_r \bar{r}^0 + a_p \bar{p}^0 + a_z \bar{k}, \tag{31}$$

где $\bar{r}^0$, $\bar{p}^0$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям цилиндрической системы координат. Оси Or и Op расположены в одной плоскости с осями Ox и Oy.

Представим радиус-вектор $\bar{\rho}$ точки M как сумму двух векторов, т. е.

$$\bar{\rho} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = r\bar{r}^0 + z\bar{k}.$$

Скорость точки получим дифференцированием радиуса-вектора $\bar{\rho}$ по времени:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\bar{r}^0\right) + \frac{d}{dt}\left(z\bar{k}\right).$$

Первое слагаемое в этом выражении вычислялось при выводе формулы (24) для скорости точки в полярных координатах. Было получено

$$(d/dt)\left(r\bar{r}^0\right) = \dot{r}\bar{r}^0 + r\dot{\varphi}\bar{p}^0.$$

Во втором слагаемом постоянный по модулю и направлению единичный вектор $\bar{k}$ можно вынести за знак производной. Для скорости получается следующее разложение на составляющие, параллельные осям цилиндрической системы координат:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{r}^0 + r\dot{\varphi}\bar{p}^0 + \dot{z}\bar{k}. \tag{32}$$

Сравнивая (32) с (30), получаем формулы для проекций скорости на цилиндрические оси координат:

$$v_r = \dot{r};\quad v_p = r\dot{\varphi};\quad v_z = \dot{z}. \tag{33}$$

Так как составляющие скорости $\bar{v}_r$, $\bar{v}_p$ и $\bar{v}_z$, параллельные осям цилиндрической системы координат, взаимно перпендикулярны, то для модуля скорости имеем

$$v=\sqrt{v_r^2+v_p^2+v_z^2}=\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+\dot z^2}.$$

Ускорение точки получим дифференцированием по времени вектора скорости:

$$\bar a=\frac{\mathrm{d}\bar v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot r\bar r^0+r\dot\varphi\bar p^0\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot z\bar k\right).$$

Первое слагаемое в этом выражении вычислялось при выводе ускорения в полярных координатах:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot r\bar r^0+r\dot\varphi\bar p^0\right)=\left(\ddot r-r\dot\varphi^2\right)\bar r^0+\left(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi\right)\bar p^0.$$

Во втором слагаемом при дифференцировании выносим вектор $\bar k$ за знак производной. Объединяя результаты дифференцирования, получим следующее разложение ускорения на составляющие, параллельные осям цилиндрической системы координат:

$$\bar a=\left(\ddot r-r\dot\varphi^2\right)\bar r^0+\left(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi\right)\bar p^0+\ddot z\bar k. \qquad (34)$$

Сравнивая его с (31), получаем формулы для проекций ускорения на цилиндрические оси координат

$$a_r=\ddot r-r\dot\varphi^2;\quad a_p=r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi;\quad a_z=\ddot z. \qquad (35)$$

Составляющие ускорения $\bar a_r$, $\bar a_p$, $\bar a_z$ взаимно перпендикулярны, поэтому для модуля ускорения имеем

$$a=\sqrt{a_r^2+a_p^2+a_z^2}=\sqrt{\left(\ddot r-r\dot\varphi^2\right)^2+\left(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi\right)^2+\ddot z^2}.$$

§ 8. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Положение точки в пространстве в декартовой системе координат определяется тремя координатами: x, y, z. Можно выбрать другие три параметра q_1, q_2, q_3 и назвать их *криволинейными* или *обобщенными* координатами точки. Декартовы координаты будут зависеть от криволинейных:

$$x=x\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right);\quad y=y\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right);\quad z=z\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right).$$

Движение точки в криволинейных координатах задается уравнениями

$$q_1=q_1(t);\quad q_2=q_2(t);\quad q_3=q_3(t).$$

Радиус-вектор $\bar r$ движущейся точки, начало которого находится в неподвижной точке выбранной системы отсчета для рассматриваемого движения, является функцией как декартовых, так и криволинейных координат, т. е.

$$\bar r=\bar r\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right)=\bar r(x,\ y,\ z).$$

Выберем точку O, в которой криволинейные координаты равны нулю, и рассмотрим зависимость $\bar r=\bar r(q_1,\ 0,\ 0)$. Получим

уравнение в векторной форме координатной линии для q_1, проходящей через точку O. Аналогично получаются уравнения координатных линий $\bar{r}=\bar{r}(0, q_2, 0)$ и $\bar{r}=\bar{r}(0, 0, q_3)$, проходящих через точку O для координат q_2 и q_3.

Через каждую точку пространства можно провести три координатные линии, пересекающиеся в этой точке. Вдоль каждой из координатных линий изменяется только одна криволинейная координата, а две другие сохраняют постоянные значения, соответствующие рассматриваемой точке.

Рассмотрим частные производные $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$. Они как производные от вектора по скалярному аргументу направлены по касательным к координатным линиям, являющимся годографами радиуса-вектора. Введем единичные векторы, направленные по векторам $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$. Эти три единичных вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ называются **базисными векторами**. Базисные векторы, как и $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$, направлены в каждой точке по касательным к координатным линиям в сторону возрастания криволинейных координат. Направления возрастания и начало отсчета криволинейных координат выбираются при задании движения.

В общем случае базисные векторы могут быть неортогональными. Используя базисные векторы, получаем

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}=\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right|\bar{e}_i,$$

или

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}=h_i\bar{e}_i \quad (i=1, 2, 3). \tag{36}$$

Скалярные величины $h_i=\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right|$ называются коэффициентами Ламэ.

Для вычисления h_i учтем, что радиус-вектор через декартовы координаты можно выразить в форме

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}, \tag{37}$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям декартовой системы координат. Из (37) имеем

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial x}{\partial q_i}\bar{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\bar{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\bar{k}$$

и, следовательно,

$$h_i=\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \tag{38}$$

Скорость точки в криволинейных координатах. При движении точки ее радиус-вектор через обобщенные координаты зависит от времени, т. е.

$$\bar{r}=\bar{r}\left[q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t)\right].$$

По определению скорости и правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\bar{v}=\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{39}$$

где $\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$ называется *обобщенной скоростью точки*.

Используя (36), из (39) получаем

$$\bar{v}=h_1\dot{q}_1\bar{e}_1+h_2\dot{q}_2\bar{e}_2+h_3\dot{q}_3\bar{e}_3=\sum_{i=1}^{3}h_i\dot{q}_i\bar{e}_i. \tag{40}$$

Получено разложение скорости по осям, направление которых совпадает с направлением базисных векторов.

Для величин составляющих скорости по базисным векторам из (40) имеем

$$v_i=h_i\dot{q}_i\quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{40'}$$

В случае ортогональности базисных векторов по формуле (40′) вычисляются проекции вектора скорости на оси, направленные по базисным векторам. В этом случае для квадрата скорости получаем

$$v^2=(h_1\dot{q}_1)^2+(h_2\dot{q}_2)^2+(h_3\dot{q}_3)^2=\sum_{i=1}^{3}(h_i\dot{q}_i)^2.$$

Ускорение в ортогональных криволинейных координатах. Криволинейные координаты считаются ортогональными, если ортогональны их базисные векторы. В приложениях обычно встречается этот случай. Для ортогональных базисных векторов проекции ускорения точки на их направления вычисляем по формулам

$$a_i=\bar{a}\cdot\bar{e}_i=\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\bar{e}_i\quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{41}$$

Выражая базисные векторы по (36), из (41) получим

$$a_i=\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{h_i}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}=\frac{1}{h_i}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right). \tag{42}$$

Для дальнейших преобразований (42) следует воспользоваться тождествами

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}+\bar{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right); \tag{43}$$

$$\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}=\frac{\partial \dot{\bar r}}{\partial \dot q_i} \text{ или } \frac{\partial \bar r}{\partial q_i}=\frac{\partial \bar v}{\partial \dot q_i}; \tag{44}$$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\left(\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial \dot{\bar r}}{\partial q_i} \text{ или } \frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\left(\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial \bar v}{\partial q_i}. \tag{45}$$

Тождество (43) представляет собой известное правило дифференцирования скалярного произведения двух векторов. Докажем справедливость тождеств Лагранжа (44) и (45).

Тождество (44) получим из (39) дифференцированием $\bar v$, например, по $\dot q_1$. Учитывая, что производные $\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}$ не могут зависеть от $\dot q_i$, имеем

$$\frac{\partial \bar v}{\partial \dot q_1}=\frac{\partial \bar r}{\partial q_1}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial \bar v}{\partial \dot q_2}=\frac{\partial \bar r}{\partial q_2};\quad \frac{\partial \bar v}{\partial \dot q_3}=\frac{\partial \bar r}{\partial q_3},$$

т. е.

$$\frac{\partial \bar v}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Справедливость тождества (44) установлена.

Для доказательства тождества (45) продифференцируем $\bar v$ из (39) по q_i. Получим

$$\frac{\partial \bar v}{\partial q_1}=\frac{\partial^2 \bar r}{\partial q_i \partial q_1}\dot q_1+\frac{\partial^2 \bar r}{\partial q_i \partial q_2}\dot q_2+\frac{\partial^2 \bar r}{\partial q_i \partial q_3}\dot q_3. \tag{46}$$

Учитывая, что $\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}$ не может зависеть от обобщенных скоростей, и дифференцируя ее по времени как сложную функцию времени, имеем

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\left(\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial^2 \bar r}{\partial q_1 \partial q_i}\dot q_1+\frac{\partial^2 \bar r}{\partial q_2 \partial q_i}\dot q_2+\frac{\partial^2 \bar r}{\partial q_3 \partial q_i}\dot q_3. \tag{47}$$

Правые части (46) и (47) совпадают, так как они отличаются только порядком частного дифференцирования, от которого частные производные не зависят. Следовательно, тождество (45) доказано. Используя тождества, преобразуем выражение в скобках из (42). Получим

$$\frac{\mathrm d \bar v}{\mathrm d t}\cdot\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}=\frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\left(\bar v\cdot\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}\right)-\bar v\cdot\frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\left(\frac{\partial \bar r}{\partial q_i}\right)=\frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\left(\bar v\cdot\frac{\partial \bar v}{\partial \dot q_i}\right)-$$

$$-\bar v\cdot\frac{\partial \bar v}{\partial q_i}=\frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\frac{\bar v^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\bar v^2}{2}\right). \tag{48}$$

Учитывая, что $\bar v^2=v^2$, и вводя функцию $T=\frac{v^2}{2}$, из (42) с учетом (48) имеем

$$a_i=\frac{1}{h_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{49}$$

По формулам (49) можно вычислить проекции ускорения точки на оси, направленные по базисным ортогональным векторам.

§ 9. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В качестве примера использования полученных формул вычислим скорость и ускорение точки в сферических координатах. Сферическими координатами точки M являются величины r, φ, θ (рис. 27). Координатной линией для r является прямая (r) с базисным вектором $\bar{e}_r$. Координатной линией для φ служит параллель сферы с базисным вектором $\bar{e}_\varphi$ и координатной линией θ — меридиан сферы с базисным вектором $\bar{e}_\theta$.

Базисные векторы оказались ортогональными. Декартовы координаты x, y, z точки M через сферические выражаются следующими зависимостями:

$$x=r\cos\theta\cos\varphi; \quad y=r\cos\theta\sin\varphi; \quad z=r\sin\theta. \tag{50}$$

По формулам (38) вычисляем коэффициенты Ламэ. Имеем:

$$h_r=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=\sqrt{(\cos\theta\cos\varphi)^2+(\cos\theta\sin\varphi)^2+\sin^2\theta}=1;$$

$$h_\varphi=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(-r\cos\theta\sin\varphi)^2+(r\cos\theta\cos\varphi)^2+0^2}=r\cos\theta;$$

$$h_\theta=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(-r\sin\theta\cos\varphi)^2+(-r\sin\theta\sin\varphi)^2+(r\cos\theta)^2}=r.$$

Проекции скорости на оси, направленные по базисным векторам, определяем согласно (40′). Получаем

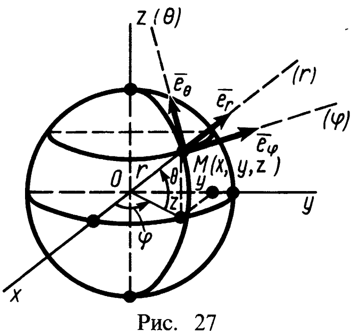


Рис. 27

$$\left.\begin{aligned} v_r&=h_r\dot{r}=\dot{r},\\ v_\varphi&=h_\varphi\dot{\varphi}=r\dot{\varphi}\cos\theta,\\ v_\theta&=h_\theta\dot{\theta}=r\dot{\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

После этого

$$\bar{v}=v_r\bar{e}_r+v_\varphi\bar{e}_\varphi+v_\theta\bar{e}_\theta.$$

Для квадрата скорости и функции T имеем

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2;$$

$$T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\right).$$

Прокции ускорения на оси, направленные по базисным векторам, вычисляем по формулам (49). Имеем

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{1}{h_r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r}\right] = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2, \\ a_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta\right), \\ a_\theta &= \frac{1}{h_\theta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right] = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) + r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Для вектора ускорения получаем

$$\bar{a} = a_r\bar{e}_r + a_\varphi\bar{e}_\varphi + a_\theta\bar{e}_\theta.$$

Модуль ускорения будет иметь следующее выражение:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_\theta^2}.$$

Аналогично можно вычислить ранее полученные скорость и ускорение точки в цилиндрических координатах.

ГЛАВА 2

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ И ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ

Числом степеней свободы твердого тела называют число независимых параметров, определяющих положение тела относительно рассматриваемой системы отсчета.

Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы; тело с одним и тем же числом степеней свободы может совершать различные движения, не похожие друг на друга. Свободное твердое тело в общем случае имеет шесть степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы координат, например декартовой, определяется заданием трех его точек, не лежащих на одной прямой. Расстояния между точками в твердом теле должны оставаться неизменными при любых

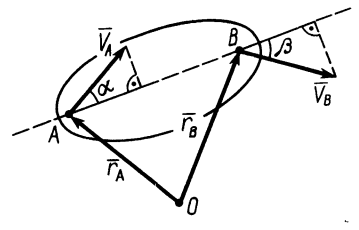


Рис. 28

его движениях. Это накладывает на координаты фиксированных точек три условия. Девять координат должны удовлетворять трем уравнениям. Получаем только шесть независимых координат, которые можно задать произвольно. Оставшиеся три координаты определятся из уравнений для расстояний между точками.

В качестве независимых параметров можно взять любые шесть координат точек или шесть других независимых параметров, которые являются функциями координат трех или большего количества точек тела. У свободной точки три степени свободы и соответственно три независимых параметра, например ее координаты x, y, z. Точка, которая движется по неподвижной поверхности, имеет две степени свободы. При движении точки по неподвижной кривой точка имеет одну степень свободы.

Справедлива теорема: *при любом движении твердого тела проекции скоростей точек на прямую, соединяющую эти точки, равны* (рис. 28).

Для доказательства теоремы используем зависимость радиусов-векторов точек A и B:

$$\bar{r}_B - \bar{r}_A = \overrightarrow{AB} \quad (\overrightarrow{AB} = \bar{l}).$$

Возведем обе части в скалярный квадрат. Имеем

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A) \cdot (\bar{r}_B - \bar{r}_A) = \bar{l}^2 \quad (\bar{l}^2 = l^2),$$

но $l = \text{const}$ для твердого тела. Дифференцируя по времени это выражение, справедливое для любого момента времени, получим

$$2(\bar{r}_B - \bar{r}_A) \cdot \left(\frac{d\bar{r}_B}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt} \right) = 0.$$

Заменив в этом равенстве

$$d\bar{r}_A/dt = \bar{v}_A, \quad d\bar{r}_B/dt = \bar{v}_B, \ \bar{r}_B - \bar{r}_A = \bar{l},$$

получим

$$2\bar{l} \cdot (\bar{v}_B - \bar{v}_A) = 0 \ \text{или} \ \bar{l} \cdot \bar{v}_B = \bar{l} \cdot \bar{v}_A.$$

Раскрывая скалярные произведения векторов и сокращая на l, имеем

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha.$$

Теорема доказана. Очевидно, все точки тела, расположенные на прямой AB, имеют одинаковые проекции скоростей на эту прямую.

Имеется два простейших вида движения твердого тела, комбинированием которых можно получать другие, более сложные его движения. Такими движениями твердого тела являются поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

§ 2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным движением твердого тела называют такое его движение, при котором любая прямая, жестко скрепленная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению в каждый момент времени. Очевидно, достаточно, чтобы это выполнялось только для двух непараллельных прямых, скрепленных с телом.

Поступательно движутся педали у велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения относительно Земли в парках.

Траектории точек у поступательно движущегося твердого тела могут быть не только прямыми, но и любыми кривыми, в том числе окружностями.

Свойства поступательного движения характеризует следующая теорема: *при поступательном движении твердого тела траектории, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы.*

Если выбрать две точки A и B твердого тела, то радиусы-векторы этих точек удовлетворяют условию (рис. 29)

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Для любого твердого тела вектор $\overrightarrow{AB}$ является постоянным по модулю, а при поступательном движении он не изменяется и по направлению.

Уравнение (1) показывает, что годограф радиуса-вектора точки B, являющийся траекторией этой точки, сдвинут по сравнению с годографом радиуса-вектора точки A (траектория точки A) на постоянный вектор $\overrightarrow{AB}$. Если этот сдвиг осуществить, то обе траектории совпадут всеми своими точками. Такие траектории считаются одинаковыми.

Если продифференцировать по времени (1), справедливое для любого момента времени, то получим

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

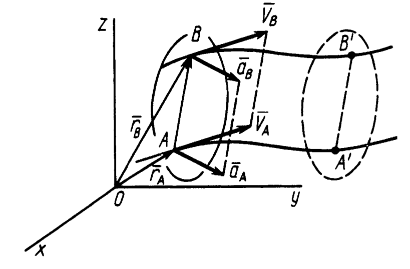


Рис. 29

В этом соотношении $\mathrm{d}\bar{r}_B/\mathrm{d}t=\bar{v}_B$, $\mathrm{d}\bar{r}_A/\mathrm{d}t=\bar{v}_A$. Кроме того, для $\overrightarrow{AB}$, постоянного по модулю и направлению вектора, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{AB})=$ $=0$. Таким образом, для любого момента времени имеем

$$\bar{v}_B=\bar{v}_A. \tag{2}$$

Дифференцируя по времени (2) и учитывая, что

$$\mathrm{d}\bar{v}_B/\mathrm{d}t=\bar{a}_B, \quad \mathrm{d}\bar{v}_A/\mathrm{d}t=\bar{a}_A,$$

получим

$$\bar{a}_B=\bar{a}_A. \tag{3}$$

Теорема о поступательном движении твердого тела полностью доказана.

Движение твердого тела, для которого векторы скоростей точек равны только в один момент времени, а не все время, называется *мгновенным поступательным движением*. Для мгновенного поступательного движения ускорения точек в общем случае не являются одинаковыми.

Поступательное движение твердого тела полностью характеризуется движением одной точки тела. Для задания этого движения достаточно знать координаты какой-либо точки тела как функции времени, т. е.

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t); \quad z=f_3(t). \tag{4}$$

На движение отдельной точки тела при поступательном движении никаких ограничений в общем случае не накладывается. Следовательно, твердое тело, совершающее поступательное движение, имеет три степени свободы и уравнения (4) считаются *уравнениями поступательного движения твердого тела*. Для изучения поступательного движения твердого тела достаточно использовать кинематику одной точки.

§ 3. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через его неподвижные точки. Эта прямая называется *осью вращения тела*.

Если A и B — неподвижные точки тела (рис. 30), то осью вращения является ось Oz, которая может иметь в пространстве любое направление, не обязательно вертикальное. Одно направление оси Oz принимается за положительное.

Через ось вращения проведем неподвижную плоскость Π_0 и подвижную Π, скрепленную с вращающимся телом. Пусть в начальный момент времени обе плоскости совпадают. Тогда в момент времени t положение подвижной плоскости и самого вращающегося тела можно определить двугранным углом между плоскостями и соответствующим линейным углом φ между прямыми, расположенными в этих плоскостях и перпендикулярными оси вращения. Угол φ называется *углом поворота тела.*

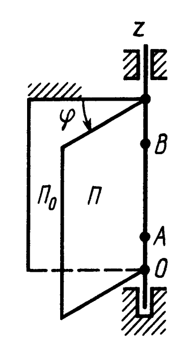


Рис. 30

Положение тела относительно выбранной системы отсчета полностью определяется в любой момент времени, если задано уравнение

$$\varphi = f(t), \tag{5}$$

где $f(t)$ — любая, дважды дифференцируемая функция времени. Это уравнение называют *уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

У тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, одна степень свободы, так как его положение определяется заданием только одного параметра — угла φ.

Угол φ считается положительным, если он откладывается против часовой стрелки, и отрицательным — в противоположном направлении, если смотреть с положительного направления оси Oz. Траектории точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружностями, расположенными в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Для характеристики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси введем понятия угловой скорости и углового ускорения. *Алгебраической угловой скоростью тела* в какой-либо момент времени называют первую производную по времени от угла поворота в этот момент, т. е. $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \dot{\varphi}$. Она является величиной положительной при вращении тела против часовой стрелки, так как угол поворота возрастает с течением времени, и отрицательной — при вращении тела по часовой стрелке, потому что угол поворота при этом убывает.

Модуль угловой скорости обозначают ω. Тогда

$$\omega = |\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t| = |\dot{\varphi}|. \tag{6}$$

Размерность угловой скорости устанавливаем в соответствии с (6):

$$[\omega] = \text{угол}/\text{время} = \text{рад}/\text{с} = \text{с}^{-1}.$$

В технике угловая скорость — это частота вращения, выраженная в оборотах в минуту. За 1 мин тело повернется на угол $2\pi n$, если n — число оборотов в минуту. Разделив этот угол на число секунд в минуте, получим

$$\omega_{c^{-1}}=2\pi n_{об/мин}/60=\pi n_{об/мин}/30\approx 0{,}1 n_{об/мин}. \qquad (7)$$

Алгебраическим угловым ускорением тела называют первую производную по времени от алгебраической скорости, т. е. вторую производную от угла поворота $d^2\varphi/dt^2=\ddot{\varphi}$. Модуль углового ускорения обозначим ε, тогда

$$\varepsilon=|\ddot{\varphi}|. \qquad (8)$$

Размерность углового ускорения получаем из (8):

$$[\varepsilon]=\text{угловая скорость/время}=\text{рад/с}^2=\text{с}^{-2}.$$

Если $\ddot{\varphi}>0$ при $\dot{\varphi}>0$, то алгебраическая угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело вращается ускоренно в рассматриваемый момент времени в положительную сторону (против часовой стрелки). При $\ddot{\varphi}<0$ и $\dot{\varphi}<0$ тело вращается ускоренно в отрицательную сторону. Если $\ddot{\varphi}<0$ при $\dot{\varphi}>0$, то имеем замедленное вращение в положительную сторону. При $\ddot{\varphi}>0$ $\dot{\varphi}<0$, т. е. замедленное вращение совершается в отрицательную сторону.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения. Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела. Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного — их направления противоположны.

Частные случаи вращения твердого тела

Вращение называется *равномерным*, если $\omega=\text{const}$. Алгебраическая угловая скорость отличается от модуля угловой скорости только знаком. Поэтому она тоже постоянна и при интегрировании ее можно вынести за знак интеграла. Имеем

$$d\varphi/dt=\dot{\varphi}; \quad d\varphi=\dot{\varphi}\,dt; \quad \int_0^{\varphi} d\varphi=\dot{\varphi}\int_0^{t} dt; \quad \varphi=\dot{\varphi}t,$$

если принять $\varphi=0$ при $t=0$.

Вращение будет *равнопеременным*, если $\varepsilon=\text{const}$. Алгебраическое угловое ускорение при этом тоже постоянно. Его при интегрировании можно вынести за знак интеграла. Имеем

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi})=\ddot{\varphi}; \quad d\dot{\varphi}=\ddot{\varphi}\,dt; \quad \int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi}=\ddot{\varphi}\int_0^{t} dt;$$

$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0+\ddot{\varphi}t;$$

если $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$ при $t=0$.

Так как

$$\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi};\quad \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0+\ddot{\varphi}t,$$

то

$$\int_0^{\varphi} d\varphi=\dot{\varphi}_0\int_0^t dt+\ddot{\varphi}\int_0^t t\,dt$$

и

$$\varphi=\dot{\varphi}_0 t+\ddot{\varphi}\frac{t^2}{2},$$

если $\varphi=0$ при $t=0$.

В общем случае, если $\ddot{\varphi}$ не постоянно,

$$\dot{\varphi}=\int\ddot{\varphi}\,dt;\quad \varphi=\int\dot{\varphi}\,dt.$$

Скорости и ускорения точек тела

Известно уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси $\varphi=f(t)$ (рис. 31). Расстояние s точки M в подвижной плоскости Π по дуге окружности (траектории точки), отсчитываемое от точки M_0, расположенной в неподвижной плоскости, выражается через угол φ зависимостью $s=h\varphi$, где h — радиус окружности, по которой перемещается точка. Он является кратчайшим расстоянием от точки M до оси вращения. Его иногда называют радиусом вращения точки. У каждой точки тела радиус вращения остается неизменным при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Алгебраическую скорость точки M определяем по формуле

$$v_\tau=\dot{s}=h\dot{\varphi}.$$

Модуль скорости точки

$$v=h\omega. \qquad (9)$$

Скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси. Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость. Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

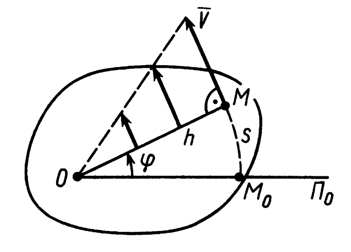


Рис. 31

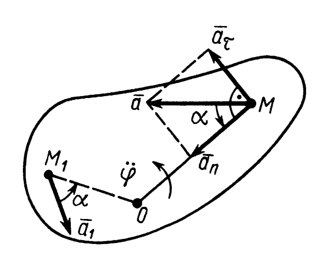


Рис. 32

Скорости точек тела, расположенных на отрезке прямой OM, в соответствии с (9) распределены по линейному закону. Они взаимно параллельны, и их концы располагаются на одной прямой, проходящей через ось вращения.

Ускорение точки разлагаем на касательную и нормальную составляющие, т. е.

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Касательное и нормальное ускорения вычисляются по формулам

$$a_\tau = \ddot{s} = h\ddot{\varphi}; \quad a_n = v^2/\rho = h^2\omega^2/h = h\omega^2,$$

так как для окружности радиус кривизны $\rho = h$ (рис. 32). Таким образом,

$$|a_\tau| = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (10)$$

Касательные, нормальные и полные ускорения точек, как и скорости, распределены тоже по линейному закону. Они линейно зависят от расстояний точек до оси вращения. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения. Направление касательного ускорения зависит от знака алгебраического углового ускорения. При $\dot{\varphi} > 0$ и $\ddot{\varphi} > 0$ или $\dot{\varphi} < 0$ и $\ddot{\varphi} < 0$ имеем ускоренное вращение тела и направления векторов $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}$ совпадают. Если $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ имеют разные знаки (замедленное вращение), то $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}$ направлены противоположно друг другу.

Обозначив α угол между полным ускорением точки и ее радиусом вращения, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = |a_\tau|/a_n = \varepsilon/\omega^2, \qquad (11)$$

так как нормальное ускорение a_n всегда положительно. Угол α для всех точек тела один и тот же. Откладывать его следует от ускорения к радиусу вращения в направлении дуговой стрелки углового ускорения независимо от направления вращения твердого тела.

Пример. Диск *1* вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр O_1 перпендикулярно плоскости диска, по закону $\varphi = (t - t^2)$ (рис. 33) и приводит во вращение диски *2* и *3*, имеющие общую неподвижную ось вращения и жестко скрепленные друг с другом.

Определить угловые скорости дисков, а также скорости и ускорения точек их соприкосновения A в момент времени $t=5$ с, если радиусы дисков $r_1=20$ см, $r_2=30$ см, $r_3=20$ см; скольжение между дисками отсутствует.

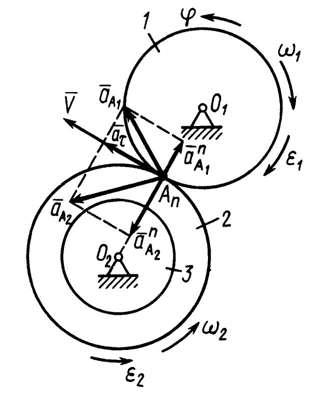


Рис. 33

Решение. Определяем алгебраические угловую скорость и угловое ускорение диска *1*. Имеем

$$\dot{\varphi}=1-2t;\quad \ddot{\varphi}=-2.$$

В момент времени $t=5$ с соответственно

$$\dot{\varphi}=-9;\quad \omega_1=|\dot{\varphi}|=9\ \text{с}^{-1};$$

$$\ddot{\varphi}=-2;\quad \varepsilon_1=|\ddot{\varphi}|=2\ \text{с}^{-2}.$$

В этот момент времени дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения следует направить в сторону, противоположную положительному направлению угла φ, так как алгебраические угловая скорость и угловое ускорение оказались отрицательными.

Скорости и касательные ускорения точек соприкосновения дисков *1* и *2* при отсутствии скольжения между ними одинаковы. Поэтому

$$v=r_1\omega_1=r_2\omega_2;\quad v=r_1\omega_1=180\ \text{см/с};$$

$$|a_\tau|=r_1\varepsilon_1=r_2\varepsilon_2;\quad |a_\tau|=r_1\varepsilon_1=40\ \text{см/с}^2.$$

Кроме того,

$$\omega_2=r_1\omega_1/r_2=6\ \text{с}^{-1};\quad \varepsilon_2=r_1\varepsilon_1/r_2=|a_\tau|/r_2=4/3\approx 1{,}3\ \text{с}^{-2}.$$

Дуговые стрелки для ω_2 и ε_2 следует направить в стороны, противоположные дуговым стрелкам для ω_1 и ε_1 соответственно.

Диски *2* и *3* жестко скреплены друг с другом, поэтому их угловые скорости и угловые ускорения одинаковы, т. е.

$$\omega_3=\omega_2=6\ \text{с}^{-1};\quad \varepsilon_3=\varepsilon_2\approx 1{,}3\ \text{с}^{-2}.$$

Определяем нормальные ускорения точек A дисков *1* и *2*. Для диска *1* получаем

$$a^n_{A_1}=r_1\omega_1^2=20\cdot 81=1620\ \text{см/с}^2=16{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Для диска *2* соответственно

$$a^n_{A_2}=r_2\omega_2^2=30\cdot 36=1080\ \text{см/с}^2=10{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Полные ускорения точек соприкосновения дисков

$$a_{A_1}=\sqrt{(a_\tau)^2+(a^n_{A_1})^2}\approx 16{,}2\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{A_2}=\sqrt{(a_\tau)^2+(a^n_{A_2})^2}\approx 10{,}87\ \text{м/с}^2.$$

Векторы скоростей и ускорений точек A дисков *1* и *2* и составляющие ускорений этих точек изображены на рис. 33.

Векторы угловой скорости и углового ускорения

Введем понятия векторов угловой скорости и углового ускорения тела. Если $\bar{k}$ — единичный вектор оси вращения, направленный в ее положительную сторону, то векторы угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ определяют выражениями

$$\bar{\omega}=\dot{\varphi}\bar{k};\quad \bar{\varepsilon}=\ddot{\varphi}\bar{k}. \qquad (12)$$

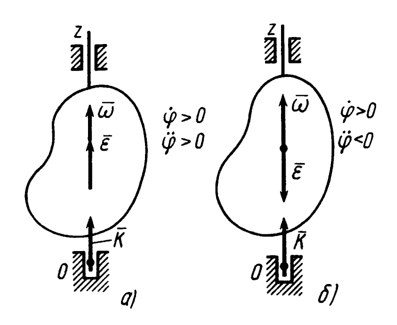


Рис. 34

Так как $\bar{k}$ — постоянный по модулю и направлению вектор, то из (12) следует, что

$$\bar{\varepsilon} = \mathrm{d}\bar{\omega}/\mathrm{d}t. \tag{13}$$

При $\dot{\varphi}>0$ и $\ddot{\varphi}>0$ направления векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ совпадают. Они оба направлены в положительную сторону оси вращения Oz (рис. 34, *а*). Если $\dot{\varphi}>0$ и $\ddot{\varphi}<0$, то они направлены в противоположные стороны (рис. 34, *б*). Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении и противоположен ему при замедленном.

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ можно изображать в любых точках оси вращения. Они являются векторами скользящими. Это их свойство следует из векторных формул для скоростей и ускорений точек тела.

Векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела

Выразим скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки тела в векторной форме. Скорость точки по модулю и направлению можно представить векторным произведением

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{14}$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки M, проведенный из произвольной точки оси вращения Oz, например точки O (рис. 35). Выражение (14) называется *векторной формулой Эйлера.* Убедимся в справедливости этой формулы проверкой. Действительно, вектор $\bar{\omega}\times\bar{r}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы, входящие в векторное произведение. По направлению он параллелен скорости $\bar{v}$, направленной по касательной к окружности. Модуль векторного произведения

$$|\bar{\omega}\times\bar{r}| = \omega r \sin(\bar{\omega}, \hat{\ } \bar{r}) = \omega h = v,$$

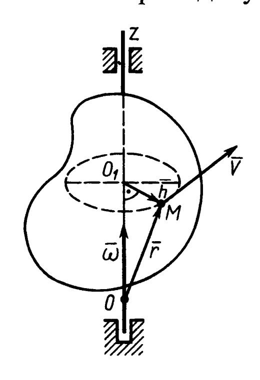


Рис. 35

так как $r\sin(\bar{\omega}, \hat{\ } \bar{r}) = h$. Таким образом, векторное произведение $\bar{\omega}\times\bar{r}$ по модулю и направлению определяет скорость точки. Следует только считать этот вектор приложенным в точке M; он не зависит от точки приложения вектора $\bar{\omega}$ на оси вращения, а также точки оси, в которой помещено

начало вектора $\bar{r}$. В частности, в качестве радиуса-вектора $\bar{r}$ можно использовать вектор $\bar{h}$, направив его из точки O_1 в точку M.

Из определения ускорения и векторной формулы Эйлера имеем

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{r})=\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Учитывая, что

$$d\bar{\omega}/dt=\bar{\varepsilon};\quad d\bar{r}/dt=\bar{v},$$

получаем

$$\bar{a}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\bar{v}. \qquad (15)$$

Рис. 36

Первое слагаемое в (15) является касательным ускорением, а второе — нормальным, т. е.

$$\bar{a}_\tau=\bar{\varepsilon}\times r;\quad \bar{a}_n=\bar{\omega}\times\bar{v}=\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=-\bar{h}\omega^2. \qquad (16)$$

В справедливости (16) убеждаемся вычислением их правых частей. Имеем

$$|\bar{\varepsilon}\times\bar{r}|=\varepsilon r\sin(\bar{\varepsilon},\widehat{\ }\bar{r})=\varepsilon h,$$

что совпадает с касательным ускорением. Направление вектора $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}$ параллельно вектору касательного ускорения (рис. 36).

Для векторного произведения $\bar{\omega}\times\bar{v}$ имеем

$$|\bar{\omega}\times\bar{v}|=\omega v\sin(\bar{\omega},\widehat{\ }\bar{v})=\omega v=h\omega^2=a_n,$$

так как векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{v}$ взаимно перпендикулярны. Направление вектора $\bar{\omega}\times\bar{v}$ параллельно вектору нормального ускорения и направлено от точки M к оси вращения, поэтому

$$\bar{a}_n=-\bar{h}\omega^2,$$

если условиться вектор $\bar{h}$ направлять от оси вращения. Справедливость формул (16) установлена.

Из определения скорости точки известно, что

$$\bar{v}=d\bar{r}/dt,$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки, проведенный из любой неподвижной точки, в частности из любой точки на оси вращения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Но скорость точки при вращательном движении тела определяется по векторной формуле Эйлера

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Сопоставление двух формул для скорости точки дает формулу для вычисления производной по времени от вектора $\bar{r}$:

$$d\bar{r}/dt=\bar{\omega}\times\bar{r}. \qquad (17)$$

В этой формуле вектор $\bar{r}$ имеет постоянный модуль, так как соединяет все время две точки твердого тела. Вектор $\bar{\omega}$,

являясь угловой скоростью вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, выполняет также роль угловой скорости вращения вектора $\bar{r}$, жестко скрепленного с телом.

Формула (17) остается справедливой также для вектора $\bar{r}$, начало которого находится в любой точке тела, а не только на оси вращения. По этой формуле вычисляется производная по времени от любого вектора, величина которого постоянна.

§ 4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Основные понятия

Для изучения некоторых, более сложных видов движений твердого тела целесообразно рассмотреть простейшее сложное движение точки. Во многих задачах движение точки приходится рассматривать относительно двух (и более) систем отсчета, движущихся друг относительно друга. Так, движение космического корабля, движущегося к Луне, требуется рассматривать одновременно и относительно Земли и относительно Луны, которая движется относительно Земли. Любое движение точки можно считать сложным, состоящим из нескольких движений. Например, движение корабля по реке относительно Земли можно считать сложным, состоящим из движения по воде и вместе с текущей водой.

В простейшем случае сложное движение точки состоит из относительного и переносного движений. Определим эти движения. Пусть имеем две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга. Если одну из этих систем $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 37) принять за основную или неподвижную (ее движение относительно других систем отсчета не рассматривается), то вторая система отсчета $Oxyz$ будет двигаться относительно первой. Движение точки относительно п о д в и ж н о й системы отсчета $Oxyz$ называется *относительным*. Характеристики этого движения, такие, как траектория, скорость и ускорение, называются *относительными*. Их обозначают индексом r; для скорости и ускорения $\bar{v}_r$, $\bar{a}_r$. Движение точки относительно о с н о в н о й, или н е п о д в и ж н о й, системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется *абсолютным* (или *сложным*). Его также иногда называют *составным* движением. Траектория, скорость и ускорение этого движения называются а б с о л ю т н ы м и. Скорость и ускорение абсолютного движения обозначают буквами $\bar{v}$, $\bar{a}$ без индексов. Переносным движени-

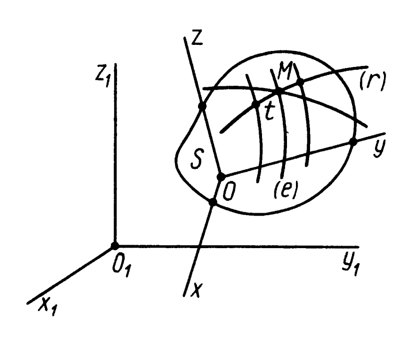


Рис. 37

ем точки называют движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Вследствие относительного движения движущаяся точка в различные моменты времени совпадает с различными точками тела S, с которым скреплена подвижная система отсчета. Переносной скоростью и переносным ускорением являются скорость и ускорение той точки тела S, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. Переносные скорость и ускорение обозначают $\bar{v}_e$, $\bar{a}_e$.

Если траектории всех точек тела S, скрепленного с подвижной системой отсчета, изобразить на рисунке (рис. 37), то получим семейство линий — семейство траекторий переносного движения точки M. Вследствие относительного движения точки M в каждый момент времени она находится на одной из траекторий переносного движения. Точка M может совпадать только с одной точкой каждой из траекторий этого семейства переносных траекторий. В связи с этим иногда считают, что траекторий переносного движения нет, так как приходится считать траекториями переносного движения линии, у которых только одна точка фактически является точкой траектории.

В кинематике точки изучалось движение точки относительно какой-либо системы отсчета независимо от того, движется эта система отсчета относительно других систем или нет. Дополним это изучение рассмотрением сложного движения, в простейшем случае состоящего из относительного и переносного. Одно и то же абсолютное движение, выбирая различные подвижные системы отсчета, можно считать состоящим из разных переносных и соответственно относительных движений.

Сложение скоростей

Определим скорость абсолютного движения точки, если известны скорости относительного и переносного движений этой точки. Пусть точка совершает только одно относительное движение по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$ и в момент времени t занимает на траектории относительного движения положение M (рис. 38). В момент времени $t+\Delta t$ вследствие относительного движения точка окажется в положении M_1, совершив перемещение MM_1 по траектории относительного движения. Предположим, что точка участвует

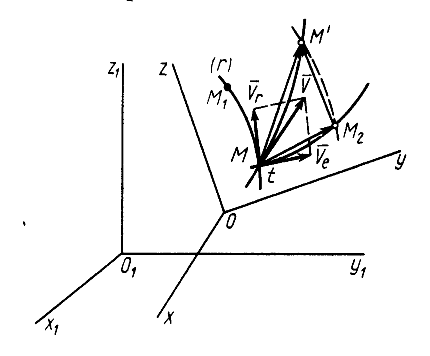


Рис. 38

только в одном переносном движении. Тогда за время Δt вследствие этого движения вместе с системой координат $Oxyz$ и относительной траекторией она переместится по некоторой кривой на MM_2. Если точка участвует одновременно и в относительном и в переносном движениях, то за время Δt она переместится на MM' по траектории абсолютного движения и в момент времени $t+\Delta t$ займет положение M'. Если время Δt мало и в дальнейшем переходят к пределу при Δt, стремящемся к нулю, то малые перемещения по кривым можно заменить отрезками хорд и принять их за векторы перемещений. Складывая векторные перемещения, получаем

$$\overrightarrow{MM'}/\Delta t = \overrightarrow{MM_2}/\Delta t + \overrightarrow{M_2M'}/\Delta t; \quad M_2M' = MM_1.$$

В этом отношении отброшены малые величины более высокого порядка, стремящиеся к нулю при Δt, стремящемся к нулю. Переходя к пределу, имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_2M'}}{\Delta t}. \quad (18)$$

Пределы величин, входящих в это соотношение, являются соответственно скоростями абсолютного, переносного и относительного движений точки, т. е.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}; \quad \bar{v}_e = \lim \frac{\overrightarrow{MM_2}}{\Delta t}; \quad \bar{v}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_2M'}}{\Delta t}.$$

Следовательно, (18) примет форму

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (19)$$

Получена так называемая теорема сложения скоростей: *скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме скоростей переносного и относительного движений этой точки.* Так как в общем случае скорости переносного и относительного движений не перпендикулярны, то

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2 v_e v_r \cos(\bar{v}_e, \wedge \bar{v}_r)}. \quad (19')$$

Пример. Капля дождя падает вертикально вниз со скоростью $\bar{v}$ относительно Земли (рис. 39). Определить траекторию и скорость относительно движения капли по отношению к автомобилю, движущемуся прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью $\bar{u}$ относительно Земли.

Решение. Движение капли считаем сложным, состоящим из переносного движения вместе с автомобилем и относительного по отношению к автомобилю. По теореме сложения скоростей,

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Рис. 39

В рассматриваемом случае $\bar{v}_e=\bar{u}$ и $\bar{v}$ перпендикулярна $\bar{u}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha=u/v;\quad v_r=\sqrt{u^2+v^2}.$$

Траектории падения капель дождя относительно автомобиля наклонены к вертикали на угол α. На рисунке пунктиром показаны следы капель дождя на вертикальном стекле автомобиля.

При очень большой скорости автомобиля по сравнению со скоростью падения капли дождя

$$\operatorname{tg}\alpha=u/v$$

стремится к бесконечности, а угол α — к предельному значению, равному 90°. Относительная предельная скорость капли дождя равна по величине и противоположна по направлению скорости автомобиля, т. е. $(\bar{v}_r)_{пр}=-\bar{u}$.

Сложение ускорений при поступательном переносном движении

Определим ускорение абсолютного движения в частном случае поступательного переносного движения. Общий случай сложения ускорений при произвольном переносном движении рассматривается в гл. 5. Для любого переносного движения справедлива теорема сложения скоростей

$$\bar{v}=\bar{v}_e+\bar{v}_r.$$

Если подвижная система отсчета $Oxyz$ движется поступательно относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$, то по свойству поступательного движения все точки тела, скрепленного с этой системой, имеют одинаковые скорости и ускорения, равные скорости и ускорению начала координат подвижной системы координат точки O. Следовательно, для скорости и ускорения переносного движения имеем

$$\bar{v}_e=\bar{v}_0;\quad \bar{a}_e=\bar{a}_0.$$

Выразим относительную скорость в декартовых координатах. Получим

$$\bar{v}_r=v_{rx}\bar{i}+v_{ry}\bar{j}+v_{rz}\bar{k}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по подвижным осям координат; x, y, z — координаты движущейся точки относительно этих осей (рис. 40). Подставляя в теорему сложения скоростей значения переносной и относительной скоростей, имеем

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}.$$

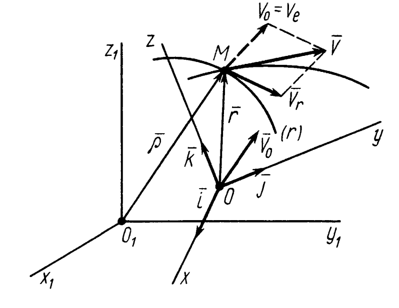


Рис. 40

По определению абсолютное ускорение выражается производной по времени от абсолютной скорости, т. е.

$$\bar{a}=\mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\bar{v}_0+\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}),$$

причем изменение абсолютной скорости $\bar{v}$ и других векторов $\bar{v}_0$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ следует учитывать по отношению к неподвижной системе осей координат $O_1x_1y_1z_1$. Выполняя дифференцирование, получим

$$\bar{a}=\mathrm{d}\bar{v}_0/\mathrm{d}t+\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}+\ddot{z}\bar{k};\quad \mathrm{d}\bar{v}_0/\mathrm{d}t=\bar{a}_0=\bar{a}_e, \tag{20}$$

так как производные по времени от единичных векторов равны нулю. При поступательном движении подвижной системы отсчета они не изменяются ни по модулю, ни по направлению. Используя (20) и выражение для относительного ускорения в декартовых координатах

$$\bar{a}_r=\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}+\ddot{z}\bar{k},$$

получим следующее выражение для теоремы сложения ускорений точки при поступательном переносном движении:

$$\bar{a}=\bar{a}_e+\bar{a}_r, \tag{21}$$

т. е. *абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении равно векторной сумме ускорений переносного и относительного движений.*

В общем случае переносное ускорение $\bar{a}_e$ и относительное $\bar{a}_r$ не перпендикулярны, поэтому

$$a=\sqrt{a_e^2+a_r^2+2a_ea_r\cos(\bar{a}_e,\wedge\ \bar{a}_r)}. \tag{21'}$$

ГЛАВА 3
ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоским движением твердого тела называют такое его движение, при котором каждая его точка все время движется в одной и той же плоскости. Плоскости, в которых движутся отдельные точки, параллельны между собой и параллельны одной и той же неподвижной плоскости. Поэтому плоское движение твердого тела часто называют плоскопараллельным движением. Траектории точек тела при плоском движении являются плоскими кривыми.

Плоское движение твердого тела имеет большое значение в технике, так как звенья большинства механизмов и машин, применяемых в технике, совершают плоское движение. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси можно считать частным случаем плоского движения.

При изучении плоского движения, как и любого другого, необходимо рассмотреть способы задания этого движения, а также приемы вычисления скоростей и ускорений точек тела.

Пусть твердое тело совершает плоское движение, параллельное неподвижной плоскости Π_0 (рис. 41). Тогда любая прямая, перпендикулярная этой плоскости и жестко скрепленная своими точками с движущимся телом, будет двигаться поступательно, т. е. все точки этой прямой движутся одинаково.

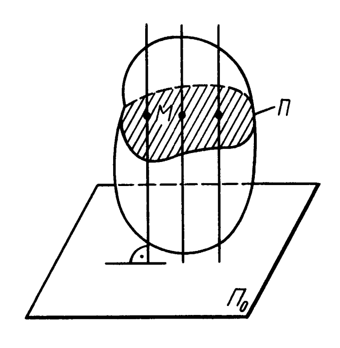


Рис. 41

Следовательно, для изучения движения точек, лежащих на рассматриваемой прямой, достаточно изучить движение одной точки этой прямой, например точки M. Рассуждая аналогично для любой другой прямой, перпендикулярной плоскости Π_0 и скрепленной с движущимся твердым телом, можно сделать вывод, что для изучения плоского движения твердого тела достаточно изучить движение точек этого тела, лежащих в какой-либо плоскости Π, параллельной неподвижной плоскости Π_0, т. е. точек тела, лежащих в сечении рассматриваемого тела плоскостью Π и образующих плоскую фигуру.

Таким образом, для изучения плоского движения твердого тела достаточно изучить движение плоской фигуры в ее плоскости, параллельной неподвижной плоскости Π_0. Положение фигуры на ее плоскости полностью определяется положением отрезка прямой линии, жестко скрепленной с этой плоской фигурой. Различные по форме твердые тела, совершающие плоское движение, имеют в сечениях разные плоские фигуры. В общем случае за плоскую фигуру примем всю плоскость и, следовательно, рассмотрим движение этой подвижной плоскости по другой, неподвижной плоскости.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для задания положения плоской фигуры на плоскости относительно системы координат $O_1x_1y_1$, лежащей в плоскости фигуры, достаточно задать на этой плоскости положение отрезка OM (рис. 42), скрепленного с фигурой. Положение отрезка OM относительно системы координат $O_1x_1y_1$ определится заданием координат какой-либо точки этого отрезка и его направления. Например, для точки O нужно задать координаты x_0, y_0, а направление задать углом ψ, который образует отрезок OM с какой-либо осью, например O_1x_1, или ей параллельной осью Ox'_1. Вместо угла ψ можно взять угол между любой другой осью или отрезком, скрепленными с плоской фигурой, и осью O_1x_1, например угол φ. Тогда $\psi=\varphi+\alpha$, где α не зависит от времени. Таким образом,

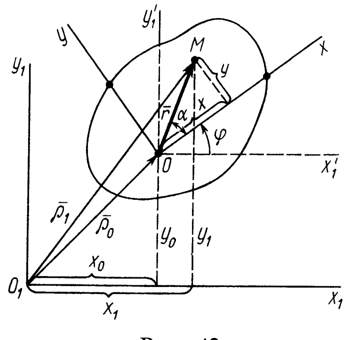


Рис. 42

уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости, а следовательно, и плоского движения твердого тела относительно системы координат $O_1x_1y_1$ имеют вид

$$x_0=f_1(t);\quad y_0=f_2(t);\quad \varphi=f_3(t).$$

Положение любой точки M плоской фигуры относительно подвижной системы координат Oxy, скрепленной с этой движущейся фигурой и лежащей в ее плоскости, полностью определяется заданием координат x и y точки M, которые при движении плоской фигуры в ее плоскости не изменяются с изменением времени. Между координатами точки M в двух системах координат $O_1x_1y_1$ и Oxy существует следующая зависимость (рис. 42):

$$x_1=x_0+r\cos(\alpha+\varphi);\quad y_1=y_0+r\sin(\alpha+\varphi),$$

где r — длина отрезка OM; α — постоянный угол между отрезком OM и осью Ox.

Раскрывая косинус и синус суммы двух углов и учитывая, что $r\cos\alpha=x$; $r\sin\alpha=y$, получаем окончательные формулы в следующем виде:

$$x_1=x_0+x\cos\varphi-y\sin\varphi;\quad y_1=y_0+y\cos\varphi+x\sin\varphi. \tag{1}$$

Формулы (1) являются уравнениями движения точки плоской фигуры относительно системы координат $O_1x_1y_1$.

Эти формулы позволяют определить координаты любой точки плоской фигуры по заданным уравнениям движения этой фигуры и координатам ее точки относительно подвижной системы координат, скрепленной с движущейся фигурой.

Используя векторно-матричную символику, (1) можно выразить в форме

$$\bar{\rho}_1=\bar{\rho}_0+A\bar{r}, \tag{1'}$$

где A — матрица поворота на плоскости:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ

Любое движение твердого тела, в том числе и движение плоской фигуры в ее плоскости, бесчисленным множеством способов можно разложить на два движения, одно из которых переносное, а другое — относительное. В частности, движение

плоской фигуры в ее плоскости относительно системы координат $O_1x_1y_1$, расположенной в той же плоскости (рис. 42), можно разложить на переносное и относительное движения следующим образом. Примем за переносное движение фигуры ее движение вместе с поступательно движущейся системой координат $Ox'_1y'_1$, начало которой скреплено с точкой O фигуры, принятой за полюс. Тогда относительное движение фигуры будет по отношению к подвижной системе координат $Ox'_1y'_1$ вращением вокруг подвижной оси, перпендикулярной плоской фигуре и проходящей через выбранный полюс O.

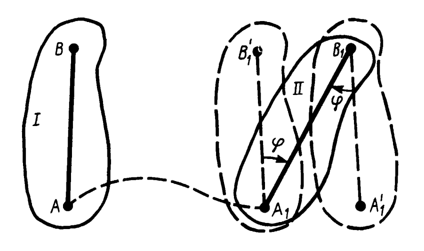


Рис. 43

Для доказательства этого достаточно показать, что плоскую фигуру в ее плоскости из одного положения в любое другое, в том числе и бесконечно близкое первому, можно перевести двумя перемещениями — поступательным перемещением в плоскости фигуры вместе с каким-либо полюсом и поворотом в той же плоскости вокруг этого полюса. Рассмотрим два любых положения плоской фигуры *I* и *II* в ее плоскости, определяемые двумя положениями отрезка AB, скрепленного с этой фигурой (рис. 43).

В общем случае, когда отрезок AB в одном положении не параллелен тому же отрезку в другом положении, из рис. 43 следует, что плоскую фигуру действительно сначала можно переместить поступательно, например вместе с точкой A этой фигуры, причем скрепленный с фигурой отрезок AB займет положение $A_1B'_1$, а затем повернуть фигуру вокруг точки A_1 на угол φ до совпадения $A_1B'_1$ с A_1B_1.

В частном случае, когда отрезок AB параллелен отрезку A_1B_1, угол φ равен нулю и, следовательно, вращательного перемещения в этом случае не будет. Очевидно, что в общем случае, когда φ не равно нулю, сначала плоскую фигуру можно повернуть на угол φ вокруг точки A, а затем переместить поступательно. И наконец, совершая плоское поступательное перемещение вместе с точкой A, фигуру можно поворачивать вокруг этой точки так, чтобы в момент совпадения точки A с точкой A_1 эта фигура повернулась на угол φ.

Действительное плоское перемещение фигуры из положения *I* в положение *II* может быть любым, но его всегда можно заменить двумя простыми плоскими перемещениями — поступательным и вращательным — так, чтобы конечное положение плоской фигуры в обоих случаях было одним и тем же.

Действительное перемещение фигуры в ее плоскости из одного положения в другое, бесконечно близкое к первому, в пределе можно точно заменить двумя элементарными простыми плоскими перемещениями — поступательным и вращательным. При

этом поступательное перемещение фигуры вместе с какой-либо ее точкой является переносным движением плоской фигуры, а вращение фигуры вокруг подвижной оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через выбранную точку,— относительным движением.

Поступательное перемещение зависит от выбора точки фигуры, вместе с которой совершается это поступательное перемещение, в то время как угол поворота вокруг полюса не зависит от выбора полюса.

На рис. 43 показаны случаи, когда за полюсы выбираются сначала точка A, а затем точка B. Штриховой линией указаны положения плоской фигуры после поступательных перемещений вместе с точками A и B.

§ 3. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Для характеристики вращательной части плоского движения твердого тела вокруг подвижной оси, проходящей через выбранный полюс, аналогично случаю вращения твердого тела вокруг неподвижной оси можно ввести понятия угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения $\bar{\varepsilon}$. Если угол поворота вокруг подвижной оси, проходящей через полюс, обозначить φ, то

$$\omega=|d\varphi/dt|;\quad \varepsilon=|d\omega/dt|=|d^2\varphi/dt^2|.$$

Так как вращательная часть движения не зависит от выбора полюса, то и характеристики этой части движения — угловая скорость и угловое ускорение — также не зависят от выбора полюса. Следовательно, для заданного плоского движения фигуры в данный момент они одинаковы относительно подвижной оси, проходящей через любую точку фигуры.

При плоском движении тела угловую скорость и угловое ускорение можно считать векторами, направленными по подвижной оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через выбранный полюс. Вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ при плоском движении фигуры направлен по подвижной оси так, чтобы с конца его стрелки можно было видеть вращение фигуры против часовой стрелки. Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ при ускоренном вращении фигуры совпадает с направлением вектора угловой скорости $\bar{\omega}$, а при замедленном вращении эти векторы имеют противоположные направления. Так как $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ не зависят от выбора полюса на плоской фигуре, то, следовательно, их можно приложить в любой точке фигуры, не изменяя модулей и направлений этих векторов, т. е. $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются *свободными векторами.* Вектор углового ускорения является первой производной по времени от вектора угловой скорости, т. е. $\bar{\varepsilon}=d\bar{\omega}/dt$.

§ 4. СКОРОСТИ ТОЧЕК ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Применяя к плоскому движению теорему о сложении скоростей для какой-либо точки B фигуры, получаем

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{Be} + \bar{v}_{Br}, \tag{2}$$

где $\bar{v}_B$ — абсолютная скорость точки B плоской фигуры относительно системы координат, по отношению к которой рассматривается движение фигуры; $\bar{v}_{Be}$ — скорость точки B от переносного поступательного движения фигуры вместе, например, с точкой A этой фигуры (рис. 44, *а*); $\bar{v}_{Br}$ — скорость точки B в относительном движении, которым является вращение плоской фигуры вокруг точки A с угловой скоростью ω.

Так как за переносное движение выбрано поступательное движение вместе с точкой A, то все точки плоской фигуры имеют одинаковые переносные скорости, совпадающие с абсолютной скоростью точки A, т. е.

$$\bar{v}_{Be} = \bar{v}_A.$$

Скорость относительного движения, в случае когда оно является вращательным движением, равна

$$v_{Br} = \omega AB.$$

Скорость $\bar{v}_{Br}$ расположена в плоскости движущейся фигуры и направлена перпендикулярно отрезку AB, соединяющему точку B с полюсом A. Эту относительную скорость можно выразить в виде векторного произведения:

$$\bar{v}_{Br} = \bar{\omega} \times \overrightarrow{AB},$$

где угловая скорость $\bar{\omega}$ считается направленной по подвижной оси вращения, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости фигуры. Относительную скорость $\bar{v}_{Br}$ обозначим $\bar{v}_{BA}$. Это обозначение показывает, что скорость относительного движения точки B получается от вращения плоской фигуры

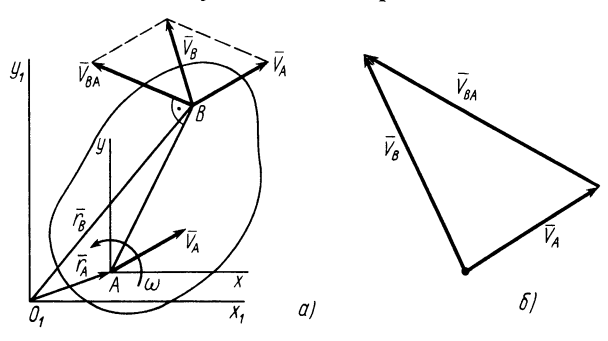


Рис. 44

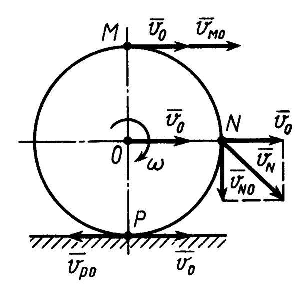


Рис. 45

вокруг подвижной оси, проходящей через точку A, или просто вокруг точки A. Формулу (2) можно выразить в виде

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (3)$$

где

$$v_{BA} = \omega\, AB, \quad (4)$$

а вектор $\bar{v}_{BA}$ перпендикулярен отрезку AB и направлен в сторону вращения плоской фигуры (рис. 44, *а*). Используя (3), можно построить в выбранном масштабе треугольник скоростей для точки B (рис. 44, *б*).

Таким образом, *скорость какой-либо точки фигуры при ее плоском движении равна векторной сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки от вращения фигуры вокруг полюса.* Формула (3) выражает зависимость между скоростями двух любых точек тела при плоском движении в любой момент времени.

Пример. Колесо радиусом R (рис. 45) катится со скольжением по прямой линии, имея в рассматриваемый момент времени скорость центра $\bar{v}_O$ и угловую скорость ω. Определить в этот момент времени скорости точек обода колеса M, P и N, расположенных на концах вертикального и горизонтального диаметров.

Решение. Для точки M скорости полюса $\bar{v}_O$ и от вращения вокруг полюса $\bar{v}_{MO}$ направлены по одной прямой в одну и ту же сторону. Следовательно, по формуле (3),

$$v_M = v_O + v_{MO},$$

где

$$v_{MO} = \omega\, OM = \omega R.$$

Для точки P скорости $\bar{v}_O$ и $\bar{v}_{PO}$ противоположны по направлению, поэтому

$$v_P = v_O - v_{PO},$$

причем

$$v_{PO} = \omega OP = \omega R.$$

При качении колеса по прямой линии без скольжения скорость точки P равна нулю и, следовательно, в этом случае скорость центра v_O и угловая скорость ω связаны соотношением

$$v_O = v_{PO} = \omega R.$$

Отсюда угловую скорость можно выразить через скорость центра колеса v_O и его радиус:

$$\omega = v_{PO}/OP = v_O/R.$$

В точке N скорости $\bar{v}_O$ и $\bar{v}_{NO}$ перпендикулярны. Следовательно,

$$v_N = \sqrt{v_O^2 + v_{NO}^2},$$

где

$$v_{NO} = \omega ON = \omega R.$$

Отметим, что при качении колеса по прямой без скольжения скорости точек обода колеса не направлены по касательной к ободу, за исключением самой верхней его точки M.

Формулу (3), устанавливающую зависимость скоростей двух точек плоской фигуры, можно получить непосредственным дифференцированием по времени векторного равенства

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overrightarrow{AB},$$

справедливого для любого момента времени (см. рис. 44, *а*).

При дифференцировании векторов учитываем их изменения относительно основной, неподвижной, системы координат $O_1x_1y_1$, т. е. вычисляем полные производные от этих векторов. Имеем

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB}).$$

Очевидно, $d\bar{r}_B/dt = \bar{v}_B$, $d\bar{r}_A/dt = \bar{r}_A$ — скорости точек B и A. Вектор $\overrightarrow{AB}$ соединяет две точки плоской фигуры и, следовательно, не изменяется по модулю при движении плоской фигуры. Производную по времени от такого вектора как вектора постоянного модуля по скалярному аргументу можно выразить в форме

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB}) = \bar{\omega} \times \overrightarrow{AB},$$

где $\bar{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения $\overrightarrow{AB}$, а следовательно, и плоской фигуры, с которой скреплен вектор $\overrightarrow{AB}$.

Окончательно имеем

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overrightarrow{AB}.$$

Если ввести обозначение $\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overrightarrow{AB}$, то

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA},$$

т. е. получаем формулу (3).

§ 5. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ

В каждый момент времени при плоском движении фигуры в ее плоскости, если $\omega \neq 0$, *имеется единственная точка этой фигуры, скорость которой равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей.* Обозначим ее P.

Для доказательства этой теоремы достаточно указать способ нахождения мгновенного центра скоростей, если известны по модулю и направлению скорость какой-либо точки O плоской фигуры и угловая скорость этой фигуры в рассматриваемый момент времени. Пусть вращение происходит по часовой стрелке ($\dot{\varphi} < 0$ и $\omega = |\dot{\varphi}|$) (рис. 46). Скорость точки P плоской фигуры равна нулю, если скорость полюса O и скорость от вращения вокруг полюса O в этой точке равны по модулю,

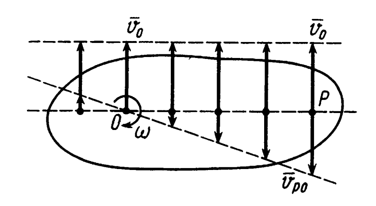


Рис. 46

но противоположны по направлению. Эти точки лежат на перпендикуляре к скорости $\bar{v}_O$ в точке O. В других точках векторная сумма двух векторов не может быть равна нулю.

Итак, если $\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{v}_{PO} = 0$, то $\bar{v}_{PO} = -\bar{v}_O$; $v_{PO} = v_O$.

Но

$$v_{PO} = \omega OP;$$

следовательно,

$$OP = v_{PO}/\omega = v_O/\omega.$$

Таким образом, мгновенный центр скоростей находится на перпендикуляре к скорости $\bar{v}_O$, проведенном из точки O, на расстоянии $OP = v_O/\omega$.

Мгновенный центр скоростей является единственной точкой плоской фигуры для данного момента времени. В другой момент времени мгновенным центром является уже другая точка плоской фигуры.

Если мгновенный центр известен, то, приняв его за полюс и учитывая, что скорость его в этом случае равна нулю, согласно (3) и (4), для точки A фигуры имеем

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{AP}; \quad v_A = v_{AP} = \omega AP, \tag{5}$$

где AP — расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей.

По направлению скорость $\bar{v}_A$ в этом случае перпендикулярна отрезку AP. Для точки B, аналогично,

$$v_B = \omega BP, \tag{6}$$

причем скорость $\bar{v}_B$ перпендикулярна отрезку BP.

Из (5) и (6) имеем

$$\omega = v_A/AP = v_B/BP \tag{7}$$

и

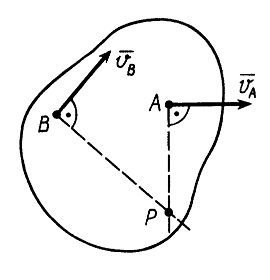
$$v_A/v_B = AP/BP. \tag{8}$$

Следовательно, *если мгновенный центр скоростей известен, то скорости точек плоской фигуры при ее движении в своей плоскости вычисляют так же, как и в случае вращения фигуры в рассматриваемый момент вокруг своего мгновенного центра скоростей с угловой скоростью* ω.

Для нахождения скоростей точек тела при его плоском движении обычно предварительно находят мгновенный центр скоростей. Но можно применить формулу, выражающую зависимость между скоростями двух точек тела.

Рассмотрим способы нахождения мгновенного центра скоростей. Существует два основных способа его нахождения: из механических условий задачи и по скоростям точек плоской фигуры.

В некоторых случаях удается сразу указать точку плоской фигуры, скорость которой в рассматриваемый момент равна нулю. Эти точки в таких задачах и являются мгновенными центрами скоростей. Так, в случае качения без скольжения одного тела по поверхности другого неподвижного тела точка



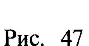


Рис. 47

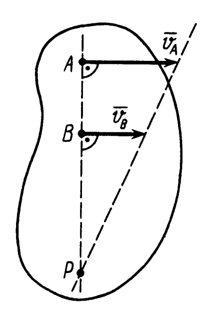


Рис. 48

соприкосновения поверхностей тел и является мгновенным центром скоростей.

Например, при качении без скольжения колеса по неподвижной прямой линии (см. рис. 52) и одного колеса по неподвижному другому колесу (см. рис. 61) мгновенный центр скоростей находится в точках соприкосновения колеса с прямой и соответственно колеса с колесом. В общем случае, *если известны скорости двух точек плоской фигуры* (рис. 47), *мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к скоростям этих точек.*

В том случае, когда точки лежат на общем перпендикуляре к скоростям этих точек, скорости точек параллельны и концы их лежат на одной прямой, проведенной через мгновенный центр скоростей (рис. 48 и 49), так как скорости точек пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей. Если скорости двух точек, расположенных на общем перпендикуляре к этим скоростям, еще и равны (рис. 50), то имеем мгновенное поступательное движение плоской фигуры, при котором скорости всех точек фигуры одинаковы по модулю и направлению. Угловая скорость плоской фигуры при мгновенном поступательном движении равна нулю, и в этом случае, согласно формуле (7), мгновенный центр скоростей находится в бесконечности.

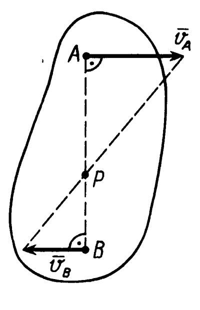


Рис. 49

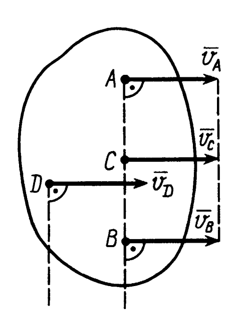


Рис. 50

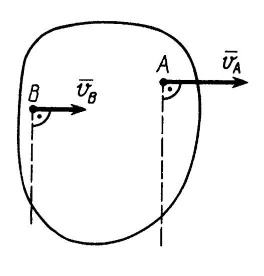




Рис. 51

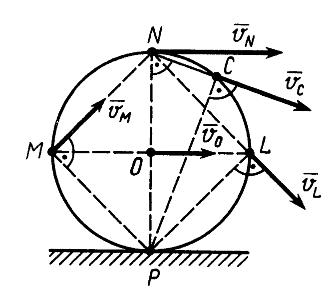


Рис. 52

Заметим, что при мгновенном поступательном движении только скорости точек одинаковы, а их ускорения в общем случае различны. Невозможен случай, когда скорости двух точек, не лежащих на общем перпендикуляре к скоростям, не равны друг другу по модулю, но параллельны (рис. 51), так как для него не выполняется теорема о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки.

Пример. Колесо радиусом R (рис. 52) катится без скольжения по неподвижной прямой, имея скорость центра $\bar{v}_O$. Определить скорости точек M, N и L обода колеса в данный момент времени.

Решение. Мгновенный центр скоростей в этом случае находится в точке P соприкосновения колеса с прямой. Угловая скорость колеса определяется по формуле (7):

$$\omega=\frac{v_O}{OP}=\frac{v_O}{R}.$$

По формуле (5) для скоростей указанных точек имеем

$$v_M=v_L=\omega MP=v_O\sqrt{2};\quad v_N=\omega NP=2v_O,$$

так как

$$MP=LP=R\sqrt{2}.$$

Скорости точек колеса направлены по перпендикулярам к отрезкам прямых, соединяющих мгновенный центр скоростей с рассматриваемыми точками.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Угловую скорость плоской фигуры при плоском движении можно вычислить, согласно ее определению, как

$$\omega=|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t|.$$

Затем ее можно определить по формуле (7):

$$\omega=v_A/AP=v_B/BP.$$

Чтобы определить угловую скорость, надо скорость какой-либо точки плоской фигуры разделить на расстояние от этой точки до мгновенного центра скоростей. Направление вращения определяем по направлению скорости какой-либо

точки, считая, что плоская фигура в данный момент вращается вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью ω.

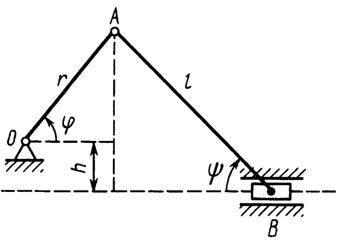


Рис. 53

Угловую скорость при плоском движении можно вычислить путем предварительного нахождения скорости какой-либо точки плоской фигуры от вращения фигуры вокруг другой ее точки, принятой за полюс, например $\bar{v}_{BA}$ или $\bar{v}_{CA}$. Тогда угловая скорость, согласно формуле (4),

$$\omega = v_{BA}/AB = v_{CA}/AC.$$

Знак угловой скорости определяют по направлению относительной скорости какой-либо точки фигуры от вращения фигуры вокруг другой ее точки, выбранной за полюс.

Применяют и другие способы определения угловой скорости. Так, если предварительно установить зависимость угла поворота плоской фигуры от линейных и угловых величин других плоских фигур тождественным соотношением, то, дифференцируя его по времени, получаем соотношение, из которого иногда удается определить искомую угловую скорость. Этот способ используют часто для нахождения зависимости угловых скоростей отдельных звеньев плоских механизмов.

Пример. В кривошипно-шатунном механизме (рис. 53) даны длины кривошипа r, шатуна l и расстояние h от оси вращения кривошипа до направляющей ползуна B. Установить зависимость между угловыми скоростями кривошипа ω и шатуна ω_1 при любом положении механизма.

Решение. Положение кривошипа OA определяется углом φ, а шатуна AB — углом ψ. До тех пор пока $\varphi < \frac{\pi}{2}$, справедливо тождество

$$r \sin\varphi + h = l \sin\psi.$$

Дифференцируя это тождество по времени, получим

$$r \cos\varphi \dot{\varphi} = l \cos\psi \dot{\psi}.$$

Но $|\dot{\varphi}| = \omega$, $|\dot{\psi}| = \omega_1$; следовательно,

$$r\omega \cos\varphi = l\omega_1 \cos\psi.$$

Полученное соотношение и является искомой зависимостью между угловыми скоростями кривошипа и шатуна. При $h=0$ имеем частный случай кривошипно-шатунного механизма. Если дополнительно $l=r$, то $\psi=\varphi$ и $\omega_1=\omega$.

Направления вращений кривошипа и шатуна противоположны. При вращении кривошипа против часовой стрелки шатун вращается по часовой стрелке.

§ 7. УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Рассматривая плоское движение плоской фигуры как сложное, состоящее из переносного поступательного вместе с полюсом A и относительного вращательного вокруг A, по теореме о сложении ускорений для точки B имеем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{Be} + \bar{a}_{Br}. \tag{9}$$

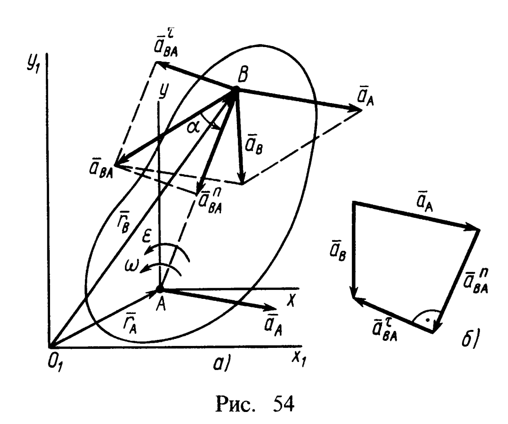


Рис. 54

Так как переносное движение является поступательным вместе с точкой A фигуры, то переносное ускорение

$$\bar{a}_{Be} = \bar{a}_A.$$

Относительное ускорение $\bar{a}_{Br}$ точки B от вращения вокруг полюса A обозначим $\bar{a}_{BA}$. После этого формула (9) принимает вид

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \tag{10}$$

т. е. *ускорение какой-либо точки плоской фигуры при плоском движении равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения этой точки от вращательного движения плоской фигуры вокруг полюса.*

Ускорение от относительного вращательного движения вокруг полюса, как и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси, состоит из касательной и нормальной составляющих $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ и $\bar{a}_{BA}^{n}$:

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}, \tag{11}$$

причем

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon AB; \tag{12}$$

$$a_{BA}^{n} = \omega^2 AB \tag{13}$$

и

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{\tau})^2 + (a_{BA}^{n})^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{14}$$

Касательное относительное ускорение $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ направлено по перпендикуляру к отрезку AB в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε (рис. 54, *а*). Нормальное относительное ускорение $\bar{a}_{BA}^{n}$ соответственно направлено по линии AB от точки B к полюсу A. Наконец, полное относительное ускорение $\bar{a}_{BA}$ составляет с отрезком AB угол α, тангенс которого можно определить по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = |\bar{a}_{BA}^{\tau}| / |\bar{a}_{BA}^{n}| = \varepsilon/\omega^2. \tag{15}$$

Из формулы (15) следует, что угол α для всех точек плоской фигуры одинаков. При $\ddot{\varphi} > 0$ угол α от ускорения $\bar{a}_{BA}$ к отрезку BA надо откладывать против часовой стрелки. При $\ddot{\varphi} < 0$ его надо откладывать по часовой стрелке, т. е. во всех случаях, независимо от направления вращения фигуры, угол α *всегда надо откладывать в направлении дуговой стрелки углового ускорения.* В соответствии с (10) и (11) можно построить в выбранном масштабе многоугольник ускорений для точки B (рис. 54, *б*).

Формулу (10), определяющую зависимость ускорений двух точек плоской фигуры, можно получить непосредственным дифференцированием векторного равенства для скоростей, справедливого в любой момент времени. Имеем

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overrightarrow{AB}.$$

Продифференцируем по времени обе части этого равенства, учитывая изменения векторных величин относительно неподвижной системы координат (полные производные). Получаем

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

Здесь $d\bar{v}_B/dt = \bar{a}_B$, $d\bar{v}_A/dt = \bar{a}_A$ — ускорения точек B и A относительно неподвижной системы координат; $d\bar{\omega}/dt = \bar{\varepsilon}$ — угловое ускорение плоской фигуры. У вектора $\overrightarrow{AB}$ постоянный модуль; следовательно, его производная по времени выражается в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \bar{\omega} \times \overrightarrow{AB}.$$

Объединяя полученные результаты, получаем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right).$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые проведены для скорости $\bar{v}_{BA}$, позволяют сделать вывод о том, что

$$\bar{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} = \bar{a}_{BA}^{\tau}; \qquad \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right) = \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{n},$$

т. е. $\bar{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB}$ и $\bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right)$ являются соответственно касательным и нормальным ускорениями от вращения плоской фигуры вокруг точки A. Следовательно,

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}.$$

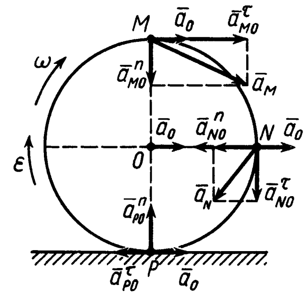


Рис. 55

Пример. Колесо радиусом R катится со скольжением по неподвижной прямой, совершая плоское движение (рис. 55). Ускорение центра колеса в рассматриваемый момент времени $\bar{a}_O$, а угловая скорость и угловое ускорение колеса ω и ε. Дуговые стрелки для ω и ε направлены по часовой стрелке, т. е. $\dot{\varphi} < 0$ и $\ddot{\varphi} < 0$. Определить в этот момент времени ускорения точек M, N и P, расположенных на концах вертикального и горизонтального диаметров обода колеса.

Решение. Ускорение точки M, приняв за полюс точку O, определим по формуле

$$\bar{a}_M = \bar{a}_O + \bar{a}^n_{MO} + \bar{a}^\tau_{MO}$$

и аналогичным формулам для точек N и P. Для касательного и нормального ускорений точки M от вращения колеса вокруг точки O имеем

$$a^\tau_{MO} = \varepsilon OM = \varepsilon R; \quad a^n_{MO} = \omega^2 OM = \omega^2 R.$$

Ускорение $\bar{a}^\tau_{MO}$ перпендикулярно отрезку OM и направлено в сторону, указываемую дуговой стрелкой ε, а ускорение $\bar{a}^n_{MO}$ направлено от точки M к точке O, принятой за полюс. Аналогично направлены ускорения для точек N и P.

Так как для точки M ускорения $\bar{a}_O$ и $\bar{a}^\tau_{MO}$ направлены по одной прямой, то, предварительно их сложив, получим две перпендикулярные составляющие ускорения и, следовательно,

$$a_M = \sqrt{(a^n_{MO})^2 + (a_O + a^\tau_{MO})^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + (a_O + R\varepsilon)^2}.$$

Для точки N

$$a^\tau_{NO} = a^\tau_{MO}; \quad a^n_{NO} = a^n_{MO},$$

так как

$$ON = OM = R.$$

Окончательно для точки N имеем

$$a_N = \sqrt{(a_O - a^n_{NO})^2 + (a^\tau_{NO})^2} = \sqrt{(a_O - R\omega^2)^2 + R^2\varepsilon^2}.$$

Для точки P соответственно

$$a_P = \sqrt{(a_O - a^\tau_{PO})^2 + (a^n_{PO})^2} = \sqrt{(a_O - R\varepsilon)^2 + R^2\omega^4}.$$

В том случае, когда колесо катится без скольжения, точка P является мгновенным центром скоростей и скорость точки P в любой момент времени равна нулю. Скорость точки O в этом случае можно определить по формуле

$$v_O = \omega OP = \omega R.$$

Дифференцируя по времени обе части этого тождества и приравнивая результат дифференцирования, получим

$$\mathrm{d}v_O/\mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t,$$

или

$$a_O = a^\tau_O = R\varepsilon,$$

так как точка O движется прямолинейно, и

$$\varepsilon = |\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t|; \quad a^\tau_O = |\mathrm{d}v_O/\mathrm{d}t|.$$

Учитывая, что

$$a^\tau_{PO} = \varepsilon OP = \varepsilon R = a_O,$$

имеем

$$a_O - a^\tau_{PO} = 0.$$

Следовательно, при качении колеса по прямой без скольжения

$$\bar{a}_P = \bar{a}^n_{PO} \neq 0,$$

т. е. ускорение мгновенного центра скоростей, скорость которого равна нулю, не равно нулю.

Если угловое ускорение не задано, то при отсутствии скольжения колеса по прямой его можно определить по формуле

$$\varepsilon = a_O/R.$$

§ 8. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

В каждый момент движения плоской фигуры в своей плоскости, если ω и ε *не равны нулю одновременно, имеется единственная точка этой фигуры, ускорение которой равно*

нулю. Эту точку называют мгновенным центром ускорений. Обозначим ее через Q. Для доказательства этой теоремы предположим, что известны по модулю и направлению ускорение какой-либо точки плоской фигуры, угловая скорость и угловое ускорение этой фигуры. Пусть $\ddot{\varphi} < 0$ (рис. 56). Мгновенный центр ускорений лежит на линии, проведенной под углом α к ускорению точки, тангенс которого вычисляем по формуле

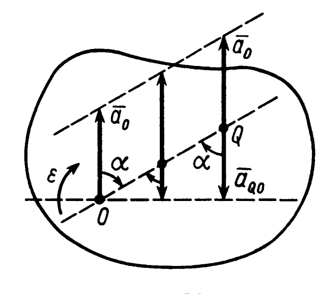


Рис. 56

$$\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2.$$

При этом угол α надо отложить от ускорения $\bar{a}_O$ в направлении дуговой стрелки углового ускорения ε, т. е. в рассматриваемом случае по часовой стрелке. Только в точках этой прямой ускорение $\bar{a}_O$ и ускорение от вращения $\bar{a}_{QO}$ могут иметь противоположные направления и одинаковые значения, т. е.

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_O + \bar{a}_{QO} = 0,$$

и тогда

$$\bar{a}_{QO} = -\bar{a}_O.$$

Но

$$a_{QO} = OQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_O;$$

следовательно,

$$OQ = a_{QO}/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_O/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Из приведенного доказательства следует, что мгновенный центр ускорений является единственной точкой плоской фигуры, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно нулю. В другой момент времени мгновенный центр ускорений находится в общем случае в другой точке плоской фигуры.

Если мгновенный центр ускорений известен, то, выбрав его за полюс, для ускорения точки A плоской фигуры по формуле (10) получаем

$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ} = \bar{a}_{AQ},$$

так как

$$\bar{a}_Q = 0$$

и, следовательно,

$$a_A = a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (16)$$

Ускорение $\bar{a}_A$ направлено под углом α к отрезку AQ, соединяющему точку A с мгновенным центром ускорений в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε (рис. 57).

Для точки B, аналогично,

$$a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (17)$$

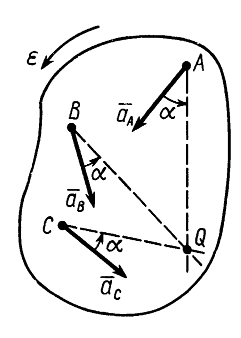


Рис. 57

и ускорение $\bar{a}_B$ также направлено под углом α к отрезку BQ.

Из формул (16) и (17) имеем

$$a_A/a_B = AQ/BQ, \tag{18}$$

т. е. ускорения точек плоской фигуры при плоском движении пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра ускорений.

Итак, суммируя результаты, получаем, что *ускорения точек плоской фигуры при плоском движении можно определить так же, как и при вращательном движении плоской фигуры вокруг мгновенного центра ускорений с угловой скоростью* ω *и угловым ускорением* ε.

Для вычисления скоростей точек плоской фигуры при плоском движении принимают, что плоская фигура вращается вокруг мгновенного центра скоростей, а для вычисления ускорения следует считать, что она вращается вокруг мгновенного центра ускорений.

При качении без скольжения колеса по прямой (см. пример в § 7) получается, что ускорение мгновенного центра скоростей не равно нулю; следовательно, *в общем случае мгновенные центры скоростей и ускорений являются различными точками плоской фигуры.*

Ускорения точек плоской фигуры при плоском движении, подобно скоростям точек, можно определять двумя способами: по формуле (10), выражающей зависимость ускорений двух точек плоской фигуры, и по формуле (16), используя мгновенный центр ускорений. Обычно мгновенный центр ускорений, кроме частных случаев, когда угловая скорость или угловое ускорение равны нулю, располагается на плоской фигуре так, что трудно определить расстояние от него до рассматриваемых точек фигуры. Поэтому определение ускорения точек рекомендуется вычислять по формуле (10).

Рассмотрим способы нахождения мгновенного центра ускорений как в частных, так и в общем случаях.

1. Пусть известно, что угловое ускорение $\varepsilon = 0$, а угловая скорость $\omega \neq 0$. Очевидно, это возможно в случае, когда плоская фигура вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью или когда угловая скорость достигает относительно наибольшего или наименьшего значения. В этом случае для угла α

$$\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2 = 0$$

и, следовательно, угол $\alpha = 0$.

Мгновенный центр ускорений лежит на прямой линии, по которой направлено ускорение какой-либо точки плоской

фигуры (рис. 58). Так как это справедливо для любой точки фигуры, то, следовательно, мгновенный центр ускорений лежит в точке пересечения прямых линий, по которым направлены ускорения точек плоской фигуры. Ускорения точек плоской фигуры в этом случае направлены к мгновенному центру ускорений, так как они состоят только из одной относительной нормальной составляющей от вращения вокруг мгновенного центра ускорений.

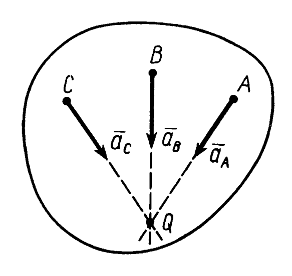


Рис. 58

Если известно ускорение, например точки A, то мгновенный центр ускорений можно найти по расстоянию AQ:

$$AQ = a_A/\omega^2.$$

Эта формула получается из (16) в том случае, когда угловое ускорение равно нулю.

2. Пусть угловая скорость $\omega = 0$, а угловое ускорение $\varepsilon \neq 0$. Это возможно при мгновенном поступательном движении. Тогда

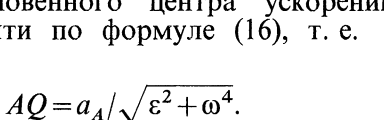
$$\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2 = \infty$$

и, следовательно, угол α — прямой. Его надо откладывать от ускорения точки в направлении дуговой стрелки углового ускорения. Мгновенный центр ускорений лежит на пересечении перпендикуляров к ускорениям точек плоской фигуры, проведенных из этих точек (рис. 59). Если известно числовое значение ускорения какой-либо точки A, то расстояние от A до мгновенного центра ускорений можно вычислить по формуле $AQ = a_A/\varepsilon$, которая получается из формулы (16) при $\omega = 0$.

3. В общем случае, когда угловая скорость ω и угловое ускорение ε известны и не равны нулю, для угла α имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2 \neq 0.$$

Мгновенный центр ускорений лежит на пересечении прямых линий, проведенных к ускорениям точек фигуры под одним и тем же углом α, причем угол α нужно откладывать от ускорений точек в направлении дуговой стрелки углового ускорения независимо от направления угловой скорости плоской фигуры (см. рис. 57). Если известно ускорение, например точки A, то расстояние от точки A до мгновенного центра ускорений можно найти по формуле (16), т. е.



$$AQ = a_A/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Рис. 59

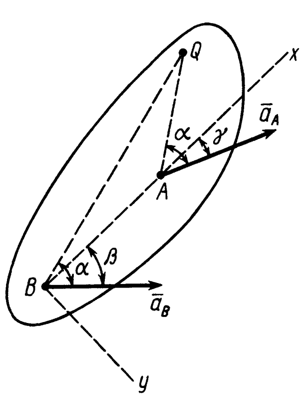


Рис. 60

4. Пусть в данный момент времени известны ускорения двух точек плоской фигуры: A и B (рис. 60). Укажем способ нахождения мгновенного центра ускорений в этом случае. По формулам (10)...(13), приняв за полюс точку A, имеем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}, \qquad (19)$$

где

$$a^n_{BA} = AB\omega^2, \qquad a^\tau_{BA} = AB\varepsilon.$$

Проецируя левую и правую части векторной формулы (19) на две взаимно перпендикулярные оси Bx и By, получаем

$$a_B \cos\beta = a_A \cos\gamma + AB\omega^2; \qquad a_B \sin\beta = a_A \sin\gamma + AB\varepsilon,$$

где β и γ — известные углы соответственно между ускорениями $\bar{a}_B$ и $\bar{a}_A$ и положительным направлением оси Bx.

При принятом направлении оси Bx проекцию $\bar{a}^n_{BA}$ на эту ось надо взять со знаком плюс, так как $\bar{a}^n_{BA}$ направлена всегда от точки B к полюсу A. Проекцию ускорения $\bar{a}^\tau_{BA}$ на ось By предположительно возьмем с плюсом, считая дуговую стрелку ε в рассматриваемом случае направленной против часовой стрелки. Определяя ω^2 и ε, легко находим

$$\omega^2 = (a_B \cos\beta - a_A \cos\gamma)/AB; \quad \varepsilon = (a_B \sin\beta - a_A \sin\gamma)/AB.$$

Естественно, что в реальных случаях величина ω^2, найденная из полученной формулы, должна оказаться положительной. Знак же углового ускорения ε определяется знаком правой части формулы для ε.

После того как найдены ε и ω^2, задача нахождения мгновенного центра ускорений сводится к уже рассмотренному случаю 3.

§ 9. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

При вычислении ускорений точек фигуры при плоском движении необходимо знать угловое ускорение. Рассмотрим некоторые приемы его определения.

1. Если известен угол поворота или угловая скорость в зависимости от времени, то угловое ускорение ε определяем путем дифференцирования их по времени, т. е.

$$\varepsilon = |\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t| = |\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2|.$$

2. Обычно требуется определить угловое ускорение в какой-либо момент времени по другим величинам, известным

в этот же момент времени. В этом случае угловое ускорение тоже можно получить путем дифференцирования угловой скорости по времени, считая ее для вывода формулы известной функцией времени. Угловую скорость можно найти по формуле (7):

$$\omega = v_A / AP,$$

где A — точка плоской фигуры; P — мгновенный центр скоростей.

Дифференцируя ω по времени, получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{AP}\frac{dv_A}{dt} + v_A \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{AP}\right).$$

В тех случаях, когда AP постоянно,

$$\varepsilon = a_A^{\tau} / AP, \tag{20}$$

так как

$$\varepsilon = |d\omega/dt|; \qquad a_A^{\tau} = |dv_A/dt|,$$

где a_A^{τ} — касательное ускорение точки A.

Так, например, при качении колеса без скольжения по неподвижной прямой линии (см. рис. 55), если за точку A взять центр колеса O, то, учитывая, что он движется прямолинейно, получим

$$\varepsilon = a_O / R,$$

так как в этом случае

$$OP = R = \text{const} \quad \text{и} \quad a_O^{\tau} = a_O,$$

где R — радиус колеса.

При качении без скольжения одного колеса по неподвижному другому колесу сначала установим зависимость между угловой скоростью ω_1 подвижного колеса и угловой скоростью ω кривошипа OA (рис. 61). Учитывая, что мгновенный центр скоростей подвижного колеса лежит в точке соприкосновения колес, получаем

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{r} = \omega\,\frac{R+r}{r}, \tag{21}$$

где R — радиус неподвижного колеса; r — радиус подвижного колеса.

Дифференцируя по времени (21), имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{R+r}{r}\,\varepsilon, \tag{22}$$

так как

$$\varepsilon_1 = |d\omega_1/dt|; \qquad \varepsilon = |d\omega/dt|.$$

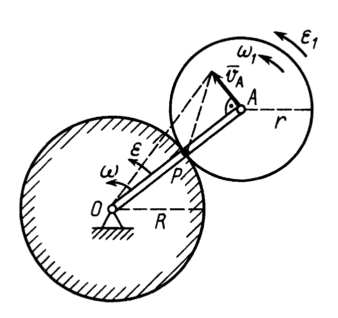


Рис. 61

Из сравнения (21) и (22) видно, что связь между угловыми скоростями и угловыми ускорениями колес полностью

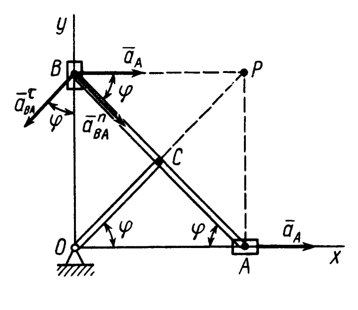


Рис. 62

аналогична. Это справедливо и для углов поворота колес, если нулевые их значения выбрать в один и тот же момент времени.

При внешнем зацеплении дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения подвижного колеса совпадают с дуговыми стрелками соответственно угловой скорости и углового ускорения кривошипа OA.

При внутреннем зацеплении колес дуговые стрелки ω и ε колеса и кривошипа имеют противоположные направления.

3. Иногда угловое ускорение ε можно найти путем проецирования на оси координат известного по направлению ускорения, например точки B, если ускорение какой-либо другой точки A и угловая скорость фигуры ω известны или их можно вычислить предварительно.

Так, если ускорение точки B

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}, \tag{23}$$

то, проецируя обе части (23) на ось Ox, перпендикулярную ускорению $\bar{a}_B$, получаем соотношение, из которого можно определить угловое ускорение, если другие величины, входящие в это соотношение, известны.

Определим этим способом угловое ускорение линейки эллипсографа AB (рис. 62). Эллипсографом называют механизм, в котором одна точка A его линейки движется только по оси Ox, а другая B — по оси Oy. Линейка эллипсографа обычно приводится в движение вращением кривошипа OC вокруг оси O, причем точка C лежит на середине линейки и описывает окружность с центром в точке O, а точки части линейки BC описывают всевозможные эллипсы, заключенные между окружностью и прямой Oy. Точки части линейки AC соответственно могут описать набор эллипсов, заключенных между окружностью и прямой Ox.

В эллипсографе, когда ускорения точек A и B направлены соответственно по осям Ox и Oy, проецируя (23) на Ox, получаем

$$0 = a_A + AB\omega^2 \cos\varphi - AB\varepsilon \sin\varphi, \tag{24}$$

так как

$$a^{n}_{BA} = AB\omega^2; \qquad a^{\tau}_{BA} = AB\varepsilon.$$

Соотношение (24) и служит для определения углового ускорения линейки эллипсографа AB, если все другие величины в этом соотношении известны или их можно предварительно определить.

Описанным выше приемом удобно определять угловое ускорение шатунов в различных кривошипно-шатунных механизмах, когда у шатуна есть точка, движущаяся прямолинейно.

Если известны ускорения двух точек A и B плоской фигуры по модулю и направлению в какой-либо момент времени, то путем проецирования соотношения (23) на два взаимно перпендикулярных направления, одно из которых удобно направить по AB, получим два уравнения для определения угловой скорости и углового ускорения (см. п. 4 § 8).

Наоборот, по угловой скорости и угловому ускорению из этих уравнений можно найти числовые значения ускорений точек A и B, если известны направления ускорений этих точек.

4. В задачах (см. § 6, рис. 53), где зависимость между угловыми скоростями различных тел можно установить путем дифференцирования по времени тождественных соотношений между углами поворота, зависимость между угловыми ускорениями часто можно получить путем двукратного дифференцирования по времени этих тождеств. Так, после первого дифференцирования в рассматриваемом случае

$$r\cos\varphi\,\dot{\varphi} = l\cos\psi\,\dot{\psi}.$$

Дифференцируя вторично, имеем

$$-r\sin\varphi\,\dot{\varphi} + r\cos\varphi\,\ddot{\varphi} = -l\sin\psi\,\dot{\psi} + l\cos\psi\,\ddot{\psi}.$$

Так как $\varepsilon_1 = |\ddot{\psi}|$ — угловое ускорение шатуна AB и $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$ — угловое ускорение кривошипа OA, то

$$-r\omega^2\sin\varphi + r\varepsilon\cos\varphi = -l\omega_1^2\sin\psi + l\varepsilon_1\cos\psi.$$

Если дополнительно известно, что угловая скорость ω кривошипа OA постоянна, т. е. $\varepsilon = 0$, то

$$-r\omega^2\sin\varphi = -l\omega_1^2\sin\psi + l\varepsilon_1\cos\psi.$$

Отсюда можно определить угловое ускорение шатуна в зависимости от углов φ и ψ и угловых скоростей ω и ω_1.

Пример. Диск радиусом $r = 0{,}25$ м приводится в движение от кривошипа OA и вертикальной рейки (рис. 63). От кривошипа движение диску передается при помощи шатуна AC. Рейка движется поступательно по закону $s = 2t^2$ м; кривошип вращается согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t$. Угол φ отсчитывается от горизонтального направления.

Определить угловые скорость и ускорение диска и шатуна, а также скорости и ускорения точек B, C, D, мгновенные центры скоростей и ускорений диска в момент времени $t = 1$ с, если $OA = AC = 1$ м и точки D диска и O кривошипа расположены на одной горизонтальной прямой.

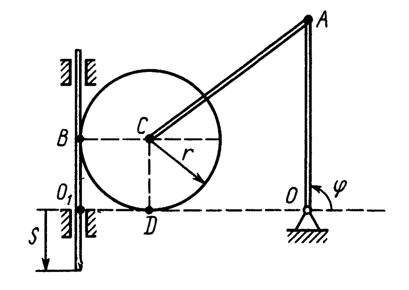


Рис. 63

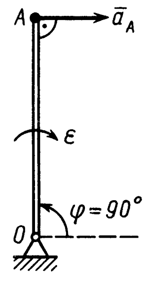


Рис. 64

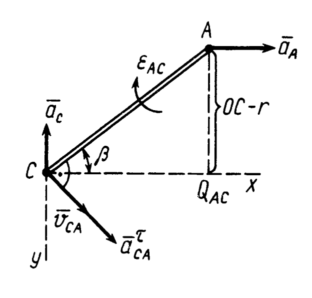


Рис. 65

Решение. Положение кривошипа в момент времени $t=1$ с определяется углом $\varphi=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ рад. Кривошип в этот момент занимает вертикальное положение, параллельное рейке.

Для алгебраических угловой скорости и углового ускорения кривошипа имеем

$$\dot{\varphi}=\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}t;\qquad \ddot{\varphi}=-\frac{\pi^3}{8}\sin\frac{\pi}{2}t.$$

При $t=1$ с, $\dot{\varphi}=0$, $\ddot{\varphi}=-\frac{\pi^3}{8}=-3{,}87\ \text{с}^{-2}$. Таким образом угловые скорость и ускорение кривошипа $\omega=|\dot{\varphi}|=0$, $\varepsilon=|\ddot{\varphi}|=+3{,}87\ \text{с}^{-2}$. Дуговую стрелку для ε следует направить против положительного направления угла φ, так как $\ddot{\varphi}<0$.

Для скорости и ускорения точки A кривошипа, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеем:

$$v_A=OA\omega=0;\quad \bar{a}_A=\bar{a}^n_A+\bar{a}^{\tau}_A;\quad a^n_A=OA\omega^2=0;\quad a^{\tau}_A=OA\varepsilon=3{,}87\ \text{м/с}^2.$$

Ускорение $\bar{a}_A=\bar{a}^{\tau}_A$ изображено на рис. 64 с учетом дуговой стрелки для ε.

У точки A шатуна такие же скорость и ускорение, как и у точки A кривошипа. Приняв точку A за полюс (рис. 65), определяем скорость точки C шатуна по формуле

$$\bar{v}_C=\bar{v}_A+\bar{v}_{CA}. \qquad (а)$$

Но $\bar{v}_A=0$; следовательно, $\bar{v}_C=\bar{v}_{CA}$, причем $\bar{v}_{CA}$ перпендикулярна AC. В проекциях на выбранные оси координат из (а) получаем

$$v_{Cx}=v_{CA}\sin\beta,\quad v_{Cy}=v_{CA}\cos\beta. \qquad (а')$$

Траекторией точки C является вертикальная прямая. Поэтому $v_{Cx}=0$, $v_C=|v_{Cy}|$. С учетом этого из (а′) имеем, что $v_{CA}=0$, $v_C=|v_{Cy}|=0$ и угловая скорость шатуна $\omega_{AC}=v_{CA}/AC=0$.

Вычисляем скорость и ускорение точки B рейки по формулам $v_B=\dot{s}=4t$, $a_B=\ddot{s}=4$. При $t=1$ с $v_B=4$ м/с, $a_B=4$ м/с². Производные $\dot{s}$ и $\ddot{s}$ положительны, поэтому $\bar{v}_B$ и $\bar{a}_B$ следует направить в сторону возрастания s.

При отсутствии скольжения у точки B диска будут такие же скорость и составляющая ускорения в вертикальном направлении $\bar{a}_{By}$, как и у точки B рейки (рис. 66). Приняв за полюс точку B диска, определяем скорость его точки C по формуле

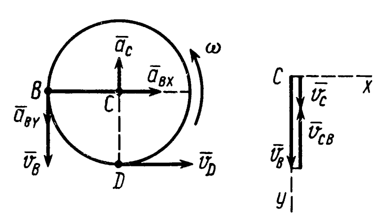
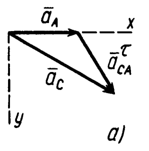


Рис. 66

$$\bar{v}_C=\bar{v}_B+\bar{v}_{CB}. \qquad (б)$$

Предположив, что диск вращается против часовой стрелки, строим треугольник скоростей для точки C в соответствии с (б). Он выродился в отрезок прямой (рис. 66).



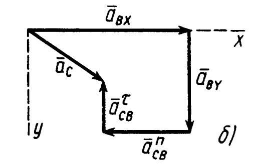


Рис. 67

В проекциях на оси координат из (б) имеем $v_{Cx}=0$, $v_{Cy}=v_B-v_{CB}$. Но $v_{Cy}=0$; следовательно, $v_B-v_{CB}=0$ и $v_{CB}=v_B=4$ м/с. Скорость v_{CB} получилась положительной; следовательно, предположение о направлении вращения диска подтвердилось. Угловую скорость диска определяем по формуле

$$\omega_1=v_{CB}/CB=v_{CB}/r=16\ \text{с}^{-1}.$$

Мгновенным центром скоростей диска является его точка C, так как $v_C=0$. Используя эту точку как МЦС, для точки D имеем

$$v_D=CD\cdot\omega_1=r\cdot\omega_1=4\ \text{м/с}.$$

Перейдем к определению ускорений точек и углового ускорения диска ε_1. Приняв за полюс точку A шатуна, ускорение его точки C определим по формуле

$$\bar{a}_C=\bar{a}_A+\bar{a}^n_{CA}+\bar{a}^\tau_{CA}, \qquad \text{(в)}$$

где $a^n_{CA}=AC\omega^2_{AC}=0$, $a^\tau_{CA}=AC\varepsilon_{AC}$ и $\bar{a}^\tau_{CA}$ перпендикулярно AC. На основании (в) строим многоугольник ускорений для точки C (рис. 67, *а*), предполагая, что ε_{AC} направлено против часовой стрелки.

В проекциях на оси координат из (в) (см. рис. 65 и 67, *а*) имеем

$$a_{Cx}=a_A+a^\tau_{CA}\sin\beta, \quad a_{Cy}=a^\tau_{CA}\cos\beta. \qquad \text{(в')}$$

Ускорение точки C направлено параллельно оси O_1y вследствие ее прямолинейного движения в этом направлении. Следовательно, $a_{Cx}=0$, $a^\tau_{CA}=-a_A/\sin\beta=-3{,}87/0{,}75=-5{,}16$ м/с^2; $a_{Cy}=a^\tau_{CA}\cos\beta=-2{,}55$ м/с^2, так как

$$\sin\beta=(OA-r)/AC=0{,}75; \quad \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=0{,}66.$$

Так как a^τ_{CA} получили со знаком минус, то направление для дуговой стрелки ε_{AC} противоположно предположенному (см. рис. 65).

Угловое ускорение шатуна $\varepsilon_{AC}=a^\tau_{CA}/AC=3{,}87$ с$^{-2}$. Ускорение $\bar{a}_C$ направлено вверх, т. е. a_{Cy} отрицательно, и $a_C=|a_{Cy}|=2{,}55$ м/с^2. Для определения углового ускорения диска ε_1 вычислим ускорение точки C, приняв за полюс точку B. Имеем

$$\bar{a}_C=\bar{a}_B+\bar{a}^n_{CB}+\bar{a}^\tau_{CB}, \qquad \text{(г)}$$

где

$$\bar{a}_B=\bar{a}_{Bx}+\bar{a}_{By}.$$

В соответствии с (г) строим многоугольник ускорений для точки C, приняв ε_1 направленным против часовой стрелки (рис. 67, *б*).

В проекциях на выбранные оси координат из (г) с учетом рис. 67, *б* получаем

$$a_{Cx}=a_{Bx}-a^n_{CB}, \quad a_{Cy}=a_{By}-a^\tau_{CB}. \qquad \text{(г')}$$

Но

$$a^n_{CB}=CB\cdot\omega_1^2=r\cdot\omega_1^2=64\ \text{м/с}^2; \quad a_{By}=\ddot{s}=4\ \text{м/с}^2; \quad a_{Cy}=-2{,}55\ \text{м/с}^2.$$

С учетом полученных значений из (г') имеем:

$$a_{Bx}=a^n_{CB}=64\ \text{м/с}^2; \quad a^\tau_{CB}=a_{By}-a_{Cy}=4-(-2{,}55)=6{,}55\ \text{м/с}^2$$

и

$$a_B=\sqrt{a^2_{Bx}+a^2_{By}}=64{,}12\ \text{м/с}^2.$$

Ускорение a^τ_{CB} получилось положительным, что подтверждает правильность выбора направления для ε_1. Угловое ускорение диска

$$\varepsilon_1=a^\tau_{CB}/CB=a^\tau_{CB}/r=26{,}21\ \text{с}^{-2}.$$

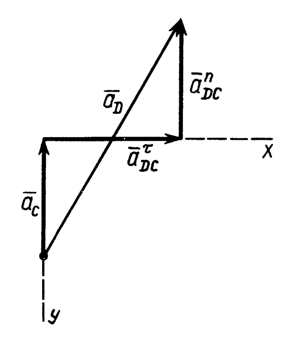


Рис. 68

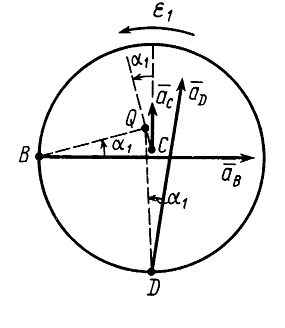


Рис. 69

Приняв за полюс точку C, для ускорения точки D получим

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^\tau_{DC}, \qquad (\text{д})$$

где

$$a^n_{DC} = DC \cdot \omega_1^2 = r \cdot \omega_1^2 = 64 \text{ м/с}; \quad a^\tau_{DC} = DC \cdot \varepsilon_1 = r \cdot \varepsilon_1 = 6{,}55 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 68 приведен многоугольник ускорений для точки D. В проекциях на оси координат из (д) имеем

$$a_{Dx} = a^\tau_{DC} = 6{,}55 \text{ м/с}^2; \quad a_{Dy} = -a_C - a^n_{DC} = -2{,}55 - 64 = -66{,}55 \text{ м/с}^2.$$

Определим ускорение точки D:

$$a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 66{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Для определения мгновенного центра ускорений Q диска вычисляем

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \varepsilon_1/\omega_1^2 = 26{,}2/256 = 0{,}10; \quad \alpha_1 \approx 6^\circ.$$

Угол α_1 откладываем от ускорения $\bar{a}_C$ в направлении дуговой стрелки ε_1. На линии, проходящей через точку C под углом α_1, находится точка Q. Расстояние до нее от точки C определяем по формуле

$$CQ = a_C/\sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4} = 2{,}55/30{,}7 \approx 0{,}08 \text{ м} = 8 \text{ см}.$$

Точка Q находится вблизи точки C. На рис. 69 указаны в примерном масштабе значения ускорений точек диска и положение Q. Ускорения $\bar{a}_B$ и $\bar{a}_D$ тоже образуют такие же углы α_1 с отрезками прямых, соединяющих эти точки с точкой Q.

Мгновенный центр ускорений шатуна AC находится в точке Q_{AC} (см. рис. 65), так как для шатуна

$$\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon_{AC}/\omega^2_{AC} = \infty \quad \text{и} \quad \alpha = 90^\circ.$$

§ 10. ТЕОРЕМА О КОНЕЧНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Понятие мгновенного центра скоростей плоской фигуры при плоском движении можно ввести используя теорему о конечном перемещении плоской фигуры. *Фигуру в ее плоскости из заданного положения I в любое другое положение II* (рис. 70) *можно перевести одним поворотом в этой плоскости вокруг точки P, называемой центром конечного вращения.*

Пусть в положении I плоская фигура характеризуется отрезком AB, скрепленным с фигурой, а в положении II этот отрезок займет положение A_1B_1.

Рассмотрим случай, когда AB и A_1B_1 не параллельны. Можно доказать, что центр конечного вращения P находится на пересечении перпендикуляров CP и DP, восставленных из середин отрезков AA_1 и BB_1. Для этого докажем, что заштрихованные треугольники

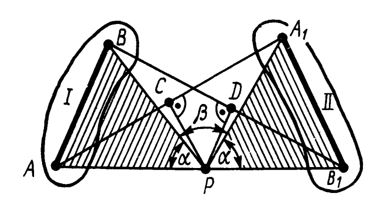


Рис. 70

ABP и A_1B_1P равны по трем сторонам; $AP = A_1P$ как гипотенузы в равных прямоугольных треугольниках ACP и A_1CP, так как по построению точка C есть середина отрезка AA_1, а CP — общий катет треугольников. Аналогично, рассматривая равные треугольники BDP и B_1DP, получаем $BP = B_1P$; $AB = A_1B_1$ — по условию.

Для перевода плоской фигуры из положения I в положение II достаточно совместить между собой равные треугольники ABP и A_1B_1P. Это можно осуществить одним поворотом треугольника ABP в его плоскости вокруг вершины P. При этом если сторону AP до совмещения со стороной A_1P повернуть на угол φ, то сторону BP до совмещения со стороной B_1P следует повернуть на угол ψ, равный углу φ, так как углы φ и ψ состоят из общего для них угла β и одинаковых углов α, лежащих в равных заштрихованных треугольниках против равных сторон.

Итак, если отрезок AP повернуть вокруг P на угол φ, то отрезок BP при этом повернется на тот же угол и в том же направлении, что и отрезок AP, и, следовательно, точка A совпадает с точкой A_1, а точка B — с точкой B_1, т. е. отрезок AB совпадет всеми своими точками с отрезком A_1B_1.

В том случае, когда отрезок AB параллелен отрезку A_1B_1, перпендикуляры CP к AA_1 и DP к BB_1 параллельны и, следовательно, пересекаются в бесконечности. В этом случае P следует считать находящимся в бесконечности и плоскую фигуру из положения I в положение II можно перевести поступательным перемещением, что соответствует повороту фигуры вокруг бесконечно удаленной точки.

§ 11. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР ВРАЩЕНИЯ. ЦЕНТРОИДЫ

Для двух бесконечно близких положений плоской фигуры вместо центра конечного вращения получим так называемый *мгновенный центр вращения*. Любое плоское перемещение фигуры можно приближенно заменить последовательностью вращательных перемещений вокруг своих центров конечного вращения. В пределе плоское перемещение фигуры можно заменить бесконечной последовательностью элементарных мгновенных поворотов вокруг мгновенных центров вращений, расположенных в определенной последовательности.

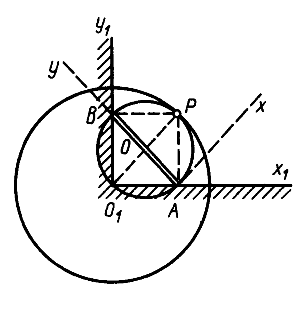


Рис. 71

Отсюда следует, что любое плоское движение фигуры можно заменить последовательностью мгновенных вращений, совершаемых за тот же промежуток времени, что и рассматриваемое плоское движение. Можно ввести угловую скорость вращения вокруг мгновенного центра вращения или, точнее, вокруг мгновенной оси, проходящей через мгновенный центр вращения и перпендикулярной плоскости движения.

При плоском движении фигуры мгновенный центр вращения перемещается как в неподвижной, так и в подвижной плоскости, скрепленной с движущейся плоской фигурой. Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости называют *неподвижной центроидой*, а геометрическое место этих же мгновенных центров вращения на подвижной плоскости, скрепленной с движущейся фигурой,— *подвижной центроидой.* Для каждого плоского движения фигуры существуют свои две центроиды: подвижная и неподвижная. Очевидно, что точка плоской фигуры, с которой в рассматриваемый момент совпадает мгновенный центр вращения, имеет скорость, равную нулю; следовательно, она является в то же время мгновенным центром скоростей.

При плоском движении фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде. Эта теорема позволяет плоское движение твердого тела рассматривать как качение без скольжения одной плоской кривой по другой.

Центроиды нашли применение в некоторых вопросах кинематики механизмов. Рассмотрим пример нахождения центроид.

Пример. Стержень AB, имеющий длину l, концами скользит по двум взаимно перпендикулярным прямым (рис. 71). Найти центроиды стержня AB при этом движении.

Решение. Скорость точки A может быть направлена только по O_1A, а точки B — только по O_1B, так как траекториями этих точек являются указанные прямые. Восстанавливая перпендикуляры в точках A и B к этим направлениям, получаем положение точки P, которая и будет мгновенным центром скоростей на подвижной плоскости, скрепленной со стрежнем, и мгновенным центром вращения на неподвижной плоскости. Из рисунка видно, что $O_1P=l=\text{const}$ во все время движения, как диагональ прямоугольника. Следовательно, неподвижная центроида является окружностью радиусом l с центром в точке O_1.

На подвижной плоскости Axy, скрепленной со стрежнем AB, точка P обладает аналогичным геометрическим свойством, так как $OP=O_1P/2=l/2=\text{const}$, поэтому подвижной центроидой является окружность радиуса $l/2$ с центром в точке O.

При качении подвижной окружности по неподвижной концы A и B диаметра окружности движутся прямолинейно соответственно по прямым O_1A и O_1B. Повернув на произвольный угол вокруг точки O_1 в плоскости чертежа оси координат $O_1x_1y_1$ и рассмотрев этот случай после закрепления

осей координат в новом положении, можно убедиться, что центроидами являются те же окружности. Следовательно, другие две точки подвижной окружности движутся прямолинейно.

Таким образом убеждаемся, что все точки подвижной окружности движутся по прямым линиям, проходящим через центр неподвижной окружности O_1. Это свойство точек подвижной окружности можно использовать для преобразования вращательного движения в прямолинейное поступательное движение.

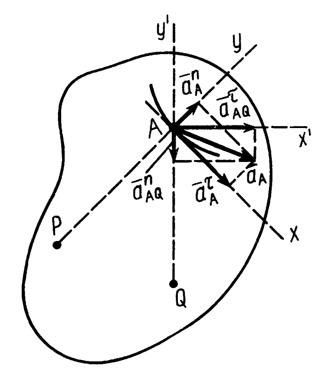


Рис. 72

В общем случае движения плоской фигуры мгновенный центр скоростей — точка P — и мгновенный центр ускорений — точка Q — являются различными точками этой фигуры (рис. 72). Эти точки совпадают, если плоское движение вырождается во вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Выберем точку A плоской фигуры и отметим точки P и Q. Поставим задачу — указать формулы, по которым можно вычислить проекции ускорения точки A на оси Ax и Ay, Ax' и Ay'. Ось Ax перпендикулярна оси Ay и $Ax' \perp Ay'$. Точка Q является мгновенным центром ускорений. Следовательно, ускорение

$$a_{Ay'} = -a^n_{AQ} = -AQ\omega^2$$

и $\bar{a}_{Ay'}$ направлено всегда к точке Q; проекция ускорения на перпендикулярное направление Ax'

$$a_{Ax'} = a^\tau_{AQ} = AQ\varepsilon.$$

Точка P является мгновенным центром скоростей. Скорость точки A перпендикулярна AP, а скорость всегда направлена по касательной к траектории. Следовательно, ось Ax есть касательная к траектории и проекция ускорения на нее является касательным ускорением и вычисляется по формуле для касательного ускорения

$$a_{Ax} = a^\tau_A = \mathrm{d}v_{A\tau}/\mathrm{d}t.$$

Ось Ay перпендикулярна касательной; следовательно, это главная нормаль траектории. Проекция ускорения на это направление вычисляется по формуле для нормального ускорения

$$a_{Ay} = a^n_A = v^2_A/\rho.$$

Если $a_{Ay} > 0$, то траектория точки обращена выпуклостью к точке P; если $a_{Ay} < 0$, то вогнутостью.

Кажется, что у точки A два различных нормальных и касательных ускорения. Но a^τ_A и a^n_A — касательное и нормальное ускорения абсолютного движения точки A по

отношению к неподвижной системе координат (на рис. 72 не показана), а a_{AQ}^{τ} и a_{AQ}^{n} — соответственно касательное и нормальное ускорения относительного движения точки A по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно относительно неподвижной вместе с точкой Q. Переносное ускорение точки A совпадает с абсолютным ускорением точки Q, а оно равно нулю, так как эта точка фигуры является мгновенным центром ускорений.

ГЛАВА 4

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Вращением твердого тела вокруг неподвижной точки называют такое движение, при котором одна точка тела остается все время неподвижной. Это вращение часто называют сферическим движением твердого тела в связи с тем, что траектории всех точек тела при таком движении располагаются на поверхностях сфер, описанных из неподвижной точки. Тело, совершающее вращение вокруг неподвижной точки, имеет три степени свободы, так как закрепление одной точки тела уменьшает число степеней свободы на три единицы, а свободное тело имеет шесть степеней свободы. Одной из главных задач при изучении вращения тела вокруг неподвижной точки является установление величин, характеризующих это движение, т. е. углов Эйлера, угловой скорости, углового ускорения, и вывод формул для вычисления скоростей и ускорений точек тела.

§ 1. УГЛЫ ЭЙЛЕРА. УРАВНЕНИЯ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Три степени свободы, которые имеет тело при вращении вокруг неподвижной точки, требуют для задания положения тела относительно какой-либо системы координат трех независимых величин. Эти три величины, или параметра, можно задать различными способами. В теоретической механике наибольшее применение получили так называемые углы Эйлера, рассмотренные ниже.

Через неподвижную точку O твердого тела проведем неподвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$, относительно которой будем рассматривать движение тела (рис. 73). Другую систему координат $Oxyz$ скрепим с телом, вращающимся вокруг неподвижной точки O. Для определения положения движущегося тела относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$ следует задать относительно этой системы координат положе-

ние другой, подвижной, системы координат $Oxyz$, скрепленной с движущимся телом. Для этой цели Эйлер предложил три независимых параметра — углы Эйлера.

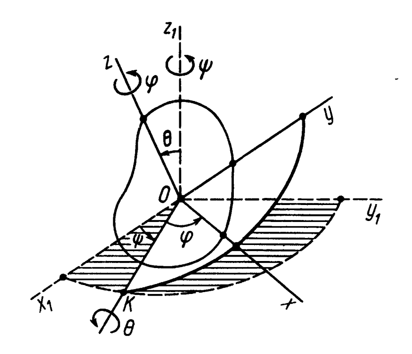


Рис. 73

Первый из этих углов — *угол прецессии* ψ — определяет положение линии узлов OK, которая является линией пересечения координатных плоскостей Ox_1y_1 и Oxy относительно неподвижной координатной оси Ox_1. Для изменения этого угла тело должно вращаться вокруг координатной оси Oz_1, которую называют *осью прецессии*. Положение линии узлов при движении тела изменяется как относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$, так и относительню движущегося тела, т. е. подвижной системы координат $Oxyz$. Угол ψ от положительной части оси Ox_1 до положительного направления линии узлов OK считается положительным, когда он отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oz_1. За положительное направление на линии узлов OK выбираем то ее направление, с которого поворот оси Oz_1 к оси Oz на наименьший угол виден происходящим против часовой стрелки.

Вторым углом Эйлера является угол между координатными плоскостями Ox_1y_1 и Oxy. Его измеряют углом θ между перпендикулярами к этим координатным плоскостям, которыми являются оси Oz_1 и Oz. Угол θ отсчитывают от оси Oz_1 до оси Oz в положительном направлении, если направление поворота оси Oz с положительного направления линии узлов OK происходит против часовой стрелки.

Угол θ называют *углом нутации*, а ось OK, вокруг которой вращается тело при изменении угла θ, соответственно называют *осью нутации* или *линией узлов*.

Для полного определения положения рассматриваемого тела относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$ нужно задать угол между подвижной осью координат Ox и положительным направлением линии узлов OK — *угол собственного вращения* φ. Угол φ от линии узлов OK до оси Ox считается положительным, если вокруг оси Oz поворот оси Ox от линии OK виден происходящим против часовой стрелки.

При изменении угла φ тело вращается вокруг так называемой *оси собственного вращения* Oz, перпендикулярной плоскости, в которой лежат прямые OK и Ox, образующие этот угол. Таким образом, угол φ определяет положение подвижной координатной оси Ox относительно линии узлов OK.

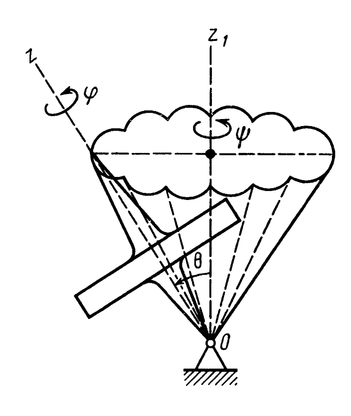


Рис. 74

Углы Эйлера широко применяются в теории гироскопов. Движение гироскопа, т. е. симметричного тела, имеющего неподвижную точку на оси симметрии и быстро вращающегося вокруг этой оси, в общем случае можно представить состоящим из трех движений (рис. 74): вращения с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии, или оси собственного вращения, при котором изменяется угол собственного вращения φ; вращения гироскопа вместе со своей осью симметрии вокруг неподвижной оси Oz_1, при котором изменяется угол прецессии ψ. Третье движение совершает ось симметрии, которая, участвуя в прецессионном движении, описывает коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке, а вследствие изменения угла нутации θ описывает в общем случае волнистую поверхность.

Если угол θ не изменяется, то коническая поверхность является круговым конусом. Если коническую поверхность пересечь плоскостью, перпендикулярной оси прецессии, то получится кривая линия, на которой возможны узловые точки, или точки возврата. Известно, например, что земной шар кроме собственного вращения вокруг своей оси еще прецессирует и совершает нутационное движение.

В технике особенно важное значение имеет так называемая *регулярная прецессия*, когда угловые скорости вращения вокруг оси собственного вращения и вокруг неподвижной оси прецессии постоянны и угол между этими осями (угол нутации) остается тоже постоянным.

При вращении тела вокруг неподвижной точки в общем случае изменяются все три угла Эйлера: ψ, θ и φ. Углы Эйлера являются независимыми параметрами, или обобщенными координатами, характеризующими положение тела с одной неподвижной точкой относительно неподвижной системы координат. Задание трех углов Эйлера для тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, как функций времени является необходимым и достаточным для полного описания такого движения тела.

Итак, для определения положения тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени надо задать углы Эйлера как однозначные функции времени, т. е.

$$\psi = f_1(t); \quad \theta = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \tag{1}$$

Уравнения (1) являются *уравнениями вращения твердого тела вокруг неподвижной точки*. Если эти уравнения заданы,

то в любой момент времени известно положение твердого тела относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$.

Отметим, что углы Эйлера не являются единственной комбинацией трех независимых углов для тела, имеющего одну неподвижную точку. Существуют и другие комбинации углов, определяющих положение одной системы координат относительно другой.

§ 2. ТЕОРЕМА О КОНЕЧНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Тело, имеющее одну неподвижную точку, из одного положения в любое другое можно перевести одним поворотом вокруг оси, проходящей через неподвижную точку. Эту ось называют *осью конечного вращения.*

Положение тела с неподвижной точкой относительно некоторой системы отсчета можно полностью определить, если задать на какой-либо неподвижной сфере, описанной из неподвижной точки тела, положение сферической фигуры, скрепленной с этим телом. За сферическую фигуру можно принять любую часть поверхности сферы таким же радиусом, что и радиус неподвижной сферы, который обычно принимают равным единице. За сферическую фигуру можно принять также всю сферу единичного радиуса.

При движении тела вокруг неподвижной точки скрепленная с движущимся телом сфера единичного радиуса движется по неподвижной сфере того же радиуса. Положение сферы полностью определяется заданием на этой сфере дуги большого круга, скрепленной со сферой.

Пусть положение I тела характеризуется дугой большого круга AB, описанной из неподвижной точки тела, а в положении II — той же дугой, но в другом положении на сфере A_1B_1 (рис. 75). Аналогично тому, как находится центр конечного вращения для плоской фигуры при плоском перемещении, найдем точку P на сфере в случае тела, имеющего одну неподвижную точку. Для этого соединяем точки A с A_1 и B с B_1 дугами большого круга, проведенными из неподвижной точки тела и целиком лежащими на неподвижной сфере. В серединах дуг AA_1 BB_1 из точек C и D проводим сферические перпендикуляры, т. е. дуги большого круга CP и DP, касательные к которым перпендикулярны в точках C и D соответственно касательным дуг AA_1 и BB_1.

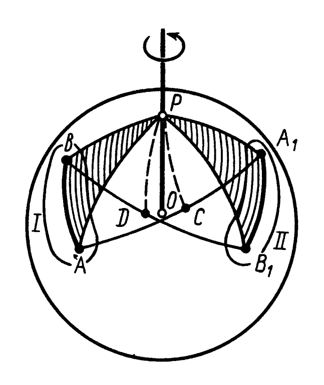


Рис. 75

Эти перпендикуляры, лежащие на сфере, пересекутся в точке P. Из равенства прямоугольных сферических

треугольников BDP и DB_1P, имеющих общий катет DP и равные катеты BD и DB_1, следует, что гипотенузы этих сферических треугольников тоже равны, т. е. точки B и B_1 равноудалены от точки P.

Аналогично доказывается, что точки A и A_1 тоже одинаково удалены от точки P. Если повернуть заштрихованный сферический треугольник ABP вокруг оси, проходящей через точку P и неподвижную точку O, то этот треугольник, перемещаясь по сфере, совпадет всеми своими точками с равным ему по трем сторонам сферическим треугольником A_1B_1P, так как сферический угол на сфере, на который надо повернуть вокруг OP дугу AP до совпадения с дугой A_1P, равен сферическому углу на той же сфере, на который надо повернуть дугу BP до совпадения с дугой B_1P.

Итак, путем поворота вокруг оси, перпендикулярной поверхности сферы и проходящей через точку P и, следовательно, проходящей также и через центр сферы, где расположена неподвижная точка, тело можно переместить из одного положения в любое другое. Для каждых двух положений тела получаются соответствующая точка P и, следовательно, соответствующая ось конечного вращения, проходящая через эту точку и неподвижную точку тела.

§ 3. МГНОВЕННАЯ ОСЬ ВРАЩЕНИЯ. АКСОИДЫ

Ось, вокруг которой следует вращать тело, имеющее одну неподвижную точку, для перевода его из одного положения в другое, бесконечно близкое первому, называют *мгновенной осью вращения* (или *мгновенной осью*) для данного момента времени.

Любое движение тела вокруг неподвижной точки можно заменить последовательностью вращений вокруг совокупности мгновенных осей. Геометрическое место мгновенных осей относительно неподвижных осей координат, по отношению к которым рассматривается движение тела, называется *неподвижным аксоидом*. Неподвижный аксоид является конической поверхностью с вершиной в неподвижной точке тела, так как все мгновенные оси проходят через неподвижную точку.

Геометрическое место мгновенных осей в движущемся теле представляет *подвижный аксоид*, являющийся также конической поверхностью. Для каждого движения твердого тела вокруг неподвижной точки имеется пара аксоидов. При этом, когда тело совершает вращение вокруг неподвижной точки, подвижный аксоид катится по неподвижному без скольжения, так как общая образующая этих аксоидов в каждый момент времени служит мгновенной осью, вокруг которой вращается тело, и, следовательно, все точки оси в рассматриваемый момент времени неподвижны. Если подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному аксоиду, то осуществляется движение тела вокруг неподвижной точки.

Очевидно, что при плоском движении твердого тела конические аксоиды являются цилиндрическими поверхностями, которые в пересечении с плоскостью движения плоской фигуры образуют центроиды для этой фигуры.

Практически понятие аксоидов используется для классификации видов прецессионных движений гироскопов.

§ 4. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Так как движение тела, имеющего одну неподвижную точку, в каждый момент времени можно считать вращением вокруг мгновенной оси, то в качестве величин, характеризующих это движение, можно ввести мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Очевидно, вводимая угловая скорость является векторной величиной, направленной в каждый момент времени по соответствующей мгновенной оси, и при использовании правой системы координат вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен по мгновенной оси так, что с направления этого вектора видно вращение тела вокруг мгновенной оси против часовой стрелки. Модуль вектора угловой скорости можно выразить через элементарный угол поворота $\Delta\varphi$ вокруг мгновенной оси за время Δt:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t}.$$

Элементарный угол повотора $\Delta\varphi$, аналогично случаю вращения тела вокруг неподвижной оси, следует рассматривать как угол между двумя положениями в моменты t и $t+\Delta t$ подвижной плоскости, скрепленной с телом и проходящей через мгновенную ось в момент времени t.

Введенный таким образом вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ характеризует угловую скорость вращения вокруг мгновенной оси, направление мгновенной оси и направление вращения тела вокруг этой оси. Вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ можно прикладывать в любой точке мгновенной оси (рис. 76).

За вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ при вращении тела вокруг неподвижной точки принимают вектор, который характеризует изменение угловой скорости $\bar{\omega}$ в данный момент как по числовой величине, так и по направлению. Известно, что такой характеристикой является производная по времени от вектора угловой скорости $\bar{\omega}$. Таким образом, угловое ускорение

$$\bar{\varepsilon} = \mathrm{d}\bar{\omega}/\mathrm{d}t.$$

Рис. 76

Так как угловая скорость может изменяться по модулю и направлению, то в общем случае угловое ускорение не направлено по мгновенной оси, а имеет направление как производная по времени от вектора $\bar{\omega}$, параллельное касательной к годографу этого вектора. Условимся угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ изображать в любой точке прямой, параллельной этой касательной годографа $\bar{\omega}$, но проходящей через неподвижную точку тела.

§ 5. СКОРОСТИ ТОЧЕК ТЕЛА ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

При рассмотрении вращательного движения тела вокруг неподвижной оси получена векторная формула Эйлера, по которой скорости точек тела полностью характеризуются общей для всех точек тела угловой скоростью вращения и расположением точек тела относительно оси вращения.

Формула Эйлера справедлива и для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

В этом случае в каждый момент времени тело вращается вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку, с угловой скоростью $\bar{\omega}$, направленной по мгновенной оси. Точки тела, лежащие на мгновенной оси, имеют скорости, равные нулю, как и в случае неподвижной оси вращения.

Следовательно, линейные скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной точки можно вычислять также по векторной формуле Эйлера, как и в случае вращения вокруг неподвижной оси, только радиус-вектор каждой точки удобно проводить из неподвижной точки тела.

Итак, скорость $\bar{v}$ какой-либо точки M тела (рис. 77), по векторной формуле Эйлера,

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2)$$

Модуль скорости

$$v = \omega r \sin\left(\bar{\omega}, \widehat{\ } \bar{r}\right) = \omega h, \qquad (3)$$

где h — кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки до мгновенной оси.

Таким образом, *скорости точек тела пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенной оси.* Направление скорости какой-либо точки тела перпендикулярно плоскости,

в которой находятся векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$, а следовательно, перпендикулярно отрезку h.

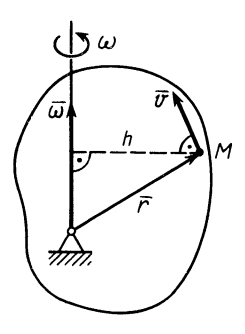


Рис. 77

Если требуется найти модуль угловой скорости тела в определенный момент времени, то для этого, согласно (3), достаточно разделить скорость какой-либо точки в этот же момент времени на кратчайшее расстояние от этой точки до мгновенной оси.

Мгновенную ось в конкретных задачах часто находят из механических условий задачи, т. е. в рассматриваемый момент времени она всегда проходит через две неподвижные точки тела. Так, если движущееся тело касается в какой-либо точке неподвижной поверхности другого тела и при этом нет скольжения, то мгновенная ось проходит через эту неподвижную в данный момент времени точку.

В случае качения без скольжения одного конуса по другому, неподвижному, конусу (рис. 78) мгновенной осью является та общая образующая этих конусов OA, вдоль которой в данный момент времени они касаются друг друга. Если, например, скорость v_{O_1} точки O_1 известна, то угловая скорость подвижного конуса

$$\omega = v_{O_1}/h = v_{O_1}/(H \sin\alpha),$$

где $H = OO_1$ и α — угол полураствора подвижного конуса.

Проекции угловой скорости тела $\bar{\omega}$ как на подвижные, так и неподвижные оси координат можно определить также через углы Эйлера как функции времени, характеризующие положение тела относительно неподвижной системы координат.

Если спроецировать правую и левую части (2) на координатные оси, то получим формулы Эйлера для проекций скоростей v_x, v_y и v_z:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y; \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z; \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \tag{4}$$

где x, y, z — координаты точек тела, скорости которых определяются.

Если взять точки тела, лежащие на мгновенной оси в рассматриваемый момент времени, то для них скорости равны нулю, а следовательно, приняв равными нулю v_x, v_y, v_z, из (4) получим следующие уравнения для координат этих точек:

$$\omega_y z - \omega_z y = 0; \quad \omega_z x - \omega_x z = 0;$$
$$\omega_x y - \omega_y x = 0.$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$x/\omega_x = y/\omega_y = z/\omega_z. \tag{5}$$

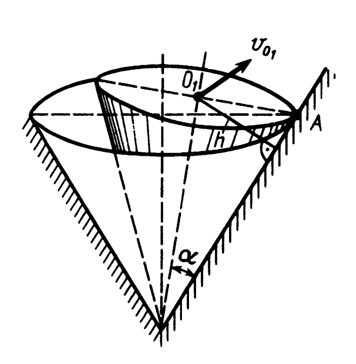


Рис. 78

Для определенного момента времени формула (5) является уравнением мгновенной оси. Если же величины, входящие в (5), рассматривать как функции времени, то она будет представлять собой уравнения подвижного или неподвижного аксоида (в параметрической форме) в зависимости от того, в какой системе координат она составлена.

Если x, y, z являются текущими координатами точки мгновенной оси относительно подвижных осей, скрепленных с движущимся телом, а ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости тела на эти оси, то формула (5) является уравнением подвижного аксоида.

Если вместо подвижных осей координат взять неподвижные оси, относительно которых рассматривается движение тела, и проекции угловой скорости тоже взять на эти оси, то тогда формула (5) будет уравнением неподвижного аксоида.

Скорость какой-либо точки можно вычислить как первую производную по времени от радиуса-вектора $\bar{r}$ этой точки, проведенного из неподвижной точки. С другой стороны, скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, можно вычислить по векторной формуле Эйлера (2). Следовательно, производная по времени от радиуса-вектора любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, определится по формуле

$$d\bar{r}/dt = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (6)$$

Длина радиуса-вектора r как расстояние между двумя точками твердого тела является постоянной величиной при движении этого тела. Следовательно, равенство (6) можно рассматривать как формулу для вычисления производной по времени от вектора, модуль которого постоянен, и изменение этого вектора происходит только вследствие вращения его с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вместе с телом вокруг неподвижной точки.

Если взять подвижную систему координат $Oxyz$, скрепленную с телом, которое вращается вокруг неподвижной точки с угловой скоростью $\bar{\omega}$, то для единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, направленных по этим осям координат, как для векторов, модули которых постоянны, на основании (6) имеем:

$$d\bar{i}/dt = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad d\bar{j}/dt = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad d\bar{k}/dt = \bar{\omega} \times \bar{k}. \qquad (7)$$

Формулы (7) называют **формулами Пуассона**.

§ 6. УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ТЕЛА ПРИ ВРАЩЕНИИ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Формулу для ускорения какой-либо точки M тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, нельзя получить непосредственно используя формулу для ускорения при вращательном движении вокруг неподвижной оси, так как в рас-

сматриваемом случае угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ в общем случае не направлено по оси вращения, а следовательно, и по $\bar{\omega}$. Во всем остальном формулы для ускорения в этих случаях полностью аналогичны.

Формулу для ускорения какой-либо точки тела M можно получить путем дифференцирования по времени вектора скорости, учитывая, что скорость вычисляют по формуле (2). Выполняя это дифференцирование, получаем

$$\bar{a} = \mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\bar{\omega}/\mathrm{d}t \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t.$$

Так как

$$\mathrm{d}\bar{\omega}/\mathrm{d}t = \bar{\varepsilon}; \quad \mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

то

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \qquad (8)$$

Формулу (8) часто называют формулой Ривальса.

Часть общего ускорения точки

$$\bar{a}_{\text{вр}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \qquad (9)$$

называют *вращательным ускорением*, а другую часть

$$\bar{a}_{\text{ос}} = \bar{\omega} \times \bar{v} \qquad (10)$$

— *осестремительным ускорением*. Следовательно, формула (8) примет вид

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{вр}} + \bar{a}_{\text{ос}}, \qquad (11)$$

т. е. *ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равно векторной сумме вращательного и осестремительного ускорений.*

В общем случае вращательное и осестремительное ускорения не перпендикулярны; следовательно, модуль ускорения $\bar{a}$ вычисляют как диагональ параллелограмма по формуле

$$a = \sqrt{a_{\text{вр}}^2 + a_{\text{ос}}^2 + 2a_{\text{вр}}a_{\text{ос}}\cos(\bar{a}_{\text{вр}}, \widehat{\ } \bar{a}_{\text{ос}})}. \qquad (12)$$

Рассмотрим вращательное и осестремительное ускорения по отдельности. Вращательное ускорение вычисляют по формуле (9), аналогичной формуле (2) для скорости точки. Только здесь вместо угловой скорости $\bar{\omega}$ входит угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$. Поэтому вращательное ускорение $\bar{a}_{\text{вр}}$ направлено аналогично скорости $\bar{v}$, если тело вращается в рассматриваемый момент времени с угловой скоростью, равной угловому ускорению $\bar{\varepsilon}$.

Модуль вращательного ускорения $a_{\text{вр}}$ определяют аналогично модулю скорости v [см. формулу (3)]:

$$a_{\text{вр}} = h_1 \varepsilon, \qquad (13)$$

где h_1 — кратчайшее расстояние от точки тела до линии, по которой направлено угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ (рис. 79).

Формула (13) для $a_{\text{вр}}$ получается из (9):

$$a_{\text{вр}} = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r \sin(\bar{\varepsilon}, \widehat{\ } \bar{r}) = h_1 \varepsilon,$$

где $r\sin(\bar{\varepsilon}, \widehat{\ } \bar{r}) = h_1$.

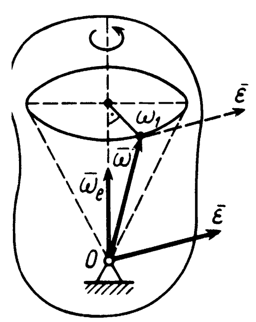


Рис. 79

Из (13) следует, что вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ расположен на прямой линии, проходящей через неподвижную точку. В противном случае эта точка имела бы не равное нулю вращательное ускорение.

Модуль осестремительного ускорения $a_{\text{ос}}$ можно получить из формулы (10):

$$a_{\text{ос}} = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega v \sin(\bar{\omega}, \hat{\ } \bar{v}) = \omega v = h\omega^2, \quad (14)$$

так как угловая скорость $\bar{\omega}$ перпендикулярна скорости $\bar{v}$.

Осестремительное ускорение направлено по перпендикуляру к мгновенной оси, опущенному из точки, для которой оно вычисляется, т. е. по отрезку h, так как, являясь векторным произведением $\bar{\omega}$ и $\bar{v}$, оно перпендикулярно плоскости, где находятся эти векторы, и имеет направление вектора этого векторного произведения. Если ввести вектор $\bar{h}$, направленный по перпендикуляру от мгновенной оси к рассматриваемой точке, то

$$\bar{a}_{\text{ос}} = -\bar{h}\omega^2. \quad (15)$$

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси угловое ускорение и угловая скорость направлены по этой оси; тогда расстояния h и h_1 равны. Следовательно, вращательное ускорение превращается в касательное ускорение, а осестремительное — в нормальное или центростремительное ускорение.

Таким образом, вращение тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как более общее движение, чем вращение тела вокруг неподвижной оси.

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ

Для вычисления ускорения точек тела необходимо знать угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$. Рассмотрим два основных способа его вычисления.

1. Если известны проекции угловой скорости на подвижные или неподвижные оси координат ω_x, ω_y, ω_z, то проекции углового ускорения на те же оси определяют по формулам

$$\varepsilon_x = d\omega_x/dt; \quad \varepsilon_y = d\omega_y/dt; \quad \varepsilon_z = d\omega_z/dt. \quad (16)$$

По проекциям легко найти модуль углового ускорения и косинусы его углов с осями координат.

2. Другой способ определения углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ основан на его разложении на две взаимно перпендикулярные составляющие. Если ввести единичный вектор $\bar{\omega}^0$, направленный по $\bar{\omega}$, то

$$\bar{\omega} = \omega\bar{\omega}^0;$$
$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt = (d\omega/dt)\bar{\omega}^0 + \omega(d\bar{\omega}^0/dt). \quad (17)$$

Составляющая $\bar{\varepsilon}_1$ полного углового ускорения $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\bar{\omega}^0$ направлена по вектору $\bar{\omega}$, когда $d\omega/dt > 0$, и противоположно ему при $d\omega/dt < 0$.

Составляющая $\bar{\varepsilon}_2$ полного углового ускорения $\bar{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\bar{\omega}^0}{dt}$ всегда перпендикулярна $\bar{\omega}$, так как производная по времени от единичного вектора $\bar{\omega}^0$ есть вектор, перпендикулярный дифференцируемому единичному вектору и, следовательно, перпендикулярный вектору $\bar{\omega}$.

Составляющая углового ускорения $\bar{\varepsilon}_1$ является полным угловым ускорением при вращении тела вокруг неподвижной оси, так как составляющая $\bar{\varepsilon}_2$ в этом случае равна нулю. Вычислим составляющую углового ускорения $\bar{\varepsilon}_2$. Часто угловая скорость постоянна по модулю и изменяется только по направлению. В этом случае составляющая $\bar{\varepsilon}_1 = 0$ и полное угловое ускорение совпадает с $\bar{\varepsilon}_2$.

Если же угловое ускорение $\bar{\varepsilon}_1$ не равно нулю, то его можно вычислить отдельно и затем, сложив с составляющей $\bar{\varepsilon}_2$, определить полное угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$. Итак, если угловая скорость постоянна, то

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\bar{\omega}^0}{dt}.$$

В этом случае воспользуемся определением углового ускорения через угловую скорость непосредственно:

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt.$$

Учитывая, что $\omega = \text{const}$, и применяя формулу, аналогичную производной по времени от радиуса-вектора [см. формулу (6)], когда радиус-вектор постоянен по длине, будем иметь

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}, \qquad (18)$$

где $\bar{\omega}_e$ — угловая скорость вращения дифференцируемого по времени вектора $\bar{\omega}$, т. е. угловая скорость вращения мгновенной оси, по которой направлен вектор $\bar{\omega}$. Модуль углового ускорения можно найти аналогично скорости точки, т. е.

$$\varepsilon = \omega_1 \omega_e, \qquad (19)$$

где расстоянием h является ω_1 — кратчайшее расстояние от конца вектора $\bar{\omega}$ до оси, по которой направлена угловая скорость $\bar{\omega}_e$ (рис. 80).

Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ пройдет через неподвижную точку и будет параллелен касательной к годографу вектора $\bar{\omega}$. Окончательно направление $\bar{\varepsilon}$ берут в соответствии с формулой (18), т. е. по направлению вращения мгновенной оси в зависимости от угловой скорости $\bar{\omega}_e$.

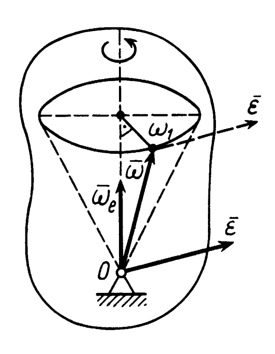
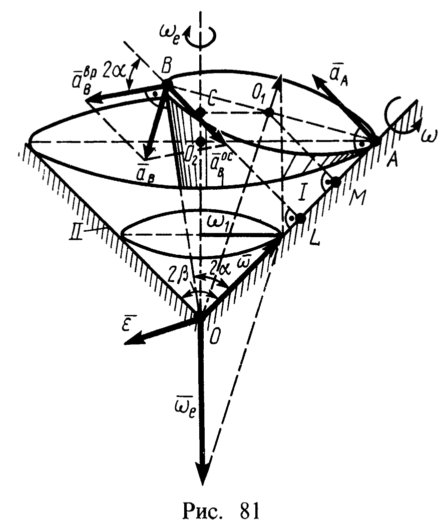


Рис. 80


Рис. 81

Рассмотрим теперь пример на вычисление угловой скорости, углового ускорения и линейных скоростей и ускорений точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Пример. Круговой конус I с углом раствора 2α катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса II с углом раствора 2β (рис. 81). Скорость точки O_1 подвижного конуса постоянна и равна v; $OO_1 = H$.

Определить угловую скорость и угловое ускорение подвижного конуса, а также скорости и ускорения точек A и B этого конуса.

Решение. Мгновенной осью конуса I является образующая OA. Если скорость точки O_1 направлена от плоскости OAO_1 во внешнюю сторону, то угловая скорость конуса $\bar{\omega}$ направлена по мгновенной оси от точки O к точке A. Числовое значение угловой скорости

$$\omega = v/O_1M = v/(H\sin\alpha) = \text{const}.$$

Скорость точки A равна нулю, так как эта точка находится на мгновенной оси. Скорость точки B вычисляем по формуле

$$v_B = \omega BL = \frac{v}{H\sin\alpha} 2H\sin\alpha = 2v.$$

Скорость $\bar{v}_B$ перпендикулярна плоскости OLB и направлена от нее во внешнюю сторону.

Угловое ускорение ε вычисляем по формуле (19):

$$\varepsilon = \omega_1 \omega_e.$$

Годографом вектора $\bar{\omega}$ является окружность радиуса ω_1:

$$\omega_1 = \omega\sin\beta = v\sin\beta/(H\sin\alpha).$$

Если рассмотреть плоскость, в которой находятся мгновенная ось OA, ось подвижного конуса OO_1 и ось неподвижного конуса OO_2 (плоскость рисунка), то при движении конуса I эта плоскость вращается вокруг оси неподвижного конуса OO_2, расположенной в указанной плоскости, а следовательно, вокруг этой оси вращается и мгновенная ось OA, находящаяся в этой плоскости. Угловую скорость этого вращения ω_e можно определить, если скорость какой-либо точки этой плоскости, участвующей только во вращении вокруг OO_2 и не имеющей другого движения, разделить на кратчайшее расстояние от этой точки до оси OO_2. Отмеченными выше свойствами обладают все точки, расположенные на оси подвижного конуса OO_1. Выбрав на этой оси точку O_1, имеем

$$\omega_e = v/O_1C,$$

где O_1C — кратчайшее расстояние от точки O_1 до OO_2. Так как

$$O_1C = H\sin(\beta-\alpha),$$

то

$$\omega_e = v/[H\sin(\beta-\alpha)].$$

Таким образом,

$$\varepsilon = \omega_1\omega_e = \frac{v\sin\beta}{H\sin\alpha}\cdot\frac{v}{H\sin(\beta-\alpha)} = \frac{v^2\sin\beta}{H^2\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}.$$

Так как скорость точки O_1 направлена во внешнюю сторону от рисунка, то мгновенная ось OA вращается вокруг OO_2 по часовой стрелке и, следовательно, угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ направлено перпендикулярно плоскости OAC во внешнюю сторону.

Ускорение какой-либо точки подвижного конуса можно определить по формуле

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{вр}} + \bar{a}_{\text{ос}}.$$

Для точки A расстояние $h=0$ и поэтому $a_{\text{ос}} = h\omega^2 = 0$. Для вращательного ускорения имеем

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon h_1 = \varepsilon OA = \frac{v^2\sin\beta}{H^2\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}\cdot\frac{H}{\cos\alpha} = \frac{v^2\sin\beta}{H\sin\alpha\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}.$$

Ускорение $\bar{a}_{\text{вр}}$, а следовательно, и полное ускорение $\bar{a}_A$ этой точки направлены перпендикулярно OA и находятся в плоскости OAO_1. С положительного направления вектора $\bar{\varepsilon}$ направление $\bar{a}_A$ должно быть направлено как скорость при вращении против часовой стрелки вокруг $\bar{\varepsilon}$.

Для точки B

$$a_{\text{ос}} = \omega^2 BL = \frac{v^2}{H^2\sin^2\alpha}\cdot 2H\sin\alpha = \frac{2v^2}{H\sin\alpha};$$

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon OB = \frac{v^2\sin\beta\cdot H}{H^2\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha} = \frac{v^2\sin\beta}{H\sin\alpha\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}.$$

Ускорение $\bar{a}_{\text{ос}}$ направлено по BL от точки B к точке L, а ускорение $\bar{a}_{\text{вр}}$ — перпендикулярно OB и расположено в плоскости OBL.

Полное ускорение точки B вычисляется как диагональ параллелограмма, построенного на ускорениях $\bar{a}_{\text{ос}}$ и $\bar{a}_{\text{вр}}$, т. е.

$$a_B = \sqrt{a_{\text{ос}}^2 + a_{\text{вр}}^2 - 2a_{\text{ос}}a_{\text{вр}}\cos 2\alpha} = \frac{v^2}{H\sin\alpha}\sqrt{4 + \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\sin^2(\beta-\alpha)} - \frac{4\sin\beta\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}}.$$

Отметим, что $\bar{\omega}_e$ можно получить, если угловую скорость $\bar{\omega}$, направленную по мгновенной оси, разложить по правилу параллелограмма по осям подвижного и неподвижного конусов. Тогда составляющая по оси неподвижного конуса и будет угловой скоростью $\bar{\omega}_e$.

§ 8. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Разложение движения свободного твердого тела на поступательное и вращательное

Рассмотрим общий случай движения свободного твердого тела, т. е. тела, имеющего шесть степеней свободы. Покажем, что самое общее движение свободного твердого тела можно

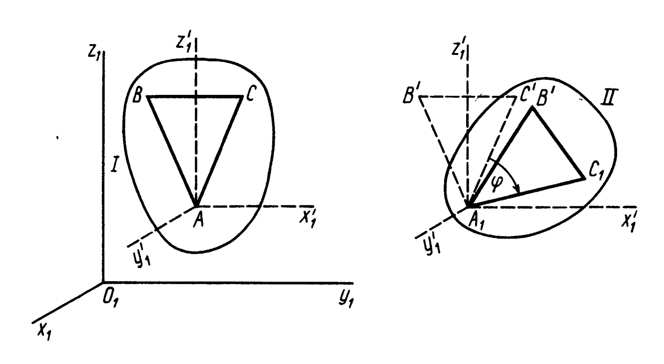


Рис. 82

представить состоящим из поступательного движения вместе с какой-либо точкой тела и вращательного движения вокруг этой точки.

Положение тела относительно какой-либо системы координат $O_1x_1y_1z_1$ полностью определяется заданием трех точек тела, не лежащих на одной прямой, или заданием треугольника, скрепленного с телом (рис. 82). Треугольник ABC, а следовательно, и тело, скрепленное с ним, из одного положения I в любое другое положение II можно переместить одним поступательным перемещением вместе с какой-либо точкой тела (например, точкой A, когда подвижная система координат $Ax_1'y_1'z_1'$ перемещается поступательно) и поворотом относительно подвижной системы координат $Ax_1'y_1'z_1'$, т. е. вокруг оси, проходящей через эту точку.

Поступательная часть перемещения тела зависит от выбора точки, вместе с которой перемещается тело, а вращательная часть перемещения вокруг оси или вокруг точки не зависит от выбора точки. Поступательную часть перемещения можно поменять местами с вращательной частью, и, наконец, их можно выполнять одновременно, т. е. пока тело совершает поступательное перемещение из одного положения в другое, за это же время можно осуществить и поворот тела вокруг точки на требующийся угол.

Если два положения тела бесконечно близки, то истинное элементарное перемещение свободного твердого тела можно заменить элементарным поступательным перемещением вместе с какой-либо точкой тела и элементарным поворотом вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку, осуществляемыми за то же время, что и истинное перемещение тела.

Любое движение свободного твердого тела, таким образом, можно заменить совокупностью поступательных движений вместе с какой-либо точкой тела и вращений вокруг этой точки, совершаемых за то же время, что и истинное движение. Поступательное движение вместе с точкой тела и подвижной

системой координат $Ax'_1y'_1z'_1$ является переносным движением, а движение тела относительно этой подвижной системы координат, являющееся в каждый момент времени вращением вокруг своей мгновенной оси, проходящей через эту подвижную точку тела, есть относительное движение.

Итак, любое движение свободного твердого тела можно составить из поступательного движения вместе с подвижной системой координат и сферического движения относительно этой системы координат. Для относительного сферического движения можно ввести угловую скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$, которое является первой производной по времени от $\bar{\omega}$, как в случае вращения тела вокруг неподвижной точки.

Угловую скорость и угловое ускорение относительного вращательного движения вокруг какой-либо точки тела называют в общем случае угловой скоростью и угловым ускорением свободного твердого тела. Эти величины не зависят от выбора точки тела. От выбора точки тела зависит только переносное поступательное движение тела.

Уравнения движения свободного твердого тела

В общем случае для определения положения свободного твердого тела относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ достаточно задать относительно этой системы координат положение другой системы координат $Ox'_1y'_1z'_1$, движущейся поступательно относительно первой системы вместе с какой-либо точкой O рассматриваемого тела, и углы Эйлера, определяющие положение системы координат $Oxyz$, скрепленной с движущимся телом, относительно системы координат $Ox'_1y'_1z'_1$ (рис. 83).

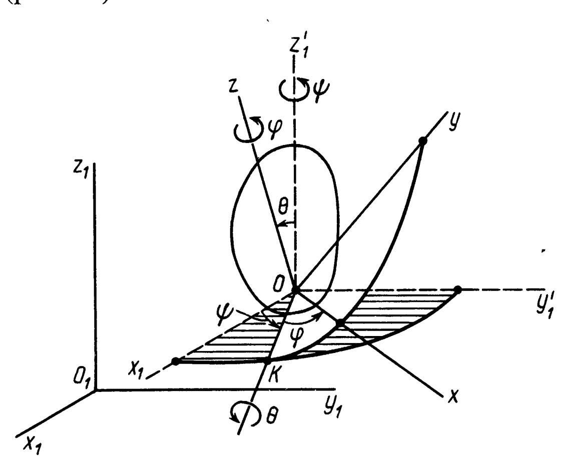


Рис. 83

Для простоты предположим, что оси Ox'_1, Oy'_1, Oz'_1 соответственно параллельны осям O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1. Таким образом, положение свободного твердого тела относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ полностью определяется, если относительно этой системы задать координаты точки O тела как однозначные функции времени и углы Эйлера подвижной системы координат $Oxyz$, скрепленной с движущимся телом, относительно системы координат $Ox'_1y'_1z'_1$, поступательно движущейся вместе с точкой O тела:

$$x_0 = f_1(t);\; y_0 = f_2(t);\; z_0 = f_3(t);\; \psi = f_4(t);\; \theta = f_5(t);\; \varphi = f_6(t). \tag{20}$$

Уравнения (20) являются *кинематическими уравнениями движения свободного твердого тела в общем случае его движения*. Этих уравнений шесть, т. е. столько, сколько степеней свободы у свободного твердого тела. Первые три уравнения (20) определяют переносное движение тела вместе с точкой O, вторые три уравнения определяют вращательное движение вокруг этой точки.

Первые три уравнения для рассматриваемого движения свободного твердого тела зависят от выбора точки O тела; последние три уравнения (углы Эйлера) не зависят от выбора точки O, вокруг которой рассматривается вращение тела.

Скорости и ускорения точек свободного твердого тела в общем случае

Так как движение свободного твердого тела в общем случае можно представить как сложное движение, то и скорость, и ускорение какой-либо точки M этого тела можно вычислить соответственно по теоремам сложения скоростей и ускорений (рис. 84). Так, для скорости $\bar{v}$ точки M

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Переносным движением является поступательное движение тела вместе с точкой O этого тела. Следовательно, скорости поступательного переносного движения одинаковы у всех точек тела и равны скорости $\bar{v}_0$ точки O. Относительное движение есть вращение вокруг точки O, и, следовательно, скорость относительного движения можно вычислить по векторной формуле Эйлера:

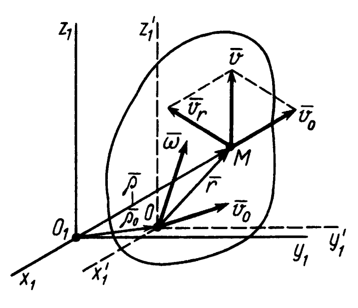


Рис. 84

$$\bar{v}_r = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки M, проведенный из точки O; $\bar{\omega}$ — уг-

ловая скорость вращения тела вокруг точки O или подвижной мгновенной оси, проходящей через точку O.

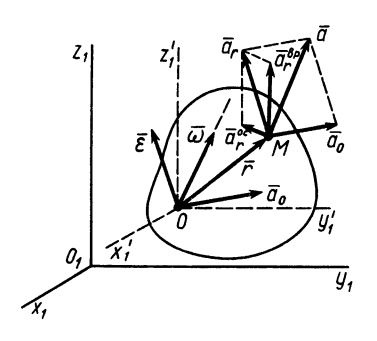


Рис. 85

Окончательно для скорости точки M получим следующую формулу:

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (21)$$

Формулу (21) можно получить непосредственным дифференцированием векторного равенства

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r},$$

справедливого для любого момента времени. Возьмем полные производные по времени от обеих частей равенства, учитывая изменения векторов относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Имеем

$$d\bar{\rho}/dt = d\bar{\rho}_O/dt + d\bar{r}/dt.$$

Здесь $d\bar{\rho}/dt = \bar{v}$, $d\bar{\rho}_O/dt = \bar{v}_O$ — скорости точек тела M и O соответственно. Модуль вектора $\bar{r}$ как отрезка, соединяющего две точки тела, не изменяется при движении этого тела. Следовательно, по формуле производной по времени от вектора постоянного модуля получаем

$$d\bar{r}/dt = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Объединяя результаты, получаем формулу (21):

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Так же как и при плоском движении твердого тела, часть скорости $\bar{\omega} \times \bar{r}$ можно истолковать как скорость от вращения тела вокруг точки O.

Ускорение $\bar{a}$ точки M (рис. 85) в частном случае, когда переносное движение является поступательным, определяем по формуле

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r.$$

Ускорения переносного движения всех точек тела равны ускорению $\bar{a}_O$ точки O, так как за поступательное переносное движение принимается движение вместе с точкой O.

Ускорение относительного движения, как и при вращении тела вокруг неподвижной точки, состоит из вращательной и осестремительной составляющих, т. е.

$$\bar{a}_r = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \qquad (22)$$

где $\bar{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела.

Окончательная формула для ускорения точки M свободного тела в общем случае его движения имеет вид

$$\bar{a}=\bar{a}_O+\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}), \tag{23}$$

или на основании формулы Ривальса

$$\bar{a}=\bar{a}_O+\bar{a}_r^{\text{вр}}+\bar{a}_r^{\text{ос}}, \tag{24}$$

где

$$\bar{a}_r^{\text{вр}}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r};\quad \bar{a}_r^{\text{ос}}=-\bar{h}\omega^2.$$

Формулу (23) можно получить непосредственным дифференцированием векторного равенства для скоростей (21), справедливого в любой момент времени. Вычисляя полные производные по времени, при определении которых учитываются изменения векторов относительно неподвижной системы координат, получаем

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\bar{v}_O}{dt}+\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Здесь $d\bar{v}/dt=\bar{a}$, $d\bar{v}_O/dt=\bar{a}_O$ — ускорения точек M и O; $d\bar{\omega}/dt=\bar{\varepsilon}$ — угловое ускорение.

Учитывая, что вектор $\bar{r}$ является вектором постоянного модуля, имеем

$$d\bar{r}/dt=\bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Окончательный результат выразится в форме

$$\bar{a}=\bar{a}_O+\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}).$$

Заметим, что если в кинематике свободного твердого тела в качестве точки O можно брать любую точку тела, то в динамике в качестве такой точки оказывается выгодным выбирать центр масс тела.

При выборе различных точек тела в качестве полюса изменяются скорость и ускорение полюса. Угловая скорость и угловое ускорение при этом не изменяются. Докажем это для угловой скорости, используя (21).

Пусть A и B — две точки свободного твердого тела (рис. 86). Приняв за полюс точку A, для скорости точки B имеем

$$\bar{v}_B=\bar{v}_A+\bar{\omega}_A\times\overrightarrow{AB}, \tag{25}$$

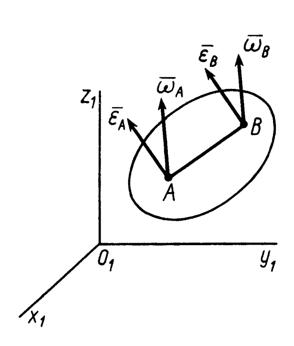
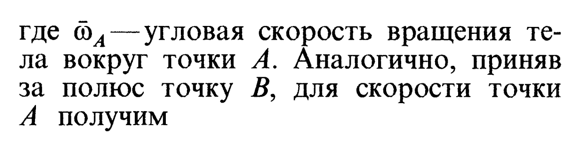


Рис. 86


где $\bar{\omega}_A$ — угловая скорость вращения тела вокруг точки A. Аналогично, приняв за полюс точку B, для скорости точки A получим

$$\bar{v}_A=\bar{v}_B+\bar{\omega}_B\times\overrightarrow{BA}=\bar{v}_B-\bar{\omega}_B\times\overrightarrow{AB}, \tag{26}$$

где $\bar{\omega}_B$ — угловая скорость вращения тела вокруг точки B. Из (25) и (26) имеем

$$\bar{\omega}_A\times\overrightarrow{AB}=\bar{\omega}_B\times\overrightarrow{AB};\quad (\bar{\omega}_A-\bar{\omega}_B)\times\overrightarrow{AB}=0$$

для любых двух точек свободного твердого тела. Эти точки можно выбрать так, чтобы $\overrightarrow{AB}$ не было параллельно вектору $(\bar{\omega}_A - \bar{\omega}_B)$. Тогда получаем

$$\bar{\omega}_A - \bar{\omega}_B = 0; \quad \bar{\omega}_A = \bar{\omega}_B = \bar{\omega}, \tag{27}$$

т. е. *угловая скорость свободного твердого тела не зависит от выбора полюса.* Она инвариантна по отношению к выбору полюса.

Так как равенство (27) справедливо для любого момента времени, то, дифференцируя его по времени, получим

$$d\bar{\omega}_A / dt = d\bar{\omega}_B / dt; \quad \bar{\varepsilon}_A = \bar{\varepsilon}_B = \bar{\varepsilon},$$

т. е. *вектор углового ускорения свободного твердого тела тоже не зависит от выбора полюса.*

ГЛАВА 5

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

§ 1. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ВЕКТОРА. ФОРМУЛА БУРА

При рассмотрении сложного движения точки в общем случае переносного движения приходится рассматривать изменение векторных величин с течением времени по отношению к системам отсчета, движущимся друг относительно друга. Одно изменение имеет векторная величина относительно подвижной системы отсчета, движущейся относительно другой, неподвижной, и другое — относительно неподвижной системы отсчета. Неподвижной системой отсчета считается система, движение которой относительно других систем отсчета не рассматривается.

Введем обозначения производных от векторных величин при рассмотрении их изменения относительно различных систем отсчета, движущихся друг относительно друга. Для любого вектора $\bar{b}(t)$ его производную по времени по отношению к неподвижной системе отсчета называют *полной* (или *абсолютной*) производной и обозначают $d\bar{b}/dt$. Производную по времени при учете изменения вектора $\bar{b}$ относительно подвижной системы отсчета называют *относительной* (или *локальной*) производной и обозначают $\tilde{d}\bar{b}/dt$ или $(d\bar{b}/dt)_r$.

Установим зависимость между полной и относительной производными по времени вектора $\bar{b}$ и величинами, характеризующими движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Для этого разложим вектор $\bar{b}$ на составляющие, параллельные осям подвижной системы координат. Имеем

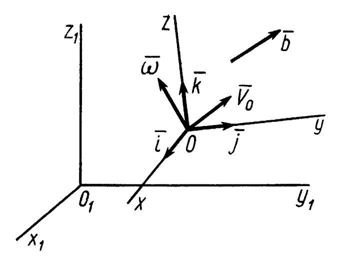


Рис. 87

$$\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}. \qquad (1)$$

Изменение вектора $\bar{b}$ относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ в зависимости от времени состоит из изменения его проекций b_x, b_y, b_z на подвижные оси координат и изменения единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ подвижных осей вследствие движения подвижной системы координат относительно неподвижной. Вычислим полную производную по времени от вектора $\bar{b}$, используя формулу (1). Получим

$$\frac{d\bar{b}}{dt}=\frac{db_x}{dt}\bar{i}+\frac{db_y}{dt}\bar{j}+\frac{db_z}{dt}\bar{k}+b_x\frac{d\bar{i}}{dt}+b_y\frac{d\bar{j}}{dt}+b_z\frac{d\bar{k}}{dt}. \qquad (2)$$

Первые три слагаемых учитывают изменение вектора $\bar{b}$ при неизменных $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и поэтому составляют относительную производную, т. е.

$$\frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt}=\frac{db_x}{dt}\bar{i}+\frac{db_y}{dt}\bar{j}+\frac{db_z}{dt}\bar{k}. \qquad (3)$$

Производные по времени единичных векторов определим по формулам Пуассона

$$d\bar{i}/dt=\bar{\omega}\times\bar{i};\quad d\bar{j}/dt=\bar{\omega}\times\bar{j};\quad d\bar{k}/dt=\bar{\omega}\times\bar{k},$$

так как эти векторы не изменяются от поступательного движения со скоростью $\bar{v}_O$ вместе с подвижной системой отсчета (рис. 87). Вектор $\bar{\omega}$ есть угловая скорость вращательной части движения вокруг точки O подвижной системы координат относительно неподвижной. Подставляя эти значения производных единичных векторов в (2) и вынося $\bar{\omega}$ за скобки, получим

$$d\bar{b}/dt=\tilde{d}\bar{b}/dt+\bar{\omega}\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}),$$

или, учитывая (1),

$$d\bar{b}/dt=\tilde{d}\bar{b}/dt+\bar{\omega}\times\bar{b}. \qquad (4)$$

Получена формула зависимости производных векторов $\bar{b}$ в двух системах отсчета, движущихся друг относительно друга. Формула (4) называется *формулой Бура*.

Известно, что произвольное движение системы координат как свободного твердого тела можно представить как поступательное движение вместе с полюсом, например с точкой O, и вращение вокруг этой точки. Из формулы Бура следует, что поступательная часть движения вместе с полюсом не влияет на зависимость между производными, а влияет только вращательная часть движения.

Рассмотрим *частные* случаи.

1. Если вектор $\bar{b}$ не изменяется относительно подвижной системы координат, то его относительная производная $\tilde{d}\bar{b}/dt=0$ и по формуле (4) получаем

$$d\bar{b}/dt=\bar{\omega}\times\bar{b}.$$

Это формула для производной от вектора постоянного модуля, доказанная ранее для радиуса-вектора при вращении вокруг неподвижной оси. Она справедлива для любого вектора при произвольном движении подвижной системы осей координат. В рассматриваемом случае $\bar{\omega}$ не только угловая скорость вращения подвижной системы координат, но и угловая скорость вращения вектора $\bar{b}$, так как вектор $\bar{b}$ можно при этом считать скрепленным с подвижной системой координат.

2. Если вектор $\bar{b}$ не изменяется относительно основной системы координат, то полная производная $d\bar{b}/dt=0$ и, согласно (4), его относительная производная

$$\tilde{d}\bar{b}/dt=-\bar{\omega}\times\bar{b}.$$

3. Если $\bar{b}=k\bar{\omega}$, т. е. вектор $\bar{b}$ все время параллелен вектору угловой скорости $\bar{\omega}$, то $\bar{\omega}\times\bar{b}=0$ и

$$d\bar{b}/dt=\tilde{d}\bar{b}/dt.$$

В частности, если $\bar{b}=\bar{\omega}$, то

$$d\bar{\omega}/dt=\tilde{d}\bar{\omega}/dt=\bar{\varepsilon}.$$

Полная и локальная производные также равны друг другу в те моменты времени, в которые вектор $\bar{b}$ параллелен вектору угловой скорости $\bar{\omega}$.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Если $O_1x_1y_1z_1$ — неподвижная система осей координат, а $Oxyz$ — подвижная (рис. 88), то, как известно, *абсолютным* движением точки называют ее движение относительно неподвижной системы осей координат, а *относительным* — ее движение относительно подвижной. *Переносным* движением точки называют ее движение в рассматриваемый момент времени вместе с подвижной системой осей относительно неподвижных. Относительные скорость и ускорение обозначают $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$, переносные — $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e$, а абсолютные — $\bar{v}$ и $\bar{a}$. Другие характеристики этих движений снабжаются соответствующими значками.

Движение подвижной системы осей координат относительно неподвижной можно охарактеризовать скоростью ее поступательного движения $\bar{v}_O$, например вместе с точкой O и вектором угловой скорости $\bar{\omega}$ ее вращения вокруг O. Пусть точка M движется относительно подвижной системы координат. Получим теорему сложения скоростей. Для этого проведем

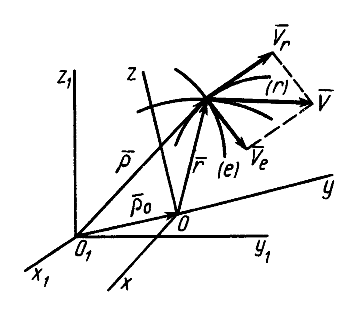


Рис. 88

векторы $\bar{\rho}$ и $\bar{r}$, характеризующие положение точки M относительно неподвижной и подвижной систем осей координат, и вектор $\bar{\rho}_O$ точки O. Для любого момента времени

$$\bar{\rho}=\bar{\rho}_O+\bar{r}.$$

Продифференцируем по времени это векторное тождество, учитывая изменения векторов относительно неподвижных осей координат, т. е. вычислим полные производные. Получим

$$\mathrm{d}\bar{\rho}/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\bar{\rho}_O/\mathrm{d}t+\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t. \qquad (5)$$

По определению, $\mathrm{d}\bar{\rho}/\mathrm{d}t=\bar{v}$ является абсолютной скоростью точки M, $\mathrm{d}\bar{\rho}_O/\mathrm{d}t=\bar{v}_O$ — абсолютной скоростью точки O. Для вычисления $\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t$ применим формулу Бура. Имеем

$$\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t=\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}/\mathrm{d}t+\bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Относительная производная $\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}/\mathrm{d}t=\bar{v}_r$ является относительной скоростью точки M по отношению к подвижной системе отсчета, а $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения подвижной системы отсчета и, следовательно, радиуса-вектора $\bar{r}$, если бы он в рассматриваемый момент времени был скреплен с подвижной системой осей координат. Таким образом, из (5) получаем

$$\bar{v}=\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\bar{r}+\bar{v}_r. \qquad (6)$$

Скорость

$$\bar{v}_e=\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\bar{r}$$

является скоростью точки свободного твердого тела, скрепленного с подвижной системой координат, с которой в данный момент совпадает точка M в движении тела относительно неподвижной системы осей координат. Это есть переносная скорость точки M. Из (6) получаем следующую теорему сложения скоростей для точки:

$$\bar{v}=\bar{v}_e+\bar{v}_r, \qquad (7)$$

т. е. *скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей.*

§ 3. СЛОЖЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧКИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПЕРЕНОСНОГО ДВИЖЕНИЯ

Абсолютное ускорение точки определим вычислением полной производной по времени от абсолютной скорости (6). Имеем

$$\bar{a}=\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\bar{r}+\bar{v}_r\right)=\frac{\mathrm{d}\bar{v}_O}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\bar{v}_r}{\mathrm{d}t}.$$

Для полных производных от векторов $\bar{r}$ и $\bar{v}_r$ применим формулу Бура. Получим

$$\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t = \tilde{\mathrm{d}}\bar{r}/\mathrm{d}t + \bar{\omega}\times\bar{r};\quad \mathrm{d}\bar{v}_r/\mathrm{d}t = \tilde{\mathrm{d}}\bar{v}_r/\mathrm{d}t + \bar{\omega}\times\bar{v}_r.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{d}\bar{v}_O/\mathrm{d}t = \bar{a}_O;\quad \mathrm{d}\bar{\omega}/\mathrm{d}t = \bar{\varepsilon};\quad \tilde{\mathrm{d}}\bar{r}/\mathrm{d}t = \bar{v}_r;\quad \tilde{\mathrm{d}}\bar{v}_r/\mathrm{d}t = \bar{a}_r,$$

получим для абсолютного ускорения

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) + \bar{a}_r + 2(\bar{\omega}\times\bar{v}_r). \tag{8}$$

В этой формуле первые три слагаемых составляют ускорение точки свободного твердого тела в общем случае его движения вместе с подвижной системой осей координат относительно неподвижной. Первое слагаемое $\bar{a}_O$ — ускорение точки O, $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}$ и $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ — соответственно вращательное и осестремительное ускорения точки M, если бы она двигалась только вместе с подвижной системой осей координат, не имея в рассматриваемый момент времени относительного движения. После этого (8) примет вид

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к, \tag{9}$$

где

$$\bar{a}_к = 2(\bar{\omega}\times\bar{v}_r). \tag{10}$$

Ускорение $\bar{a}_к$ называется *ускорением Кориолиса*. Иногда его также называют *добавочным* (или *поворотным*) ускорением.

Формула (9) выражает теорему сложения ускорений точки, или кинематическую теорему Кориолиса: *абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений — переносного, относительного и Кориолиса.*

Переносное ускорение рассматривалось при изучении движения свободного твердого тела. Относительное ускорение изучалось в кинематике точки. Его можно выразить в двух формах в зависимости от способа задания относительного движения. При координатном способе задания в декартовых координатах

$$\bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k},$$

где x, y, z — координаты движущейся точки относительно подвижной системы осей координат; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы этих осей. При естественном способе задания движения

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{n},$$

причем

$$a_r^{\tau} = \mathrm{d}v_r/\mathrm{d}t = \ddot{s}_r;\quad a_r^{n} = v_r^2/\rho_r,$$

где s_r — расстояние от начала отсчета до точки по траектории относительного движения; ρ_r — радиус кривизны этой траектории. В частном случае, когда переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси, переносное ускорение

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n},$$

где касательное переносное ускорение

$$a_e^\tau = h\varepsilon,$$

причем h есть кратчайшее расстояние от движущейся точки до оси вращения. Нормальное переносное ускорение

$$a_e^n = h\omega^2.$$

Абсолютное ускорение в этом случае

$$\bar{a} = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_к. \qquad (11)$$

§ 4. УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

Рассмотрим ускорение Кориолиса и его свойства. Оно определяется формулой (10)

$$\bar{a}_к = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r).$$

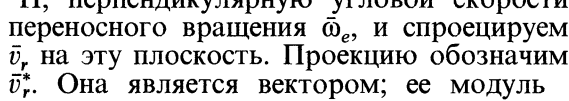
Угловую скорость вращательной части движения подвижной системы отсчета, т. е. угловую скорость переносного движения, заменили на $\bar{\omega}_e$.

Ускорение Кориолиса является результатом взаимного влияния двух движений: переносного и относительного. Часть его $(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$ получается вследствие изменения переносной скорости точки из-за относительного движения. Другая его часть, тоже $(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$, есть результат изменения относительной скорости вследствие переносного движения. Это следует из анализа формул при выводе абсолютного ускорения.

Модуль ускорения Кориолиса в соответствии с (10) определяется выражением

$$a_к = 2\omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \wedge\, \bar{v}_r). \qquad (12)$$

Для определения ускорения Кориолиса очень удобно правило Н. Е. Жуковского. Оно основано на формуле (10). Пусть имеем точку M, движущуюся с относительной скоростью $\bar{v}_r$ (рис. 89). Построим плоскость П, перпендикулярную угловой скорости



переносного вращения $\bar{\omega}_e$, и спроецируем $\bar{v}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\bar{v}_r^*$. Она является вектором; ее модуль

$$v_r^* = v_r \sin(\bar{\omega}_e, \wedge\, \bar{v}_r).$$

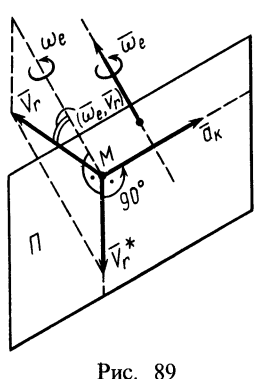


Рис. 89

Ускорение Кориолиса выразится в форме

$$a_к = 2\omega_e v_r^*. \qquad (12')$$

Учитывая (10) и (12′), получаем правило Жуковского: *модуль ускорения Кориолиса равен удвоенному произведению угловой скорости переносного вращения на модуль проекции относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси пе-*

реносного вращения; чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\bar{v}_r^*$ повернуть на 90° вокруг оси, параллельной оси переносного вращения, в направлении этого вращения.

Рассмотрим случаи обращения в нуль ускорения Кориолиса. Из (12) следует, что $a_к=0$, если:

1) $\omega_e=0$, т. е. переносное движение является поступательным;

2) $v_r=0$, т. е. в те моменты времени, в которые происходит изменение направления относительного движения;

3) $\sin(\bar{\omega}_e, \hat{} \, \bar{v}_r)=0$, т. е. когда скорость относительного движения $\bar{v}_r$ параллельна угловой скорости переносного вращения $\bar{\omega}_e$.

Следует отметить, что при различном разложении одного и того же абсолютного движения точки на переносное и относительное получим разные ускорения Кориолиса.

Пример 1. Шар радиусом $R=1$ м вращается вокруг вертикальной оси Oz' по закону $\varphi=2t-t^3$ рад. По меридиану шара движется точка M по закону $s=\pi t^2/4$ (рис. 90, *а*). Расстояние s отсчитывается от точки M_0 меридиана.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки M в момент времени $t=1$ с.

Решение. За переносное движение точки примем вращение ее вместе с шаром вокруг оси Oz (рис. 90, *б*). Тогда относительным движением точки будет ее движение по меридиану шара.

Определим положение точки M на меридиане в момент времени $t=1$ с. Имеем $s_{t=1}=\pi/4$ м. Так как $R=1$ м, то положение точки определяется углом широты $\alpha=\pi/4$.

Вычислим угловые скорость и ускорение переносного движения. Получаем $\dot{\varphi}=2-3t^2$; при $t=1$ с $\dot{\varphi}=-1$ с$^{-1}$. Угловая скорость $\omega=|\dot{\varphi}|=1$ с$^{-1}$. Знак минус у $\dot{\varphi}$ показывает, что вращение шара происходит в отрицательную сторону угла φ, т. е. по часовой стрелке.

Так как $\ddot{\varphi}=-6t$ и при $t=1$ с $\ddot{\varphi}=-6$ с$^{-2}$, то угловое ускорение переносного движения $\varepsilon=|\ddot{\varphi}|=6$ с$^{-2}$. Знак минус у $\ddot{\varphi}$ указывает, что оно направлено по часовой стрелке, против положительного направления угла φ. Так как знаки у $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ одинаковы, то вращение шара в рассматриваемый момент времени является ускоренным.

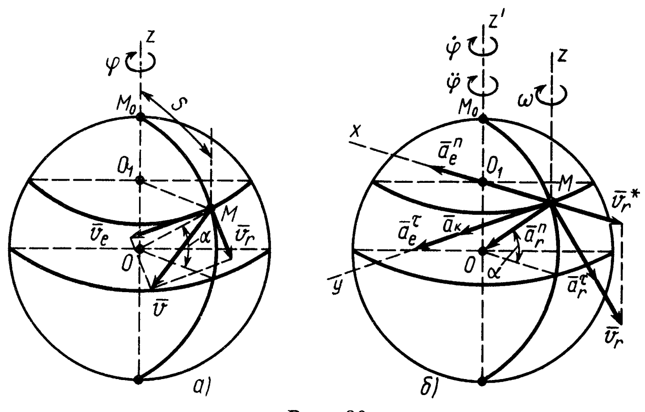


Рис. 90

Абсолютную скорость точки определяем по формуле

$$\bar{v}=\bar{v}_e+\bar{v}_r.$$

Скорость переносного движения при $t=1$ с

$$v_e=r\omega=R\omega\cos\alpha=\sqrt{2}/2\approx0{,}7 \text{ м/с}.$$

Скорость относительного движения точки $v_r=|\dot{s}|$, где $\dot{s}=\pi t/2$. При $t=1$ с $\dot{s}=\pi/2=1{,}6$ м/с. Следовательно, $v_r=1{,}6$ м/с. Знак плюс у $\dot{s}$ указывает, что $\bar{v}_r$ направлено в сторону возрастания s.

В рассматриваемом случае $\bar{v}_e$ направлена по касательной к параллели шара и перпендикулярна $\bar{v}_r$, которая направлена по касательной к меридиану. Следовательно,

$$v=\sqrt{v_e^2+v_r^2}\approx\sqrt{0{,}5+2{,}6}\approx1{,}8 \text{ м/с}.$$

Так как переносное движение является вращением шара вокруг неподвижной оси, то абсолютное ускорение точки определяем по формуле

$$\bar{a}=\bar{a}_e^n+\bar{a}_e^\tau+\bar{a}_r^n+\bar{a}_r^\tau+\bar{a}_\text{к}. \tag{а}$$

Переносное нормальное ускорение

$$a_e^n=r\omega^2=R\omega^2\cos\alpha=\sqrt{2}/2\approx0{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $\bar{a}_e^n$ направлено по кратчайшему расстоянию от точки до оси, т. е. по MO_1. Переносное касательное ускорение $\bar{a}_e^\tau$ перпендикулярно $\bar{a}_e^n$ и направлено в соответствии с направлением углового ускорения по скорости $\bar{v}_e$. Числовое значение этого ускорения

$$a_e^\tau=r\varepsilon=R\varepsilon\cos\alpha=3\sqrt{2}\approx4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Относительное нормальное ускорение

$$a_r^n=v_r^2/\rho=v_r^2/R=2{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $\bar{a}_r^n$ направлено к центру кривизны траектории относительного движения, т. е. к центру шара O. Относительное касательное ускорение $a_r^\tau=|\ddot{s}|$, где $\ddot{s}=\pi/2=\text{const}\approx1{,}6$ м/с^2. Следовательно, $a_r^\tau=1{,}6$ м/с^2. Так как $\ddot{s}$ положительно, то $\bar{a}_r^\tau$ направлено в сторону возрастающих значений s по касательной к траектории относительного движения. Относительное движение оказалось ускоренным в рассматриваемый момент времени.

Ускорение Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Его модуль $a_\text{к}=2\omega v_r^*$, где v_r^* — проекция $\bar{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения Oz'. Имеем

$$v_r^*=v_r\sin\alpha=1{,}6\sqrt{2}/2\approx1{,}1 \text{ м/с}.$$

После этого находим $a_\text{к}=2\cdot1\cdot1{,}1=2{,}2$ м/с^2. Чтобы определить направление $\bar{a}_\text{к}$, следует $\bar{v}_r^*$ повернуть вокруг оси Mz, параллельной Oz', на 90° в сторону переносного вращения, т. е. в рассматриваемом случае по часовой стрелке. Получаем, что ускорение $\bar{a}_\text{к}$ направлено по ускорению $\bar{a}_e^\tau$.

Для определения абсолютного ускорения выбираем прямоугольные оси координат $Mxyz$ и проецируем обе части векторного равенства (а) на эти оси, учитывая направление составляющих ускорений (рис. 90, *б*). Получаем:

$$a_x=a_e^n+a_r^n\cos\alpha-a_r^\tau\sin\alpha=0{,}7+2{,}6\cdot0{,}7-1{,}6\cdot0{,}7\approx1{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y=a_e^\tau+a_\text{к}=4{,}2+2{,}2=6{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z=-a_r^n\sin\alpha-a_r^\tau\cos\alpha=-2{,}6\cdot0{,}7-1{,}6\cdot0{,}7=-2{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Числовое значение абсолютного значения

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{2+41+8{,}4}=\sqrt{51{,}4}\approx7{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Колечко M (рис. 91), надетое на стержень, движется в плоскости Oxy согласно уравнениям

$$x = 3(1+\cos\pi t);\quad y = 4 - 8\sin\pi t,$$

где x, y — в см; t — в с. Стержень может вращаться вокруг оси Oz.

Определить в момент $t=0{,}5$ с угловую скорость и угловое ускорение стержня, а также скорость и ускорение движения колечка по стержню.

Решение. Положение колечка в момент времени $t=0{,}5$ с определяется координатами

$$x_1 = 3(1+\cos\pi/2) = 3\ \text{см};\quad y_1 = 4 - 8\sin\pi/2 = -4\ \text{см}.$$

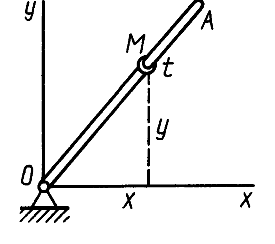


Рис. 91

Примем движение колечка вместе с вращающимся стержнем за переносное. Тогда его движение по стержню будет относительным движением.

Вычислим проекции на оси координат абсолютных скорости и ускорения колечка для произвольного момента времени. Имеем:

$$v_x = \dot{x} = -3\pi\sin\pi t;\quad v_y = \dot{y} = -8\pi\cos\pi t;$$

$$a_x = \ddot{x} = -3\pi^2\cos\pi t;\quad a_y = \ddot{y} = 8\pi^2\sin\pi t.$$

Для момента времени $t=0{,}5$ с получаем:

$$v_x = -3\pi \approx -9{,}4\ \text{см/с};\quad v_y = 0;\quad v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = 9{,}4\ \text{см/с};$$

$$a_x = 0;\quad a_y = 8\pi^2 \approx 78{,}9\ \text{см/с}^2;\quad a = \sqrt{a_x^2+a_y^2} = 78{,}9\ \text{см/с}^2.$$

По проекциям изображаем векторы абсолютных скорости и ускорения в рассматриваемый момент времени (рис. 92).

По теореме сложения скоростей для колечка,

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Скорость переносного движения $\bar{v}_e$ перпендикулярна стержню OA, а скорость относительного движения $\bar{v}_r$ направлена по стержню. Разлагая абсолютную скорость $\bar{v}$ по этим двум направлениям, получаем

$$v_e = v\sin\varphi;\quad v_r = v\cos\varphi.$$

Но

$$\cos\varphi = |x_1|/\sqrt{x_1^2+y_1^2} = 3/5;\quad \sin\varphi = |y_1|/\sqrt{x_1^2+y_1^2} = 4/5,$$

поэтому

$$v_e = 7{,}5\ \text{см/с};\quad v_r = 5{,}6\ \text{см/с}.$$

Угловая скорость вращения стержня определяется по формуле

$$\omega = v_e/OM = 7{,}5/5 = 1{,}5\ \text{с}^{-1}.$$

В соответствии с направлением $\bar{v}_e$ изображаем на рисунке дуговую стрелку для угловой скорости.

В частном случае переносного вращательного движения по теореме сложения ускорений для абсолютного ускорения имеем

$$\bar{a} = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_\text{к}. \qquad \text{(a)}$$

Вычисляем отдельные составляющие абсолютного ускорения $\bar{a}$ и изображаем их на рис. 93. Для модуля нормального переносного ускорения $\bar{a}_e^n$ получаем

$$a_e^n = OM\cdot\omega^2 = 11{,}3\ \text{см/с}^2.$$

Ускорение $\bar{a}_e^n$ направлено к оси переносного вращения, т. е. к точке O. Составляющая переносного ускорения $\bar{a}_e^\tau$ направлена перпендикулярно $\bar{a}_e^n$ и по величине неизвестна. Предполагая, что дуговая стрелка для ε направлена против часовой стрелки, изображаем на рисунке ускорения $\bar{a}_e^\tau$.

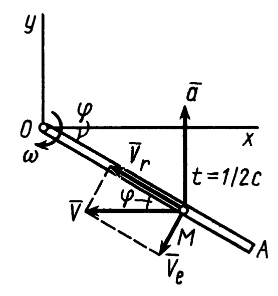


Рис. 92

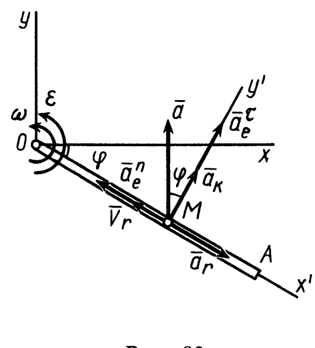


Рис. 93

Нормальная составляющая относительного ускорения $\bar{a}_r^n=0$, так как относительное движение колечка по стержню является прямолинейным. Касательная составляющая относительного ускорения в этом случае равна полному относительному ускорению, т. е. $\bar{a}_r^\tau=\bar{a}_r$. Предположим, что $\bar{a}_r$ направлено от точки M к A.

Ускорение Кориолиса $\bar{a}_к$ определяем по правилу Жуковского. Для его модуля имеем $a_к=2\omega v_r^*$, где $\bar{v}_r^*$ — проекция относительной скорости $\bar{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения Oz. В рассматриваемом случае $\bar{v}_r^*=\bar{v}_r$, поэтому $a_к=2\omega v_r=16{,}8$ см/с^2. Направление ускорения $\bar{a}_к$ получаем поворотом на 90° вектора $\bar{v}_r^*$ по направлению дуговой стрелки ω вокруг оси, проходящей через точку M параллельно оси вращения стержня Oz.

Выбираем оси координат $Mx'y'$ и проецируем векторы, входящие в уравнение (а) на эти оси. Имеем:
для Mx' $\quad -a\sin\varphi=a_r-a_e^n$;
для My' $\quad a\cos\varphi=a_e^\tau+a_к$.
Из этих уравнений определяем неизвестные ускорения:

$$a_r=-a\sin\varphi+a_e^n\approx-51{,}8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_e^\tau=a\cos\varphi-a_к\approx 30{,}5 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение a_r получилось отрицательным. Следовательно, предположение о направлении его оказалось неверным. В действительности $\bar{a}_r$ направлено против ранее принятого направления. Ускорение a_e^τ оказалось положительным. Предположение о направлении дуговой стрелки для ε подтвердилось.

Угловое ускорение стержня определяем по формуле

$$\varepsilon=|a_e^\tau|/OM=6{,}1 \text{ с}^{-2}.$$

ГЛАВА 6

СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В простейшем случае рассматривают сложение двух движений твердого тела, одно из которых является переносным, другое — относительным. *Относительным движением* твердого тела считают его движение, в простейшем случае поступательное или вращательное, относительно подвижной системы осей координат, движущейся относительно другой, основной или неподвижной, системы координат, т. е. системы координат, движение которой относительно других систем координат не рассматривается. *Переносным движением* твердого тела называют его движение, тоже в простейшем случае поступательное или вращательное, вместе с подвижной системой координат в рассматриваемый момент времени относительно неподвижной. *Сложным движением* твердого тела называется его движение относительно основной или неподвижной системы координат. Составление сложного движения из переносного и относительного в простейшем случае или нескольких переносных и относительных движений в общем

случае, называют **сложением движений** твердого тела. Обратный процесс называется **разложением движения** твердого тела на составляющие движения. Этот процесс всегда возможен и для него справедливы формулы, полученные для сложения движений твердого тела.

Плоское и движение свободного твердого тела считают уже сложными. В общем случае переносное и относительное движения твердого тела могут быть любыми сложными движениями тела.

При рассмотрении сложного движения твердого тела, состоящего из нескольких движений, рассматривают сложение его движений не за конечный промежуток времени, а в рассматриваемый момент времени, т. е. в действительности рассматривается сложение скоростей линейных и угловых. Для вычисления ускорений точек тела следует использовать формулу для сложного движения точки или формулы для ускорений точек того движения твердого тела, которое получается в результате сложения движений.

§ 1. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Имеем твердое тело, участвующее одновременно в двух поступательных движениях, одно из которых является переносным со скоростью $\bar{v}_1$, а другое — относительным со скоростью $\bar{v}_2$. Таким образом, твердое тело движется относительно подвижной системы координат $Oxyz$ поступательно со скоростью $\bar{v}_2$, а подвижная система координат движется относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ тоже поступательно со скоростью $\bar{v}_1$ (рис. 94). Движение тела относительно основной системы координат является сложным.

Установим вид сложного движения. Для этого вычислим скорость какой-либо точки M тела относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$. По теореме сложения скоростей для точки имеем

$$\bar{v}=\bar{v}_e+\bar{v}_r=\bar{v}_1+\bar{v}_2, \qquad (1)$$

так как переносное и относительное движения тела являются поступательными. Это справедливо для любой точки рассматриваемого тела, а потому сложное движение тела является поступательным со скоростью $\bar{v}$. Таким образом, *от сложения двух поступательных движений твердого тела получается поступательное движение со скоростью, равной векторной сумме скоростей составляющих поступательных движений.*

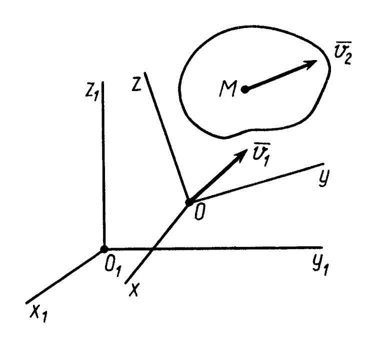


Рис. 94

Если имеется последовательность поступательных движений тела, первое из которых является относительным по отношению к переносному второму, а это второе — относительным к переносному третьему и т. д. (скорости таких последовательных движений соответственно $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ..., $\bar{v}_n$), то от сложения этих движений путем последовательного применения (1) получим поступательное движение тела со скоростью

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k. \qquad (2)$$

§ 2. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Пусть твердое тело участвует одновременно в двух вращениях: переносном с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ и относительном с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Оси вращений пересекаются в точке O (рис. 95, *а*). Векторы угловых скоростей как скользящие векторы можно считать перенесенными в точку O осей вращения.

Примером тела, участвующего в двух вращениях вокруг пересекающихся осей, является диск A, свободно насаженный на ось OO' и вращающийся вокруг нее с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Вместе с осью OO' диск еще вращается вокруг другой оси O_1O_2 (рис. 95, *б*) с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$.

Определим вид движения твердого тела, участвующего в двух вращениях вокруг пересекающихся осей. Точка O тела, расположенная на пересечении осей вращения, является неподвижной, и ее абсолютная скорость $\bar{v}_O = 0$. Докажем, что любая другая точка M тела, находящаяся на диагонали параллелограмма, построенного на векторах угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, тоже имеет в рассматриваемый момент скорость, равную нулю.

По теореме о сложении скоростей для точки M имеем

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{Me} + \bar{v}_{Mr}.$$

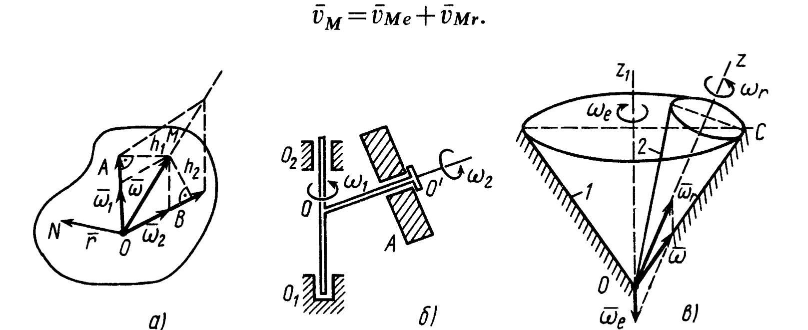


Рис. 95

Так как переносное и относительное движения являются вращениями вокруг осей, то

$$v_{Me}=h_1\,\omega_1=2\text{пл.}\Delta OAM;\quad v_{Mr}=h_2\omega_2=2\text{пл.}\Delta OBM,$$

где h_1 и h_2 — кратчайшие расстояния от точки M до соответствующих осей вращения. Площади треугольников в параллелограмме равны, поэтому $v_{Me}=v_{Mr}$. Векторы скоростей $\bar{v}_{Me}$ и $\bar{v}_{Mr}$ имеют противоположные направления. Таким образом, $\bar{v}_{Me}=0$. Это справедливо для любой точки M, расположенной на диагонали параллелограмма, так как масштаб векторов можно изменять. Точки оси OM имеют скорости, равные нулю. Следовательно, OM является мгновенной осью вращения тела в рассматриваемый момент, т. е. *при сложении двух вращений вокруг пересекающихся осей, одно из которых переносное, а другое — относительное, получается вращение тела вокруг мгновенной оси.*

Для определения абсолютной угловой скорости вращения вокруг мгновенной оси выберем на теле точку N и вычислим ее скорость один раз как скорость сложного движения, а другой — как вращения вокруг мгновенной оси. По формуле Эйлера для вращательных движений при сложном движении имеем

$$\bar{v}_N=\bar{v}_{Ne}+\bar{v}_{Nr}=\bar{\omega}_1\times\bar{r}+\bar{\omega}_2\times\bar{r}=(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\times\bar{r}.$$

Для абсолютного вращения вокруг мгновенной оси

$$\bar{v}_N=\bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Приравнивая скорости, получаем

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2, \tag{3}$$

т. е. *угловая скорость абсолютного вращения равна векторной сумме угловых скоростей составляющих вращений.*

Последовательное применение этого правила сложения вращений вокруг пересекающихся осей позволяет заменить любое количество вращений вокруг пересекающихся осей одним вращением, угловая скорость которого $\bar{\omega}$ равна векторной сумме угловых скоростей составляющих вращений, т. е.

$$\bar{\omega}=\sum_{(k)}\bar{\omega}_k.$$

Тело, участвующее в двух вращениях вокруг пересекающихся осей, имеет неподвижную точку, расположенную на пересечении осей. Оно вращается вокруг неподвижной точки, т. е. совершает сферическое движение. Таким образом, сферическое движение твердого тела можно считать состоящим из двух вращений вокруг пересекающихся осей: переносного и относительного.

Сферическое движение совершает конус *2* при качении без скольжения по неподвижному конусу *1* (рис. 95, *в*). Его движение можно считать двумя вращениями вокруг пересекающихся

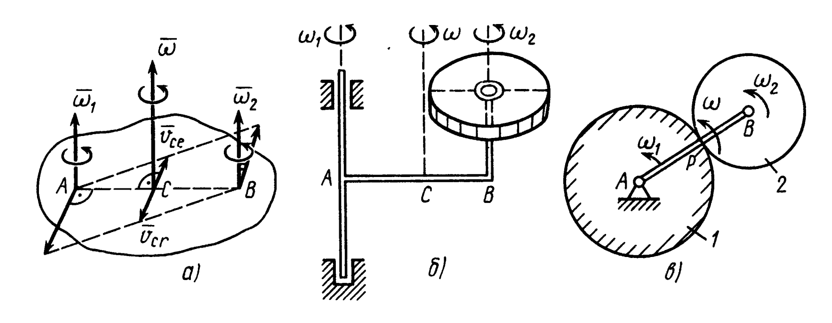


Рис. 96

осей. Относительное вращение происходит вокруг оси подвижного конуса Oz с угловой скоростью $\bar{\omega}_r$, а переносное — вокруг оси неподвижного конуса Oz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$. Абсолютным движением является вращение вокруг мгновенной оси OC с угловой скоростью

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_e+\bar{\omega}_r.$$

Мгновенная ось OC, как и ось подвижного конуса Oz, вращается вокруг оси неподвижного конуса Oz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$.

От движения подвижного конуса по неподвижному без скольжения легко перейти к движению подвижной конической шестерни по неподвижной шестерне, если у конусов отрезать их части плоскостями, перпендикулярными осям Oz_1 и Oz.

2. Сложение вращений вокруг параллельных осей. Следует рассмотреть три случая.

1) Вращения имеют одинаковые направления. Тело участвует в двух вращениях: переносном с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ и относительном с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ (рис. 96, *а*). Таким телом является диск, представленный на рис. 96, *б*. Пересечем оси вращения перпендикулярной прямой. Получим точки пересечения A и B, в которые можно перенести векторы угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. На отрезке AB тела в рассматриваемый момент имеется точка C, скорость которой равна нулю. Действительно, по теореме сложения скоростей для точки C имеем

$$\bar{v}_C=\bar{v}_{Ce}+\bar{v}_{Cr}.$$

Точки тела, для которых переносная и относительная скорости параллельны и противоположны, могут находиться только на отрезке AB между точками A и B. Скорость точки C равна нулю, если $v_{Ce}=v_{Cr}$. Но $v_{Ce}=\omega_1 AC$, $v_{Cr}=\omega_2 BC$. Следовательно,

$$\omega_1 AC=\omega_2 BC,$$

или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{BC}{AC}. \qquad (4)$$

Прямую, перпендикулярную осям вращения, можно провести на любом расстоянии. Следовательно, существует ось, скрепленная с телом и параллельная осям вращения, скорости точек которой равны нулю в данный момент. Она является мгновенной осью вращения в рассматриваемый момент времени.

Для определения угловой скорости $\bar{\omega}$ вращения тела вокруг мгновенной оси вычислим скорость точки B, считая ее движение сложным. Получим

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{Be} + \bar{v}_{Br},$$

но

$$v_{Be} = \omega_1 AB, \quad v_{Br} = \omega_2 BB = 0.$$

Следовательно,

$$v_B = \omega_1 AB.$$

Для скорости точки B при вращении тела вокруг мгновенной оси имеем

$$v_B = \omega BC.$$

Приравнивая скорости точки B, полученные двумя способами, имеем

$$\omega BC = \omega_1 AB, \quad AB = BC + AC.$$

Согласно (4),

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Поэтому

$$\omega = \omega_1 \frac{BC + AC}{BC} = \omega_1 + \omega_1 \frac{AC}{BC} = \omega_1 + \omega_2,$$

т. е.

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \tag{5}$$

Формулу (4) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}.$$

Образуя производную пропорцию и используя формулу (5), получим

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{BC + AC},$$

или

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{6}$$

Таким образом, *при сложении двух вращений тела вокруг параллельных осей в одинаковых направлениях получается вращение вокруг параллельной оси в том же направлении с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений. Мгновенная ось полученного вращения делит отрезок*

между осями составляющих вращений на части, обратно пропорциональные угловым скоростям этих вращений, внутренним образом. Точка C при таком делении располагается между точками A и B.

Естественно, справедливо и обратное. Вращение вокруг оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$ можно разложить на два вращения вокруг двух параллельных осей с угловыми скоростями $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$.

Тело, участвующее в двух вращениях вокруг параллельных осей, совершает плоское движение. Плоское движение твердого тела можно представить как два вращения, переносное и относительное, вокруг параллельных осей. Плоское движение колеса сателлита *2* по неподвижному колесу *1* (рис. 96, *в*) является примером движения, которое можно заменить двумя вращениями вокруг параллельных осей в одном и том же направлении, например против движения часовой стрелки. Колесо сателлита совершает переносное вращение вместе с кривошипом AB вокруг оси, проходящей через точку A с угловой скоростью ω_1, и относительное вращение вокруг оси, проходящей через точку B с угловой скоростью ω_2. Оба вращения имеют одинаковые направления. Абсолютное вращение происходит вокруг оси, проходящей через точку P, которая является в данный момент МЦС. Она находится в месте соприкосновения колес, если подвижное колесо катится без скольжения по неподвижному. Угловая скорость абсолютного вращения

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Абсолютное вращение с этой угловой скоростью происходит в том же направлении, что и составляющие движения.

2) Вращения имеют противоположные направления. Рассмотрим случай, когда $\omega_1 > \omega_2$ (рис. 97, *а*). Получим следующие формулы:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \tag{7}$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{BC - AC},$$

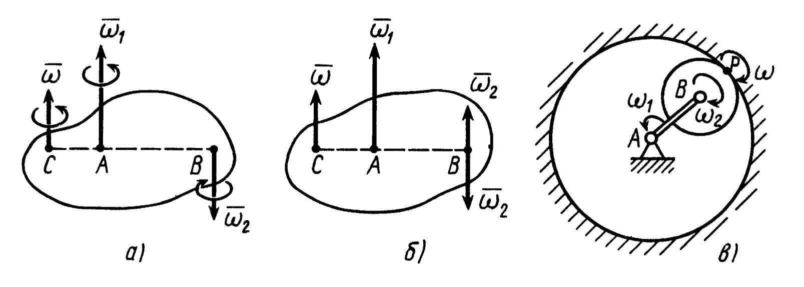


Рис. 97

или

$$\frac{\omega_1}{BC}=\frac{\omega_2}{AC}=\frac{\omega}{AB}. \qquad (8)$$

Для вывода этих формул разложим вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ на два вращения в том же направлении вокруг двух параллельных осей с угловыми скоростями $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'_2$. Ось одного из вращений с угловой скоростью $\bar{\omega}'_2$ возьмем проходящей через точку B и выберем $\omega'_2=\omega_2$. Другое вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$ пройдет через точку C (рис. 97, *б*). На основании (5) и (6) имеем

$$\omega_1=\omega'_2+\omega, \quad \frac{\omega}{AB}=\frac{\omega'_2}{AC}=\frac{\omega_1}{BC},$$

или

$$\omega=\omega_1-\omega'_2=\omega_1-\omega_2, \quad \frac{\omega_1}{BC}=\frac{\omega_2}{AC}=\frac{\omega}{AB}.$$

Справедливость формул (7) и (8) доказана. Таким образом, *при сложении двух вращений твердого тела вокруг параллельных осей в противоположных направлениях получается вращение вокруг параллельной оси с угловой скоростью, равной разности угловых скоростей составляющих вращений в сторону вращения с большей угловой скоростью. Ось абсолютного вращения делит отрезок между осями составляющих вращений на части, обратно пропорциональные угловым скоростям этих вращений внутренним образом.* Точка C при таком делении находится на отрезке AB за точкой A, через которую проходит ось вращения с большей угловой скоростью.

Можно также одно вращение разложить на два вокруг параллельных осей с противоположными направлениями вращения. Примером плоского движения твердого тела, которое может быть представлено двумя вращениями вокруг параллельных осей в противоположных направлениях, является движение колеса сателлита, катящегося внутри неподвижного колеса без скольжения (рис. 97, *в*). Переносным в этом случае является вращение колеса *2* вместе с кривошипом AB с угловой скоростью ω_1 вокруг оси, проходящей через точку A. Относительным будет вращение колеса *2* вокруг оси, проходящей через точку B с угловой скоростью ω_2, и абсолютным — вращение этого колеса вокруг оси, проходящей через МЦС, точку P, с угловой скоростью ω. В этом случае $\omega_2>\omega_1$ и потому угловая скорость абсолютного вращения $\omega=\omega_2-\omega_1$. Это вращение по направлению совпадает с направлением вращения, имеющим бóльшую угловую скорость. Ось абсолютного вращения расположена вне отрезка AB за осью вращения с большей угловой скоростью.

3. Пара вращений. Парой вращений называется совокупность двух вращений твердого тела, переносного и относительного,

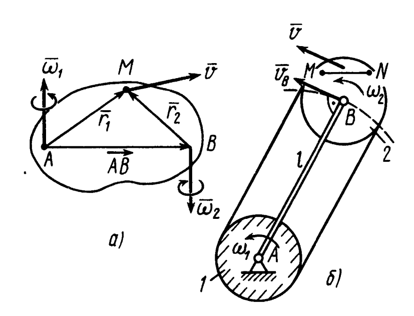


Рис. 98

вокруг параллельных осей с одинаковыми угловыми скоростями в противоположных направлениях (рис. 98, *а*). В этом случае $\bar\omega_1 = -\bar\omega_2$. Рассматривая движение тела как сложное, по теореме сложения скоростей для точки M имеем

$$\bar v_M = \bar v_{Me} + \bar v_{Mr}. \tag{9}$$

Составляющие движения являются вращениями с угловыми скоростями $\bar\omega_1$ и $\bar\omega_2$. По формуле Эйлера для них получим

$$\bar v_{Me} = \bar\omega_1 \times \bar r_1, \quad \bar v_{Mr} = \bar\omega_2 \times \bar r_2.$$

После этого для абсолютной скорости имеем

$$\bar v_M = \bar\omega_1 \times \bar r_1 + \bar\omega_2 \times \bar r_2 = \bar\omega_1 \times (\bar r_1 - \bar r_2),$$

так как $\bar\omega_2 = -\bar\omega_1$. Учитывая, что $\bar r_1 - \bar r_2 = \overrightarrow{AB}$, получаем

$$\bar v_M = \bar\omega_1 \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \times \bar\omega_1. \tag{9'}$$

Так как векторное произведение $\overrightarrow{BA} \times \bar\omega_1$ можно назвать моментом угловой скорости $\bar\omega_1$ относительно точки B, то

$$\bar v_M = \bar M_B(\bar\omega_1).$$

Заменяя в формуле (9′) $\bar\omega_1$ на $-\bar\omega_2$, соответственно получим

$$\bar v_M = \bar\omega_2 \times (\bar r_2 - \bar r_1) = \bar\omega_2 \times \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \times \bar\omega_2 = \bar M_A(\bar\omega_2).$$

Объединяя результаты, имеем

$$\bar v_M = \bar\omega_1 \times \overrightarrow{AB} = \bar\omega_2 \times \overrightarrow{BA} = \bar M_B(\bar\omega_1) = \bar M_A(\bar\omega_2),$$

или

$$\bar v_M = \bar M_B(\bar\omega_1) = \bar M_A(\bar\omega_2) = \bar M(\bar\omega_1,\ \bar\omega_2), \tag{10}$$

где $\bar M(\bar\omega_1,\ \bar\omega_2)$ является векторным моментом пары вращений $(\bar\omega_1,\ \bar\omega_2)$.

Таким образом, *если твердое тело участвует в паре вращений, то скорости всех точек тела, согласно* (10), *одинаковы, т. е. тело совершает при этом мгновенное поступательное движение.* При длительном участии тела в паре вращений будет длительным и поступательное движение.

Скорость поступательного движения тела

$$\bar v = \bar M(\bar\omega_1, \bar\omega_2) = \bar M_A(\bar\omega_A) = \bar M_B(\bar\omega_1).$$

Она равна векторному моменту пары вращений, который может быть также выражен векторным моментом одной из угловых скоростей относительно какой-либо точки, расположенной на оси вращения тела с другой угловой скоростью, входящей в пару вращений. Скорость поступательного движения тела, участвующего в паре вращений, зависит только от характеристик пары вращений. Она перпендикулярна осям пары вращений. Числовое ее значение можно выразить как

$$v = \omega_1 d = \omega_2 d, \tag{11}$$

где d — кратчайшее расстояние между осями пары или плечо пары.

Пара вращений аналогична паре сил, действующей на твердое тело. Угловые скорости вращения тела, аналогично силам, являются векторами скользящими. Векторный момент пары сил является вектором свободным. Аналогичным свойством обладает и векторный момент пары вращений.

Пару вращений и ее эквивалентность поступательному движению можно наглядно продемонстрировать на приборе (рис. 98, *б*), состоящем из неподвижной *1* и подвижной *2* шестеренок, соединенных цепью. При вращении кривошипа AB вокруг оси, проходящей через точку A, шестеренка *2* будет участвовать в двух вращениях вокруг параллельных осей: переносном вместе с кривошипом и относительном вокруг оси, проходящей через точку B. Вращения противоположны. Их угловые скорости одинаковы. Скорости всех точек шестеренки *2* равны скорости точки B, причем $v_B = l\omega_1$ все время при движении этой шестеренки.

Если с шестеренкой *2* скрепить прямолинейный отрезок MN, то он при движении механизма будет оставаться параллельным своему первоначальному положению. Если этот горизонтальный отрезок совместить с дном стаканчика с водой, прикрепив стаканчик к подвижной шестеренке, то вода не выльется из стаканчика при движении механизма в вертикальной плоскости.

При поступательном движении траектории всех точек тела одинаковы. Точка B описывает окружность радиуса l. Траектории всех других точек подвижной шестеренки будут тоже окружностями такого же радиуса. Тело, участвующее в паре вращений, совершает плоское поступательное движение.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Если тело одновременно участвует в переносном поступательном движении со скоростью $\bar{v}$ и относительном вращательном с угловой скоростью $\bar{\omega}$, то в зависимости от их

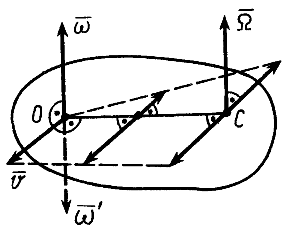


Рис. 99

взаимного расположения целесообразно рассмотреть три отдельных случая.

1. Скорость поступательного движения перпендикулярна оси относительного вращения. В этом случае векторы $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$ перпендикулярны (рис. 99). На линии OC, перпендикулярной плоскости, в которой расположены $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$, имеется точка C, скорость которой равна нулю. Определим ее расстояние от точки O. По теореме сложения скоростей для точки C имеем

$$\bar{v}_C = \bar{v}_e + \bar{v}_r = \bar{v} + \bar{\omega} \times \overrightarrow{OC},$$

так как при вращении вокруг оси

$$\bar{v}_r = \bar{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$

Учитывая, что скорости $\bar{v}$ и $\bar{v}_r$ противоположны по направлению, получим

$$v_C = v - \omega OC.$$

Так как $v_C = 0$, то $v - \omega OC = 0$ и, следовательно, точки C и O находятся на расстоянии

$$OC = \frac{v}{\omega}. \qquad (12)$$

Другие точки, имеющие скорости, равные нулю, располагаются на линии, проходящей через точку C, параллельно оси вращения тела с угловой скоростью $\bar{\omega}$. Таким образом, имеется мгновенная ось вращения, параллельная оси относительного вращения и проходящая через точку C. Для определения угловой скорости абсолютного вращения $\bar{\Omega}$ вычислим скорость, например, точки O двумя способами. Считая движение сложным, имеем

$$\bar{v}_O = \bar{v}_{Oe} + \bar{v}_{Or}.$$

Точка O находится на оси относительного вращения, и поэтому $v_{Or} = 0$. Скорость переносного движения $\bar{v}_{Oe}$ в рассматриваемом случае переносного поступательного движения равна $\bar{v}$. Следовательно, $\bar{v}_O = \bar{v}$, $v_O = v$. С другой стороны, эквивалентное абсолютное движение тела является вращением вокруг мгновенной оси, проходящей через точку C с угловой скоростью Ω. Поэтому для скорости точки O имеем

$$v_O = \Omega OC.$$

Приравнивая скорости точки O, вычисленные двумя способами и используя (12), получаем

$$v = \Omega OC, \text{ или } v = \Omega \frac{v}{\omega},$$

или

$$\Omega = \omega.$$

Вращение вокруг мгновенной оси должно иметь такое направление, чтобы скорость точки O имела такое же направление, что и скорость $\bar{v}$. Отсюда получаем совпадение направлений вращения относительного и абсолютного вращений. Следовательно, $\bar{\Omega} = \bar{\omega}$. Таким образом, *при сложении поступательного переносного и вращательного относительного движений твердого тела, у которого скорость поступательного движения перпендикулярна оси относительного вращения, эквивалентное абсолютное движение является вращением вокруг мгновенной оси, параллельной оси относительного вращения с угловой скоростью, совпадающей с угловой скоростью относительного вращения.*

Такой же результат можно получить, если поступательное движение со скоростью $\bar{v}$ заменить парой вращений $(\bar{\omega}', \bar{\Omega})$, выбрав $\Omega = \omega' = \omega$. Два вращения с угловыми скоростями $\bar{\omega}'$ и $\bar{\omega}$ можно отбросить, так как $(\bar{\omega}', \bar{\omega}) \backsim 0$, и абсолютным движением окажется вращение с угловой скоростью $\bar{\Omega} = \bar{\omega}$. Скорость поступательного движения равна моменту пары вращений. Приравнивая их, получим $v = \omega OC$ или

$$OC = \frac{v}{\omega},$$

что совпадает с (12).

Еще одна интерпретация рассмотренного случая получается, если рассмотреть параллельный перенос скользящего вектора угловой скорости $\bar{\Omega}$ в точку O. Такой перенос, как известно, следует компенсировать парой вращений, эквивалентной поступательному движению со скоростью $\bar{v}$.

На поступательное переносное и вращательное относительное с осью вращения, перпендикулярной к скорости переносного движения, разлагается плоское движение твердого тела. Так, плоское движение без скольжения колеса по прямой (рис. 100) можно составить из поступательного движения колеса вместе с центром O со скоростью $\bar{v}$ и относительного вращательного

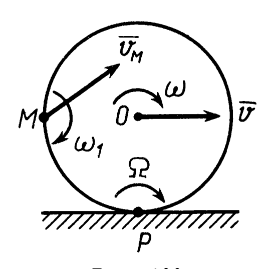


Рис. 100

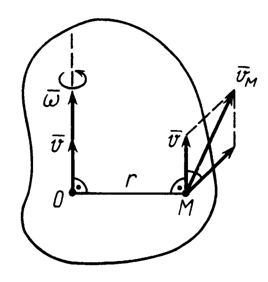


Рис. 101

вокруг оси, проходящей через точку O с угловой скоростью ω. Это же движение можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через МЦС, который совпадает с точкой P. Угловая скорость этого абсолютного вращения $\Omega=\omega$, и оно имеет то же направление вращения, что и относительное вокруг оси, проходящей через точку O. Если в качестве точки O используется другая точка колеса, например точка M, то изменится только скорость переносного поступательного движения. Она будет равна скорости $\bar{v}_M$ точки M. Угловая скорость ω_1 вращения тела вокруг оси, проходящей через точку M, по величине и направлению будет той же самой, что и вокруг осей, проходящих через точки O и P.

2. Винтовое движение. Движение, при котором скорость переносного поступательного движения тела параллельна оси относительного вращения, называется винтовым движением твердого тела (рис. 101). Ось вращения тела в этом случае называется винтовой осью. При винтовом движении тело движется поступательно параллельно оси винтового движения и вращается вокруг этой оси. Винтовое движение не приводится к какому-либо другому одному простому эквивалентному движению.

При винтовом движении векторы $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$ могут иметь как одинаковые, так и противоположные направления. Винтовое движение тела характеризуется параметром винтового движения, которым считают величину $p=\frac{v}{\omega}$. Если v и ω изменяются с течением времени, то и параметры винтового движения являются переменными. В общем случае $v=\frac{ds}{dt}$, $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ и $p=\frac{ds}{dt}:\frac{d\varphi}{dt}=\frac{ds}{d\varphi}$, т. е. *$p$ есть перемещение тела вдоль оси винтового движения при повороте тела на один радиан.*

Для скорости точки M тела, совершающего винтовое движение, по теореме сложения скоростей имеем

$$\bar{v}_M=\bar{v}_{Me}+\bar{v}_{Mr}.$$

Но $\bar{v}_{Me}=\bar{v}$, $v_{Mr}=\omega r$, где r — расстояние точки до винтовой оси. Скорости $\bar{v}$ и $\bar{v}_{Mr}$ перпендикулярны. Следовательно,

$$v_M=\sqrt{v^2+v_{Mr}^2}=\sqrt{v^2+r^2\omega^2}.$$

Учитывая, что $v=\omega p$, получаем

$$v=\omega\sqrt{p^2+r^2}. \qquad (13)$$

Если тело вращается с постоянной угловой скоростью и имеет постоянную скорость поступательного движения, то такое движение тела называется постоянным винтовым

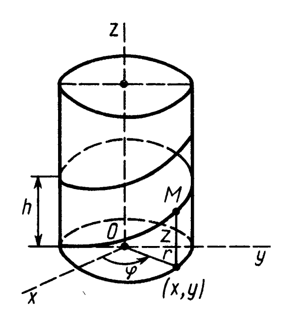


Рис. 102

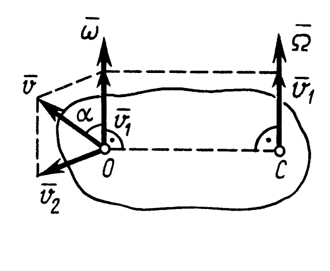


Рис. 103

движением. В этом случае точка тела при движении все время находится на поверхности кругового цилиндра с радиусом r. Траекторией точки является винтовая линия. Кроме параметра в рассматриваемом случае вводят *шаг винта*, т. е. расстояние, на которое переместится какая-либо точка тела при одном обороте тела вокруг оси винтового движения. Угол поворота тела φ при $\omega=\text{const}$ вычисляется по формуле $\varphi=\omega t$. Для одного оборота тела $\varphi=2\pi$. Необходимое для этого время

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

За время T точка переместится в направлении, параллельном винтовой оси, на шаг винта

$$h=v\cdot T=v\frac{2\pi}{\omega}=2\pi p.$$

Отсюда получается зависимость шага винта от параметра винтового движения $h=2\pi p$.

Уравнения движения точки M тела по винтовой линии (рис. 102) в декартовых координатах выражаются в следующей форме:

$$x=r\cos\varphi=r\cos\omega t;$$

$$y=r\sin\varphi=r\sin\omega t;$$

$$z=v\cdot t.$$

В этих уравнениях величины ω, r и v являются постоянными.

3. Общий случай. Пусть скорость переносного поступательного движения $\bar{v}$ и угловая скорость относительного вращения $\bar{\omega}$ образуют угол α. Случаи, когда $\alpha=0$, 90 и 180°, уже рассмотрены.

Разложим скорость $\bar{v}$ (рис. 103) на две перпендикулярные составляющие $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, причем $\bar{v}_1$ направим параллельно $\bar{\omega}$. Тогда

$$v_1=v\cos\alpha,\quad v_2=v\sin\alpha.$$

Переносное движение со скоростью $\bar{v}_2$ и относительное вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$ эквивалентны вращению вокруг оси, проходящей через точку C с угловой скоростью $\bar{\Omega}=\bar{\omega}$ (согласно случаю первому), причем $OC=\frac{v_2}{\omega}=\frac{v\sin\alpha}{\omega}$.

Скорость поступательного движения $\bar{v}_1$ имеют все точки тела. Таким образом, получено винтовое движение с винтовой осью, отстоящей от первоначальной оси вращения на величину

$$OC=\frac{v\sin\alpha}{\omega}.$$

Параметр полученного винтового движения

$$p=\frac{v_1}{\omega}=\frac{v\cos\alpha}{\omega}.$$

Общий случай переносного поступательного и относительного вращательного движений твердого тела оказался эквивалентным мгновенному винтовому движению.

§ 4. СТАТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ В КИНЕМАТИКЕ

Рассмотренные случаи движений твердого тела показывают, что вектор угловой скорости тела $\bar{\omega}$ является вектором скользящим. В статике вектором скользящим является сила $\bar{F}$, действующая на абсолютно твердое тело. Паре сил в статике соответствует пара вращений в кинематике, векторным моментом которой является скорость поступательного движения тела. Эти аналогии позволяют без подробного рассмотрения сформулировать некоторые результаты сложения движений твердого тела, используя соответствующие теоремы, доказанные в статике.

Если тело участвует в n вращениях с угловыми скоростями $\bar{\omega}_i$ и l поступательных движениях со скоростями $\bar{v}_k$, то по аналогии с приведением сил, приложенных к твердому телу, можно выбрать за центр приведения точку O тела и получить в качестве главного вектора угловых скоростей составляющих вращений угловую скорость

$$\bar{\Omega}=\sum_{i=1}^{n}\bar{\omega}_i,$$

проходящую через точку O. Главный момент при этом образуют все присоединенные пары вращений и скорости поступательных движений. Эквивалентная главному моменту скорость поступательного движения

$$\bar{v}=\sum_{i=1}^{n}\bar{M}_0(\bar{\omega}_i)+\sum_{k=1}^{l}\bar{v}_k.$$

Полученное сложное движение тела можно дальше упростить. Оно в общем случае приведется к винтовому движению, если $\bar{\Omega}$ и $\bar{v}$ не равны нулю и не перпендикулярны. В частных случаях, если $\bar{v}=0$ или $\bar{v}$ перпендикулярно $\bar{\Omega}$, может получиться одно вращение. При $\bar{\Omega}=0$ получим одно эквивалентное поступательное движение со скоростью $\bar{v}$.

Аналогично статическим инвариантам имеют место и кинематические инварианты. Так, инвариантности главного вектора сил в статике в кинематике соответствует инвариантность угловой скорости $\bar{\Omega}$, т. е. ее независимость от выбора центра приведения, вместе с которым тело совершает поступательное движение.

ГЛАВА 7

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Сплошной средой считают деформируемые тела, различные жидкости, не очень разреженные газы. Понятия скорости и ускорения точки сплошной среды такие же, как и в кинематике одной точки. В кинематике сплошной среды роль точки отводится малой частице этой среды. Рассмотрим задания движения сплошной среды и получим формулы, по которым вычисляются скорости и ускорения точек сплошной среды.

Движение сплошной среды может быть изучено двумя методами, один из которых — метод Лагранжа — является обобщением метода, применявшегося в кинематике одной точки. Движение в методе Лагранжа задается в переменных Лагранжа. Другой метод — метод Эйлера — широко использует концепцию теории поля. При этом движение задается и изучается в переменных Эйлера. При рассмотрении движения сплошной среды преимущественно используется полевой подход, базирующийся на методе Эйлера и соответственно использующий переменные Эйлера.

§ 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА И ЭЙЛЕРА

Переменные Лагранжа. В выделенном объеме сплошной среды каждая его точка (малая частица) в фиксированный момент времени, например $t=0$, имеет координаты x_0, y_0, z_0 или другие параметры a, b, c, которые являются функциями этих координат

$$a=\varphi_1(x_0,\ y_0,\ z_0);\quad b=\varphi_2(x_0,\ y_0,\ z_0);\quad c=\varphi_3(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

допускающими вторые производные по всем переменным. Параметры a, b, c, так же как и x_0, y_0, z_0, дают возможность отличать одну точку сплошной среды от другой. В разные

моменты времени t различные точки сплошной среды характеризуются четырьмя независимыми переменными a, b, c, t, которые называются *переменными Лагранжа.*

Для задания движения сплошной среды в переменных Лагранжа, как и в случае одной точки, достаточно задать декартовы координаты x, y, z всех точек сплошной среды или их радиусы-векторы $\bar{r}$, но уже как функции четырех переменных Лагранжа:

$$x=f_1(a,\ b,\ c,\ t);\ y=f_2(a,\ b,\ c,\ t);\ z=f_3(a,\ b,\ c,\ t),$$

или

$$\bar{r}=\bar{r}(a,\ b,\ c,\ t).$$

В кинематике одной точки, которая рассматривалась ранее, использовались переменные Лагранжа для этой точки. Параметры a, b, c не применялись, так как не было других точек, от которых следовало отличать рассматриваемую точку. Оставалась зависимость координат точки или ее радиуса-вектора только от времени. Для сплошной среды задание параметров a, b, c позволяет выделить конкретную точку. Разным значениям этих параметров соответствуют различные точки сплошной среды.

Если движение сплошной среды задано в переменных Лагранжа, то скорости и ускорения в этих переменных определяются по обычным формулам кинематики точки:

$$\bar{v}=\partial\bar{r}/\partial t,$$

или

$$v_x=\partial x/\partial t;\ v_y=\partial y/\partial t;\ v_z=\partial z/\partial t;$$

$$\bar{a}=\partial\bar{v}/\partial t=\partial^2\bar{r}/\partial t^2,$$

или

$$a_x=\partial^2 x/\partial t^2;\ a_y=\partial^2 y/\partial t^2;\ a_z=\partial^2 z/\partial t^2.$$

Производные по времени t частные, так как вычисляются при фиксированных значениях переменных a, b, c. Величины x, y, z или $\bar{r}$ можно также дифференцировать по каждому из переменных a, b, c.

В методе Лагранжа объектом изучения являются сами точки движущейся сплошной среды.

Переменные Эйлера. В механике сплошной среды, особенно для жидкостей и газов, а также в теории поля преимущественно используются метод Эйлера и соответственно переменные Эйлера. В методе Эйлера рассматриваются не фиксированные точки сплошной среды, а точки пространства, занятые движущейся сплошной средой. За независимые переменные принимают время t и декартовы координаты точки M пространства x, y, z или другие параметры, характеризующие различные точки пространства. Четыре независимые переменные величины x, y, z, t называют *переменными Эйлера.*

Различные векторные и скалярные величины, характеризующие сплошную среду, такие, как, например, скорость, ускоре-

ние, плотность и т. п., рассматривают как функции этих переменных. В случае сплошной среды изучаются поля скалярных и векторных величин, характеризующих движущуюся сплошную среду и ее свойства. Изучаются распределение этих величин по точкам пространства, занятого сплошной средой, и их изменение с течением времени.

По известному векторному полю скоростей сплошной среды, заданному в переменных Эйлера $\bar{v}=\bar{v}(x,\ y,\ z,\ t)$, можно определить векторное поле ускорений $\bar{a}$ в этих переменных. Получим соответствующую формулу. Движение сплошной среды в переменных Эйлера считается известным, если задано поле скоростей в этих переменных. Согласно определению ускорения точки сплошной среды, находящейся в какой-либо точке пространства $M(x,\ y,\ z)$ в момент времени t, следует рассмотреть положение этой точки сплошной среды в момент времени $t+\Delta t$. Она в этот момент вследствие движения сплошной среды окажется в другой точке пространства M_1 с координатами $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ и будет иметь скорость $\bar{v}_1$, зависящую от координат этой новой точки пространства M_1 и времени $t+\Delta t$. Изменение координат рассматриваемой точки сплошной среды на Δx, Δy, Δz произошло вследствие изменения времени на Δt, поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=v_x;\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=v_y;\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=v_z. \qquad (1)$$

Разложим скорость $\bar{v}_1$ в ряд по степеням величин Δx, Δy, Δz, Δt:

$$\bar{v}_1=\bar{v}(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ t+\Delta t)=\bar{v}(x,\ y,\ z,\ t)+$$
$$+(\partial\bar{v}/\partial x)_{M,t}\Delta x+(\partial\bar{v}/\partial y)_{M,t}\Delta y+(\partial\bar{v}/\partial z)_{M,t}\Delta z+(\partial\bar{v}/\partial t)_{M,t}\Delta t+\ \ldots$$

Индексы M и t у производных указывают на то, что они берутся в точке $M(x,\ y,\ z)$ пространства в момент времени t. Согласно определению ускорения $\bar{a}$ точки сплошной среды, находящейся в точке пространства M в момент времени t, имеем

$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{v}_1-\bar{v}}{\Delta t}=\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}\right)_{M,t}+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)_{M,t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+$$
$$+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)_{M,t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_{M,t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Остальные слагаемые ряда в пределе обращаются в ноль. Подставляя (1) в (2) и опуская для краткости индексы M и t у производных, получаем

$$\bar{a}=(\partial\bar{v}/\partial t)+v_x(\partial\bar{v}/\partial x)+v_y(\partial\bar{v}/\partial y)+v_z(\partial\bar{v}/\partial z). \qquad (3)$$

В проекциях на координатные оси имеем

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \partial v_x/\partial t + v_x(\partial v_x/\partial x) + v_y(\partial v_x/\partial y) + v_z(\partial v_x/\partial z); \\ a_y &= \partial v_y/\partial t + v_x(\partial v_y/\partial x) + v_y(\partial v_y/\partial y) + v_z(\partial v_y/\partial z); \\ a_z &= \partial v_z/\partial t + v_x(\partial v_z/\partial x) + v_y(\partial v_z/\partial y) + v_z(\partial v_z/\partial z). \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

По векторной формуле (3) вычисляют поле ускорений в переменных Эйлера, если известно поле скоростей. В эту формулу входят $\partial\bar{v}/\partial t$ — локальная производная от вектора скорости — и группа слагаемых $v_x(\partial\bar{v}/\partial x) + v_y(\partial\bar{v}/\partial y) + v_z(\partial\bar{v}/\partial z)$, представляющая собой конвективную производную от этого вектора. Полное изменение вектора скорости с течением времени, т. е. ускорение, обозначим $D\bar{v}/Dt$.

Локальная производная $\partial\bar{v}/\partial t$ характеризует изменение вектора скорости $\bar{v}$ в точке $M(x, y, z)$ пространства вследствие изменения только одного времени при неизменных x, y, z. Полная производная $D\bar{v}/Dt$ равна локальной производной $\partial\bar{v}/\partial t$ в тех точках пространства, в которых скорость в рассматриваемый момент времени равна нулю.

Группа слагаемых, представляющая конвективную производную, учитывает изменение вектора скорости, вызванное переносом рассматриваемой точки сплошной среды самой движущейся средой.

Рассмотрим частные случаи.

1. Если $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$, т. е. поле скоростей стационарно, то $\partial\bar{v}/\partial t = 0$ и $\bar{a} = D\bar{v}/Dt = v_x(\partial\bar{v}/\partial x) + v_y(\partial\bar{v}/\partial y) + v_z(\partial\bar{v}/\partial z)$.

2. При $\bar{v} = \bar{v}(t)$ $\partial\bar{v}/\partial x = \partial\bar{v}/\partial y = \partial\bar{v}/\partial z = 0$ и $\bar{a} = D\bar{v}/Dt = \partial\bar{v}/\partial t$.

3. Если $\bar{v} = \overrightarrow{\text{const}}$, то $\partial\bar{v}/\partial t = 0$, $\partial\bar{v}/\partial x = \partial\bar{v}/\partial y = \partial\bar{v}/\partial z = 0$ и $\bar{a} = D\bar{v}/Dt = 0$.

По формуле (3) вычисляют полные, или субстанциальные, производные по времени в переменных Эйлера от любых векторных или скалярных величин, характеризующих сплошную среду. Пусть, например, известно скалярное поле плотностей $\rho(x, y, z, t)$ сплошной среды. Рассуждения, аналогичные приведенным при выводе формулы для ускорения, приведут к полной производной от ρ по времени t

$$D\rho/Dt = \partial\rho/\partial t + v_x(\partial\rho/\partial x) + v_y(\partial\rho/\partial y) + v_z(\partial\rho/\partial z).$$

Если сплошная среда неподвижна, т. е. $v_x = v_y = v_z = 0$, то полная производная по времени от любой векторной или скалярной функции, характеризующей сплошную среду, согласно (3), равна локальной производной.

Преобразованием конвективной производной из (3) можно получить другое выражение для ускорения (формула Лэмба — Громеко):

$$\bar{a} = \partial\bar{v}/\partial t + \nabla(v^2/2) - \bar{v} \times \operatorname{rot}\bar{v}, \qquad (4)$$

где $\operatorname{rot}\bar{v}$ — вихрь вектора скорости, а ∇ — символический оператор Гамильтона:

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям декартовой системы осей координат. Вихрь вектора скорости определяется выражением

$$\bar{\Omega} = \operatorname{rot}\bar{v} = \nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k}. \tag{5}$$

В дальнейшем используется также вектор $\bar{\omega}$, определяемый как половина вихря вектора скорости:

$$\bar{\omega} = {}^1/_2 \operatorname{rot}\bar{v}. \tag{6}$$

В проекциях на оси координат

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right); \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{6$'$}$$

Для выяснения физического смысла $\operatorname{rot}\bar{v}$ рассмотрим несколько примеров вычисления его по заданному полю скоростей.

Пример 1. Сплошная среда совершает плоское движение, параллельное оси Ox, с постоянной скоростью $\bar{v}$ (рис. 104). Имеем $v_x = v = \text{const}$; $v_y = 0$; $v_z = 0$. По формуле (5) для вектора вихря $\bar{\Omega} = \operatorname{rot}\bar{v}$ имеем:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0; \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0;$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

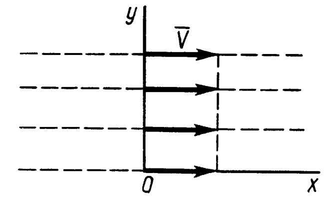


Рис. 104

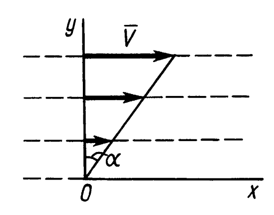


Рис. 105

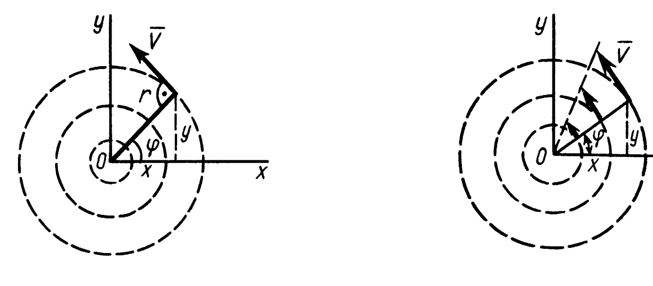


Рис. 106 Рис. 107

Следовательно, $\bar{\Omega}=\operatorname{rot}\bar{v}=0$ во всех точках пространства, занятого движущейся сплошной средой.

Пример 2. Сплошная среда совершает плоское движение, параллельное оси Ox, со скоростью, распределенной по линейному закону (рис. 105). Траектории точек сплошной среды являются прямыми линиями, параллельными оси Ox. В этом случае

$$v_x=ny;\quad v_y=0;\quad v_z=0,$$

где $n=\operatorname{tg}\alpha=\mathrm{const}$. Имеем:

$$\Omega_x=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=0;\quad \Omega_y=\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=0;$$

$$\Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=-n.$$

Таким образом, во всех точках потока сплошной среды

$$\bar{\Omega}=\operatorname{rot}\bar{v}=\Omega_x\bar{i}+\Omega_y\bar{j}+\Omega_z\bar{k}=-n\bar{k},$$

где $\bar{k}$ — единичный вектор, направленный по оси Oz.

Пример 3. Точки сплошной среды движутся по круговым траекториям с центрами на оси Oz и скоростями, обратно пропорциональными радиусам окружностей (рис. 106), т. е. $v=n/r$, где $n=\mathrm{const}$. Имеем:

$$v_x=-v\sin\varphi=-ny/r^2;\quad v_y=v\cos\varphi=nx/r^2;\quad v_z=0,$$

так как

$$\sin\varphi=y/r;\quad \cos\varphi=x/r,$$

где x, y — координаты точки. По формуле (5) имеем

$$\Omega_x=0;\quad \Omega_y=0;\quad \Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=\left(\frac{n}{r^2}-\frac{2nx}{r^3}\frac{x}{r}\right)-\left(-\frac{n}{r^2}+\frac{2ny}{r^3}\frac{y}{r}\right)=0,$$

так как $x^2+y^2=r^2$.

Следовательно, $\bar{\Omega}=\operatorname{rot}\bar{v}=0$ во всех точках потока, кроме точки $r=0$, для которой вычисления непригодны, так как в этой точке скорость обращается в бесконечность.

Пример 4. Сплошная среда вращается как твердое тело вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_0. Скорости точек сплошной среды в этом случае распределены по линейному закону (рис. 107), т. е. $v=\omega_0 r$. В этом случае

$$v_x=-v\sin\varphi=-\omega_0 y;\quad v_y=v\cos\varphi=\omega_0 x;\quad v_z=0.$$

По формулам для вихря скорости имеем

$$\Omega_x=0;\quad \Omega_y=0;\quad \Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=\omega_0-(-\omega_0)=2\omega_0.$$

Следовательно,

$$\bar{\Omega}=\operatorname{rot}\bar{v}=2\omega_0\bar{k},$$

где $\bar{k}$ — единичный вектор, направленный по оси Oz. Во всех точках потока $\operatorname{rot}\bar{v}$ имеет постоянную величину и постоянное направление, параллельное оси Oz, в том числе и в точке O, где $r=0$ и $v=0$.

Угловая скорость

$$\omega_0=\frac{1}{2}\Omega=\omega,$$

т. е. равна половине вихря вектора скорости. Таким образом, *половина вихря вектора скорости является вектором угловой скорости вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПРОСТРАНСТВА

Пусть известны скорость в точке O в момент t и производные от нее по координатам в этот же момент времени (рис. 108). Получим формулу для вычисления скорости в этот же момент времени в любой другой точке M из малой окрестности точки O. Так как скорости в точках M и O рассматриваются в один и тот же момент времени, то удобно выбрать начало осей координат, относительно которых изучается движение сплошной среды, в точке O.

Точки M пространства из малой окрестности точки O отличаются друг от друга только координатами x, y, z или радиусом-вектором $\bar{r}$. Скорость в какой-либо точке M для фиксированного момента времени является функцией координат этой точки x, y, z. Разложим $\bar{v}(x, y, z)$ в степенной ряд по координатам x, y, z, ограничиваясь слагаемыми первой степени по этим переменным и пренебрегая слагаемыми второй и более высоких степеней, предполагая, что ими можно пренебречь по сравнению с сохраняемыми слагаемыми для достаточно малых x, y, z. Получим

$$\bar{v}(x, y, z)=\bar{v}(0, 0, 0)+(\partial\bar{v}/\partial x)_O x+(\partial\bar{v}/\partial y)_O y+(\partial\bar{v}/\partial z)_O z, \quad (7)$$

где $\bar{v}(0, 0, 0)=\bar{v}_O$ — скорость в точке O. Индекс O у производных служит указанием на то, что они вычисляются в точке O пространства. В дальнейшем его будем опускать. В проекциях на координатные оси из (7) имеем

$$\left.\begin{aligned} v_x&=v_{Ox}+\frac{\partial v_x}{\partial x}x+\frac{\partial v_x}{\partial y}y+\frac{\partial v_x}{\partial z}z;\\ v_y&=v_{Oy}+\frac{\partial v_y}{\partial x}x+\frac{\partial v_y}{\partial y}y+\frac{\partial v_y}{\partial z}z;\\ v_z&=v_{Oz}+\frac{\partial v_z}{\partial x}x+\frac{\partial v_z}{\partial y}y+\frac{\partial v_z}{\partial z}z.\end{aligned}\right\} \quad (7')$$

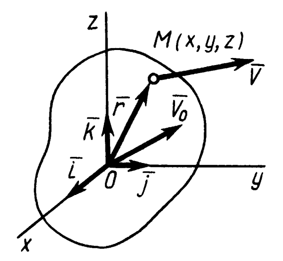


Рис. 108

Введем компоненты тензора скоростей деформации S в точке O выражениями

$$
\left.
\begin{aligned}
&e_{xx}=\frac{\partial v_x}{\partial x};\;\; e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)=e_{yx},\\
&e_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=e_{zx};\;\; e_{yy}=\frac{\partial v_y}{\partial y};\\
&e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)=e_{zy};\;\; e_{zz}=\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (8)
$$

Тензор скоростей деформаций удобно представить в форме таблицы или матрицы:

$$
S=\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (9)
$$

Компоненты тензора скоростей деформаций, характеризующие движение сплошной среды, зависят от точки пространства и направления осей координат. Тензор S является симметричным тензором, так как согласно формулам, определяющим его компоненты,

$$
e_{xy}=e_{yx};\;\; e_{yz}=e_{zy};\;\; e_{zx}=e_{xz}.
$$

Для таких симметричных тензоров в линейной алгебре доказывается, что в каждой точке существуют такие прямоугольные оси координат, называемые *главными осями*, для которых тензор принимает диагональную форму:

$$
S=\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix},
$$

где e_1, e_2, e_3 — компоненты тензора скоростей деформаций для главных осей. Известно также, что сумма диагональных компонентов является инвариантом. Она не изменяется при повороте осей координат в рассматриваемой точке, т. е.

$$
e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=e_1+e_2+e_3.
$$

Скалярная величина

$$
e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=\partial v_x/\partial x+\partial v_y/\partial y+\partial v_z/\partial z
$$

называется *дивергенцией* (расхождением) вектора скорости и обозначается $\operatorname{div}\bar{v}$. Таким образом, по определению,

$$
\operatorname{div}\bar{v}=\partial v_x/\partial x+\partial v_y/\partial y+\partial v_z/\partial z.
$$

Величины e_1, e_2, e_3 определяются из уравнения собственных значений тензора S как его корни, т. е. как корни кубического уравнения для e:

$$\begin{vmatrix} e_{xx}-e & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy}-e & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz}-e \end{vmatrix} = 0.$$

Известно, что числу соответствует геометрический образ, которым является точка на числовой оси. Вектору соответствует прямолинейный отрезок. Тензору S, компоненты которого имеют два индекса, можно поставить в соответствие поверхность второго порядка, которую называют *эллипсоидом скоростей деформаций*. Такие тензорные поверхности дальше будут рассмотрены для тензоров инерции и напряжений поверхностных сил.

Применим для производных по координатам от проекций вектора скорости на оси координат тождественные преобразования Коши, прибавляя и вычитая одинаковые величины и используя (6′) и (8). Имеем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=e_{xy}-\omega_z;\\
\frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=e_{xz}+\omega_y;\\
\frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=e_{xy}+\omega_z;\\
\frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=e_{yz}-\omega_x;\\
\frac{\partial v_z}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=e_{zx}-\omega_y;\\
\frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=e_{zy}+\omega_x.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Из (7′) с учетом этих преобразований получаем

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= v_{Ox}+e_{xx}x+e_{xy}y+e_{xz}z+\omega_y z-\omega_z y;\\
v_y &= v_{Oy}+e_{yx}x+e_{yy}y+e_{yz}z+\omega_z x-\omega_x z;\\
v_z &= v_{Oz}+e_{zx}x+e_{zy}y+e_{zz}z+\omega_x y-\omega_y x.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

В векторной форме (11) примет вид

$$\bar{v}=\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\bar{r}+\bar{v}_д, \quad (11')$$

где $\bar{v}_д$ называется *скоростью деформации*. Проекции скорости деформации на оси координат определяют по формулам

$$\left.\begin{aligned}
v_{дx} &= e_{xx}x+e_{xy}y+e_{xz}z;\\
v_{дy} &= e_{yx}x+e_{yy}y+e_{yz}z;\\
v_{дz} &= e_{zx}x+e_{zy}y+e_{zz}z.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

По формуле (11′) вычисляется скорость в момент времени t в любой точке M пространства из малой окрестности точки O, если в этот же момент известны скорость, вихрь скорости и тензор скоростей деформаций S в точке O. Формула (11′) является обобщением на случай сплошной среды формулы (21) (см. § 8 гл. 4) для скорости точки свободного твердого тела в общем случае его движения. Для твердого тела $\bar{v}_д = 0$. Кроме того, для сплошной среды роль угловой скорости выполняет половина вихря вектора скорости в точке O.

Рассмотрим скорость деформации $\bar{v}_д$. Для простоты пусть мы выбрали такую точку O, в которой в рассматриваемый момент времени $\bar{v}_O = 0$ и $\bar{\omega} = 0$. Тогда для скорости в какой-либо точке M из малой окрестности этой точки, согласно (11′), имеем

$$\bar{v} = \bar{v}_д, \tag{13}$$

или в проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{дx} = e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xz}z; \\ v_y &= v_{дy} = e_{yx}x + e_{yy}y + e_{yz}z; \\ v_z &= v_{дz} = e_{zx}x + e_{zy}y + e_{zz}z. \end{aligned}\right\} \tag{13′}$$

Если в точке O $e_{xx} \neq 0$, а все остальные компоненты тензора скоростей деформаций равны нулю, то из (13′) получаем:

$$v_x = e_{xx}x; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0. \tag{14}$$

Из (14) следует, что точки сплошной среды из малой окрестности точки O, находящейся в плоскости Oyz, имеют скорости, равные нулю, так как для них $x = 0$. Точки, расположенные в плоскости, параллельной этой координатной плоскости на расстоянии x в положительном направлении оси Ox, имеют одинаковые скорости, пропорциональные x и направленные параллельно Ox, если $e_{xx} > 0$, и в обратную сторону, если $e_{xx} < 0$. Для точек плоскости, параллельной Oyz, но отстоящей от нее на $-x$, скорости имеют противоположное направление. Таким образом, $e_{xx} = v_x / x$ в малой окрестности точки O характеризует скорость расширения ($e_{xx} > 0$) или сжатия ($e_{xx} < 0$) частицы сплошной среды, приходящуюся на единицу расстояния в направлении, параллельном оси Ox (рис. 109). Аналогично, e_{yy} и e_{zz} характеризуют относительные скорости растяжения или сжатия, приходящиеся на единицу расстояния в малой окрестности точки O, в направлениях, параллельных осям координат Oy и Oz.

Допустим, что $e_{xy} \neq 0$, а все остальные компоненты тензора скоростей деформации равны нулю. Тогда из (13′) следует:

$$v_x = e_{xy}y; \quad v_y = e_{xy}x; \quad v_z = 0.$$

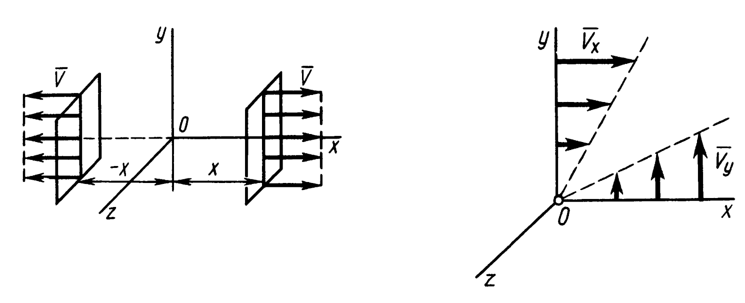


Рис. 109 Рис. 110

Это показывает, что точки сплошной среды из малой окрестности точки O, расположенные в плоскости Oyz, в частности на оси Oy, для которых $x=0$, имеют скорости, параллельные оси Ox. Эти скорости распределены по линейному закону (рис. 110) и направлены в положительном направлении этой оси, если $e_{xy}>0$, и в обратную сторону, если $e_{xy}<0$. Аналогично, точки, находящиеся в плоскости Oxz, в частности на оси Ox, имеют скорости, распределенные по линейному закону и параллельные оси Oy. Если $e_{xy}>0$, то точки части сплошной среды из малой окрестности точки O, находящиеся в момент времени t на осях координат Ox и Oy и образующих прямой угол, в следующий момент времени расположатся на прямых линиях, образующих острый угол. Если $e_{xy}<0$, то прямой угол превратится в тупой. Таким образом, величина $e_{xy}=v_x/y=v_y/x$ характеризует относительную скорость скоса углов в плоскости Oxy. Соответственно e_{xz} и e_{yz} характеризуют относительные скорости скоса углов в плоскостях Oxz и Oyz, приходящиеся на единицу длины.

В общем случае, если все компоненты тензора скоростей деформации отличны от нуля, рассмотренные эффекты в окрестности точки O наложатся друг на друга. Так как точка O является произвольной точкой пространства, в котором движется сплошная среда, то все изложенное применимо для малой окрестности любой точки.

§ 3. ЛИНИИ И ТРУБКИ ТОКА

При рассмотрении движения сплошной среды и применении переменных Эйлера используется понятие **линий тока**, т. е. линий, в каждой точке которых в рассматриваемый момент времени векторы скоростей параллельны касательным этих линий. Если вектор в какой-либо точке линии тока направлен по касательной к этой линии, то, по определению линии тока, он должен быть параллельным вектору скорости $\bar{v}$ в этой точке. Два параллельных вектора отличаются друг от друга только скалярным множителем k (положительным или отрицательным). Следовательно,

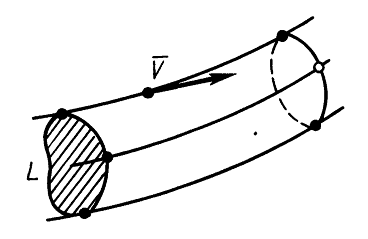


Рис. 111

$$\mathrm{d}\bar{r}=k\bar{v}. \qquad (15)$$

Если проекции вектора $\mathrm{d}\bar{r}$ на оси координат есть $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, то в проекциях на эти оси выражение (15) примет форму

$$\mathrm{d}x=kv_x;\ \mathrm{d}y=kv_y;\ \mathrm{d}z=kv_z.$$

Отбрасывая произвольный множитель k, эти уравнения можно представить в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x, y, z, t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y(x, y, z, t)}=\frac{\mathrm{d}z}{v_z(x, y, z, t)}. \qquad (15')$$

Два уравнения (15′) относительно координат x, y, z для фиксированного момента времени t являются дифференциальными уравнениями семейства линий тока. После интегрирования этих уравнений появятся произвольные постоянные, различным значениям которых соответствуют разные линии тока. На фиксированной линии тока в рассматриваемый момент времени находятся разные точки сплошной среды в отличие от траекторий. Для стационарного движения, при котором вектор скорости не зависит от времени, семейство линий тока совпадает с семейством траекторий. Для нестационарного движения это разные семейства линий.

Линии тока являются векторными линиями для векторного поля скоростей точек сплошной среды. Аналогичные векторные линии можно получить для любого другого векторного поля, например векторного поля вихря вектора скорости и т. п.

Если выбрать в пространстве, в котором движется сплошная среда, какой-либо замкнутый контур L (рис. 111) и через каждую его точку провести свою линию тока, то получим трубку тока. Сплошная среда не может выходить из трубки тока через боковую ее поверхность, так как в ее точках, состоящих из линий тока, скорости точек сплошной среды направлены по касательным к поверхности трубки тока. Сплошная среда может входить и выходить из трубки тока только через ее торцовые сечения. Трубки тока используются для формулировки некоторых интегральных форм теорем о движении сплошной среды.

§ 4. ПОТОК И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА СКОРОСТИ

Поток вектора скорости. Выберем в пространстве, в котором движется сплошная среда, неподвижную поверхность относительно рассматриваемой системы отсчета. Разобьем ее на малые элементарные площадки с площадью $\mathrm{d}S$ (рис. 112). Потоком вектора скорости $\bar{v}$ через элементарную площадку $\mathrm{d}S$, определяемую внешней нормалью Mn, называется скаляр-

ная величина $v_n \mathrm{d}S$, где $v_n = v\cos(\bar{v},\hat{}\,\bar{n})$ — проекция скорости на внешнюю нормаль к площадке.

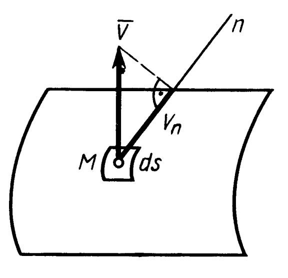


Рис. 112

Для замкнутой поверхности **внешней нормалью** в каждой ее точке называют нормаль, которая направлена во внешнюю часть объема, ограниченного поверхностью. Для незамкнутых поверхностей дополнительно уславливаются, какое направление нормали считать внешним.

Потоком Q вектора скорости $\bar{v}$ через воображаемую поверхность S называют скалярную величину

$$Q = \iint\limits_{(S)} v_n \mathrm{d}S. \tag{16}$$

Для вычисления потока можно получить другие выражения, если учесть, что

$$v_n = \bar{v} \cdot \bar{n} = v \cdot 1 \cdot \cos(\bar{v},\hat{}\,\bar{n}) = v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z,$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали; n_x, n_y, n_z — его проекции на оси координат. Для них имеем:

$$n_x = 1 \cdot \cos(\bar{n},\hat{}\,x); \quad n_y = 1 \cdot \cos(\bar{n},\hat{}\,y); \quad n_z = 1 \cdot \cos(\bar{n},\hat{}\,z).$$

Кроме того,

$$\mathrm{d}S\cos(\bar{n},\hat{}\,x) = \mathrm{d}y\mathrm{d}z; \quad \mathrm{d}S\cos(\bar{n},\hat{}\,y) = \mathrm{d}z\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}S\cos(\bar{n},\hat{}\,z) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

После этого для потока получаем

$$Q = \iint\limits_{(S)} v_n \mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} \left[v_x\cos(\bar{n},\hat{}\,x) + v_y\cos(\bar{n},\hat{}\,y) + v_z\cos(\bar{n},\hat{}\,z)\right]\mathrm{d}S =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(v_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_y \mathrm{d}z\mathrm{d}x + v_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right). \tag{16'}$$

Наиболее часто используемое выражение для потока получают применением формулы Гаусса—Остроградского для преобразования интеграла по замкнутой поверхности S в интеграл по объему V, ограниченному этой поверхностью:

$$\iint\limits_{(S)} \left[p\cos(\bar{n},\hat{}\,x) + q\cos(\bar{n},\hat{}\,y) + r\cos(\bar{n},\hat{}\,z)\right]\mathrm{d}S =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right)\mathrm{d}V, \tag{17}$$

где p, q, r — любые функции переменных Эйлера, имеющие частные производные. Замкнутая поверхность должна быть при этом достаточно гладкой.

Если принять $p = v_x$, $q = v_y$, $r = v_z$, то, применяя (17) для потока через замкнутую поверхность, имеем

$$Q=\iint\limits_{(S)}\left[v_x\cos(\bar{n},\wedge x)+v_y\cos(\bar{n},\wedge y)+v_z\cos(\bar{n},\wedge z)\right]dS=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dV. \qquad (16'')$$

Но

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\operatorname{div}\bar{v};\quad v_n=\bar{v}\cdot\bar{n},$$

поэтому

$$Q=\iint\limits_{(S)}v_n dS=\iint\limits_{(S)}\bar{v}\cdot\bar{n}\,dS=\iiint\limits_{(V)}\operatorname{div}\bar{v}\,dV. \qquad (18)$$

Для вектора вихря скорости поток через замкнутую поверхность равен нулю, так как с учетом формул для проекций вектора вихря на координатные оси имеем

$$\operatorname{div}\bar{\Omega}=\frac{\partial\Omega_x}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_y}{\partial y}+\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\equiv 0.$$

Из (18) для потока ΔQ через элементарную замкнутую поверхность, ограничивающую объем ΔV, приближенно имеем

$$\Delta Q=\operatorname{div}\bar{v}\cdot\Delta V.$$

Отсюда получаем для дивергенции вектора скорости

$$\operatorname{div}\bar{v}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V},$$

т. е. дивергенцию вектора скорости в какой-либо точке можно рассматривать как предел потока вектора скорости через замкнутую поверхность, приходящуюся на единицу объема, ограниченного поверхностью, при стягивании объема в эту точку.

Циркуляция вектора скорости. Для введения понятия циркуляции вектора скорости по какому-либо контуру следует выбрать контур l, разбить его на элементарные участки длиной dl. Тогда циркуляцией вектора скорости $\bar{v}$ по элементарному контуру dl называют величину $v_\tau dl$, где v_τ — проекция вектора скорости на положительное направление касательной к контуру в рассматриваемой точке (рис. 113). За положительное направление касательной к контуру, если контур замкнутый,

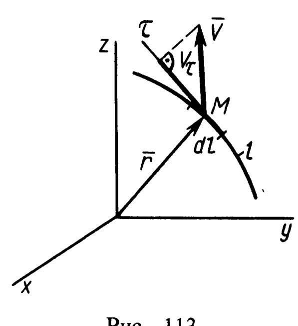


Рис. 113

выбирают то направление, при обходе контура в котором ограниченная им поверхность остается слева. Для незамкнутого контура о положительном направлении касательной условливаются дополнительно.

Циркуляция вектора скорости по всему контуру

$$\Gamma = \int_{(l)} v_\tau \mathrm{d}l. \qquad (19)$$

Для вычисления циркуляции можно получить другие формулы, если учесть, что

$$\bar{v}_\tau = \bar{v} \cdot \bar{\tau} = v \cdot 1 \cdot \cos(\bar{v}, \hat{\ } \bar{\tau}) = v_x \tau_x + v_y \tau_y + v_z \tau_z,$$

где $\bar{\tau}$ — единичный вектор в положительном направлении касательной к контуру; τ_x, τ_y, τ_z — его проекции на декартовы оси координат. Учитывая, что

$$\tau_x = 1 \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } x); \quad \tau_y = 1 \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } y); \quad \tau_z = 1 \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } z);$$
$$\mathrm{d}l \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } x) = \mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}l \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } y) = \mathrm{d}y; \quad \mathrm{d}l \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } z) = \mathrm{d}z,$$

получим

$$\Gamma = \int_{(l)} v_\tau \mathrm{d}l = \int_{(l)} [v_x \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } x) + v_y \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } y) + v_z \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } z)] \mathrm{d}l =$$
$$= \int_{(l)} (v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z). \qquad (19')$$

Но

$$v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z = \bar{v} \mathrm{d}\bar{r},$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку M контура. Поэтому имеем

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \quad \mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{d}x \cdot \bar{i} + \mathrm{d}y \cdot \bar{j} + \mathrm{d}z \cdot \bar{k}.$$

Таким образом,

$$\Gamma = \int_{(l)} v_\tau \mathrm{d}l = \int_{(l)} v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z = \int_{(l)} \bar{v} \mathrm{d}\bar{r}. \qquad (19'')$$

Для замкнутого контура можно применить формулу Стокса, преобразующую интеграл по контуру в интеграл по поверхности, натянутой на этот контур:

$$\int_{(l)} [p \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } x) + q \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } y) + r \cos(\bar{\tau}, \hat{\ } z)] \mathrm{d}l =$$
$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) \cos(\bar{n}, \hat{\ } x) + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, \hat{\ } y) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \cos(\bar{n}, \hat{\ } z) \right] \mathrm{d}S. \qquad (20)$$

Если принять $p=v_x$, $q=v_y$, $r=v_z$, то, применяя (20) для замкнутого контура, имеем

$$\Gamma=\int\limits_{(l)}\left[v_x\cos(\bar{\tau},\widehat{\ }x)+v_y\cos(\bar{\tau},\widehat{\ }y)+v_z\cos(\bar{\tau},\widehat{\ }z)\right]\mathrm{d}l=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\bar{n},\widehat{\ }x)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\bar{n},\widehat{\ }y)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\bar{n},\widehat{\ }z)\right]\mathrm{d}S.$$

Учитывая, что

$$\Omega_x=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z};\quad \Omega_y=\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x};\quad \Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

являются проекциями вихря скорости, для циркуляции по замкнутому контуру получим

$$\Gamma=\int\limits_{(l)}\bar{v}\cdot\bar{\tau}\mathrm{d}l=\iint\limits_{(S)}\mathrm{rot}\,\bar{v}\cdot\bar{n}\mathrm{d}S. \qquad (21)$$

Если $\mathrm{rot}\,\bar{v}=0$, т. е. движение сплошной среды является потенциальным, то циркуляция при таком движении по замкнутому контуру равна нулю, если контур не охватывает точек, в которых вихрь скорости отличен от нуля.

Для вектора силы $\bar{F}$ циркуляция по какому-либо контуру является работой силы на этом контуре.

РАЗДЕЛ III

ДИНАМИКА

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка. Это модель материального тела любой формы, размерами которого в рассматриваемых задачах можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу. Более сложные материальные объекты — механические системы и сплошные тела — считают состоящими из материальных точек. Сплошное материальное тело представляют состоящим из малых по сравнению с размерами самого тела частиц, на которые мысленно разбивается тело. Каждую такую частицу считают материальной точкой.

Сила считается в механике основным, первичным понятием. Она является векторной мерой действия одного материального объекта на другой. В качестве эталона силы обычно принимают линейную силу упругости, т. е. такую меру, модуль которой при действии, например, на пружину динамометра пропорционален деформации пружины в пределах ее упругости. Свойства сил, приложенных к твердому телу и одной точке, рассматривались в статике. В динамике силы оцениваются по их динамическому действию, т. е. по изменению ими характеристик движения материальных объектов.

Движение материальных объектов всегда следует рассматривать относительно определенной системы отсчета. Оно совершается в пространстве с течением времени. В классической механике, в основу которой положены аксиомы Ньютона, пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов. Положение точки в таком пространстве относительно какой-либо системы отсчета определяется тремя независимыми параметрами или координатами точки. В общей теории относительности свойства пространства зависят от находящихся в нем материальных объектов и их движения.

Время в классической механике универсально. Оно не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга, оно протекает одинаково. В теории относительности пространство и время связаны друг с другом. Они рассматриваются как единое четырехмерное пространство — время. Время при этом зависит от того, в какой системе отсчета оно рассматривается. В классической механике время определяется по какому-либо периодическому процессу, как, например, вращение Земли вокруг своей оси, колебания маятника часов и т. д.

Все положения динамики получают из ее аксиом, используя законы логики и вводя удобные для применения понятия. В основу классической механики положены аксиомы Ньютона, которые были даны в его труде «Математические начала натуральной философии», опубликованные впервые в 1687 г. Классическую механику часто называют механикой Ньютона в отличие, например, от механики теории относительности.

Для формулировки аксиом Ньютона необходимо дать определение инерциальных систем отсчета, для которых справедливы аксиомы Ньютона. Достаточно предварительно определить одну исходную или основную инерциальную систему отсчета. В дальнейшем будет показано, что инерциальных систем отсчета бесконечно много. Ньютон считал, что существует абсолютное неподвижное пространство, с которым и следует скрепить исходную инерциальную систему отсчета. Ньютоновское определение абсолютного пространства породило споры и возражения. В настоящее время целесообразно определить исходную инерциальную систему отсчета как систему осей координат, начало которой находится в центре Солнца, а оси все время направлены на одни и те же удаленные звезды. Такую систему координат называют *гелиоцентрической*. Ее использование в качестве инерциальной системы отсчета, как показывает опыт, не приводит к заметным погрешностям.

§ 2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Всякая система аксиом должна быть полной и независимой, т. е. отдельные аксиомы не должны, например, быть частным случаем или следовать из других аксиом. Аксиомы классической механики (или ее законы) не являются независимыми. Они не образуют и замкнутой системы, удовлетворяющей условию полноты и другим требованиям, предъявляемым к системам аксиом. Предпринималось немало попыток заменить систему аксиом Ньютона более совершенной системой, но эти попытки не были успешными. Поэтому примем за основу аксиомы Ньютона в современной их форме применительно к простейшей модели тела — материальной точке.

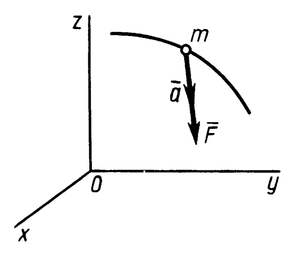


Рис. 1

Первой аксиомой, или законом классической механики, является закон инерции, который был открыт еще Галилеем: *материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.* Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, называется *изолированной материальной точкой.*

Равномерное и прямолинейное движение точки называют движением по инерции. Частным случаем движения по инерции является покой точки, при котором скорость ее равна нулю. Первая аксиома содержит в себе утверждение, что простейшее материальное тело, а следовательно, и любые другие материальные тела обладают свойством инерции, т. е. свойством сохранять свое прямолинейное и равномерное движение относительно инерциальной системы отсчета. Согласно Ньютону, все материальные тела обладают врожденной способностью сопротивляться изменению своего движения по инерции. Это внутреннее свойство всех материальных тел, зависящее только от самих тел и не зависящее от присутствия в пространстве других тел. При движении материальной точки по инерции ее ускорение равно нулю. Ускорение точки, таким образом, является мерой отклонения ее движения от движения по инерции.

Вторая аксиома, или основной закон динамики, принадлежащий Ньютону, устанавливает зависимость ускорения точки относительно инерциальной системы отсчета от действующей на нее силы и массы точки: *ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе* (рис. 1). Если $\bar{F}$ есть приложенная к точке сила и $\bar{a}$ — ее ускорение относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$, то основной закон можно выразить в форме

$$m\bar{a}=\bar{F}. \tag{1}$$

Положительный коэффициент пропорциональности m, характеризующий инертные свойства материальной точки, называется *инертной массой точки.* Инертная масса в классической механике считается величиной постоянной, зависящей только от самой материальной точки и не зависящей от характеристик ее движения, т. е. скорости и ускорения. Масса также не зависит от природы силы, приложенной к точке. Она одна и та же для сил тяготения, сил упругости, электромагнитных сил, сил трения и других сил.

В отличие от инертной массы масса, входящая в закон тяготения Ньютона

$$F=G\frac{mM}{r^2},$$

называется *гравитационной массой*. В этом законе G — постоянная тяготения; m, M — гравитационные массы притягивающихся точек; r — расстояние между ними. Гравитационные массы m и M в этом законе выполняют роль своеобразных зарядов, если сравнивать закон тяготения с законом Кулона для взаимодействия покоящихся электрических зарядов. С большой степенью точности экспериментально установлена эквивалентность инертной и гравитационной масс.

Массу обычно определяют по силе тяготения P и ускорению свободного падения g у поверхности Земли. Согласно (1), в этом случае имеем

$$mg=P; \quad m=P/g. \tag{2}$$

Это определение массы широко используется в механике Ньютона.

Основной закон механики является также критерием, который позволяет устанавливать, какую силу следует считать приложенной к материальной точке. Сила, приложенная к материальной точке, всегда имеет материальный источник в виде других материальных тел, которые действуют на точку путем контакта при непосредственном соприкосновении с ней или на расстоянии через посредство силовых полей. Приложенная к точке сила должна создавать у нее ускорение относительно инерциальной системы отсчета в соответствии с основным законом динамики. Только приложенная сила является причиной ускорения точки в классической механике. Это определяет наблюдателя, с точки зрения которого следует судить в механике Ньютона о взаимодействии тел, определяющих силы. Таким является наблюдатель, находящийся в инерциальной системе отсчета.

Из (1), если сила $\bar{F}=0$, следует, что ускорение $\bar{a}=0$, т. е. материальная точка имеет постоянную по модулю и направлению скорость относительно инерциальной системы отсчета. В основном законе содержится часть утверждения аксиомы инерции. Другая часть этой аксиомы о свойстве инерции материальной точки и всех других материальных тел в основном законе динамики не содержится.

Третья аксиома, или закон о равенстве сил действия и противодействия, определяет свойство сил взаимодействия между двумя материальными точками с точки зрения инерциального наблюдателя: *силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению* (рис. 2), т. е.

$$\bar{F}_1=-\bar{F}_2 \tag{3}$$

независимо от удаления точек друг от друга. Эти силы в классической механике считаются действующими вдоль одной прямой. Если не требовать этого, то и силу Лоренца, возникающую при действии одного электрического заряда на другой, движущийся, заряд, можно считать тоже силой взаимодействия.

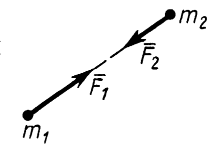


Рис. 2

Если сила действия, например $\bar{F}_1$, изменяется, то синхронно с ней должна, согласно (3), изменяться и сила противодействия. Это возможно для любых расстояний между взаимодействующими точками только при условии, что силовое взаимодействие распространяется мгновенно, т. е. с бесконечно большой скоростью. В действительности же все известные взаимодействия имеют конечные скорости распространения. Для устранения этой трудности взаимодействие на расстоянии целесообразно считать близкодействием, используя концепцию поля. При рассмотрении взаимодействия выделенной материальной точки с каким-либо материальным объектом на расстоянии можно считать, что точка контактно взаимодействует с полем объекта, не рассматривая в механике вопрос о передаче противодействия к источнику поля и его запаздывание из-за конечности скорости передачи.

При рассмотрении взаимодействия материальных точечных объектов с полями часто используются пробные точечные объекты, которые испытывают действие поля, но сами на поле не влияют.

Четвертая аксиома, или закон независимого действия сил (закон суперпозиции сил), не является самостоятельной аксиомой, если принять, что силы, действующие на материальную точку, складываются по правилу параллелограмма. Эта аксиома следует из аксиомы сложения сил. Закон независимого действия сил утверждает: *при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других приложенных к точке сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.* Между силами нет взаимного влияния друг на друга в создании ускорения точки. Если к материальной точке приложена система сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$, то, согласно этой аксиоме, ускорение от действия каждой из этих сил определяется по (1):

$$m\bar{a}_1=\bar{F}_1;\quad m\bar{a}_2=\bar{F}_2;\ \ldots;\ m\bar{a}_n=\bar{F}_n. \tag{4}$$

Ускорение при одновременном действии всех сил является векторной суммой ускорений, созданных отдельными силами, т. е.

$$\bar{a}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k. \tag{5}$$

Суммируя (4) и используя (5), получаем **основное уравнение динамики точки**:

$$m\bar{a}=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k. \qquad (6)$$

Закон независимого действия сил следует понимать как закон суперпозиции сил, т. е. как закон сложения ускорений от действия отдельных сил. Это не означает, что приложенные к точке силы являются независимыми, особенно если среди приложенных сил есть силы реакций связей, которые всегда зависят от активных сил.

Основное уравнение динамики точки остается справедливым и для несвободной материальной точки, на которую наложены связи. Следует только в число приложенных сил включить и силы реакций связей.

Аксиомы классической механики и их следствия хорошо согласуются с результатами опытов для не очень больших скоростей движения по сравнению со скоростью света в пустоте. Для скоростей движения, сравнимых со скоростью света, следует применять механику специальной теории относительности, для которой классическая механика является ее первым приближением при малых скоростях.

§ 3. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Основной закон динамики (1) показывает, что единицы ускорения, массы и силы связаны между собой, а потому нельзя выбрать их независимо друг от друга. Размерность ускорения, в свою очередь, выражается через размерности длины и времени. Таким образом, единицы длины, времени, массы и силы должны определяться с учетом основного закона динамики. Независимыми из них являются только три величины. В общепринятой СИ в качестве единицы времени принята секунда (с), длины — метр (м), массы — килограмм (кг). Для них существуют эталоны. Единица силы — ньютон (Н) — является производной от указанных независимых единиц. Сила в 1 Н равна силе, сообщающей телу массой в 1 кг ускорение, равное 1 м/с^2.

Существуют и другие системы единиц, как, например, абсолютная, или CGS, и техническая. Абсолютная система единиц отличается от СИ тем, что в ней используются более мелкие единицы. За единицу длины принят 1 см, за единицу массы — 1 г. Тогда сила выразится в динах: 1 дина = = 1 г · 1 см/с^2; 1 Н = 10^5 дин.

В технической системе единиц в качестве независимых принимаются: для времени — секунда, длины — метр, для силы — килограмм-сила (кгс). Единица массы является производ-

ной от этих единиц. Масса выражается в технических единицах массы (т. е. м.). Одну техническую единицу массы имеет тело, которое под действием силы в 1 кгс получает ускорение в 1 м/с^2. Из (2) получаем, что массу в 1 т. е. м. имеет тело, сила тяжести которого равна 9,8 кгс.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Используя основной закон динамики, можно вывести дифференциальные уравнения движения материальной точки в различных системах координат. По аксиоме о связях и силах реакций связей можно получить дифференциальные уравнения движения и несвободной точки так же, как и для свободной, только ко всем приложенным к точке силам надо добавить силы реакций связей.

Силы реакций связей при движении точки могут зависеть в общем случае не только от вида наложенных на точку связей и приложенных к ней сил, но и от характера ее движения, например от ее скорости при движении в воздухе или в какой-либо другой сопротивляющейся среде. В дальнейшем не будем делать различия между свободной и несвободной материальными точками. Обозначая равнодействующую всех заданных сил и сил реакций связей $\bar{F}$, а массу точки m, получаем

$$m\bar{a}=\bar{F}. \tag{7}$$

Из кинематики точки известно, что ускорение $\bar{a}$ выражается через радиус-вектор $\bar{r}$ (рис. 3):

$$\bar{a}=\mathrm{d}^2\bar{r}/\mathrm{d}t^2.$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме имеет вид

$$m\frac{\mathrm{d}^2\bar{r}}{\mathrm{d}t^2}=\bar{F}. \tag{8}$$

Если спроецировать обе части уравнений (7) или (8) на координатные оси, то можно получить дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на эти оси.

В декартовой системе координат в общем случае

$$ma_x=F_x; \quad ma_y=F_y; \quad ma_z=F_z.$$

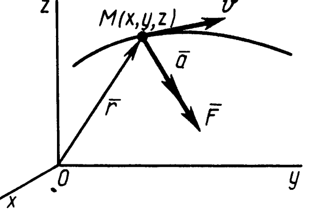


Рис. 3

Проекции ускорения на координатные оси можно выразить через вторые производные по времени от координат движущейся точки:

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2};\qquad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2};\qquad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x;\qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y;\qquad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z. \tag{9}$$

Частные случаи. Если известно, что материальная точка движется в одной и той же плоскости, то, принимая ее за координатную плоскость Oxy, имеем

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x;\qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y. \tag{10}$$

Так как $z=0$, то, следовательно, $F_z=0$.

В случае движения точки по прямой линии, направив по ней координатную ось Ox, получим одно дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x. \tag{11}$$

Так как при движении $y=z=0$, то, следовательно, $F_y=F_z=0$.

Для естественных подвижных осей координат (рис. 4), проецируя обе части (7) на эти оси, получаем:

$$ma_\tau=F_\tau;\qquad ma_n=F_n;\qquad ma_b=F_b,$$

где a_τ, a_n, a_b и F_τ, F_n, F_b — соответственно проекции ускорения и равнодействующей силы на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории в рассматриваемом положении движущейся точки. Учитывая, что

$$a_\tau=\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2;\qquad a_n=v^2/\rho;\qquad a_b=0,$$

где ρ — радиус кривизны траектории, дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_\tau;\\ &m\frac{v^2}{\rho}=F_n;\qquad 0=F_b. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Второе уравнение из (12) можно преобразовать:

$$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi};\qquad \frac{v^2}{\rho}=v\,\frac{v}{\rho}=v\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi}=v\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

где $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ — угловая скорость вращения касательной к траектории движущейся точки и, следовательно, $\mathrm{d}\varphi$ — угол смеж-

ности между касательными в двух бесконечно близких точках.

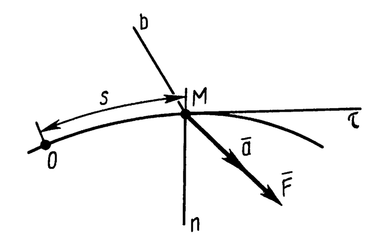


Рис. 4

Дифференциальные уравнения (12) можно представить в виде

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau;\ mv\frac{d\varphi}{dt}=F_n;\ 0=F_b.\quad (12')$$

Эта форма дифференциальных уравнений движения точки удобна при исследовании некоторых случаев полета снарядов и ракет, особенно по траектории, лежащей в плоскости. Тогда φ будет углом между касательной к траектории и любой осью, лежащей в плоскости траектории.

Дифференциальные уравнения движения точки можно представить в любой другой системе координат. Для этого надо знать выражения проекций ускорения на эти оси координат.

§ 5. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Используя дифференциальные уравнения движения материальной точки в той или другой системе координат, можно решать две основные задачи динамики точки.

Первая задача. *Зная массу точки и ее закон движения, можно найти действующую на точку силу.* Действительно, если, например, заданы уравнения движения точки в декартовой системе координат

$$x=f_1(t);\quad y=f_2(t);\quad z=f_3(t),$$

то проекции силы на оси координат определяются из дифференциальных уравнений движения точки (9), т. е.

$$F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d^2f_1}{dt^2};\quad F_y=m\frac{d^2y}{dt^2}=m\frac{d^2f_2}{dt^2};\quad F_z=m\frac{d^2z}{dt^2}=m\frac{d^2f_3}{dt^2}.$$

Зная проекции силы на координатные оси, легко определить модуль силы и косинусы углов силы с осями координат.

Пример 1. Точка M, имеющая массу m (рис. 5), движется в плоскости Oxy так, что уравнениями ее движения являются

$$x=a\cos kt;\quad y=b\sin kt,$$

где a, b, k — постоянные положительные величины; t — время.

Определить силу, под действием которой точка совершает это движение.

Решение. Найдем уравнение траектории точки в координатной форме, исключая время из уравнений движения:

$$x^2/a^2+y^2/b^2=\cos^2 kt+\sin^2 kt=1.$$

Траекторией точки является эллипс с полуосями a и b.

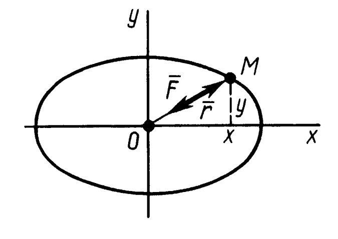


Рис. 5

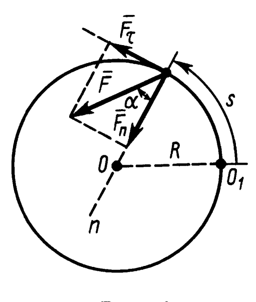


Рис. 6

На основании дифференциальных уравнений движения точки (10)

$$F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=-mk^2a\cos kt;\quad F_y=m\frac{d^2y}{dt^2}=-mk^2b\sin kt$$

или, если ввести координаты движущейся точки,

$$F_x=-mk^2x;\quad F_y=-mk^2y;$$

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=mk^2\sqrt{x^2+y^2}=mk^2r,$$

где r — радиус-вектор движущейся точки. Косинусы углов силы $\bar{F}$ с осями координат

$$\cos(\bar{F},\hat{\ }x)=F_x/F=-x/r;\quad \cos(\bar{F},\hat{\ }y)=F_y/F=-y/r.$$

Отсюда можно заключить, что сила $\bar{F}$ имеет направление, противоположное радиусу-вектору $\bar{r}$.

Окончательно

$$\bar{F}=-mk^2\bar{r}.$$

Пример 2. Точка M, имеющая массу m (рис. 6), движется из состояния покоя по окружности радиусом R с постоянным касательным ускорением a_τ. Определить действующую на точку силу в момент, соответствующий пройденному точкой по траектории расстоянию $s=R\sqrt{2}$.

Решение. Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

$$F_\tau=ma_\tau;\quad F_n=m\frac{v^2}{R};\quad F_b=0.$$

Так как движение происходит с постоянным касательным ускорением a_τ без начальной скорости, то

$$v=a_\tau t;\quad s=a_\tau t^2/2.$$

Тогда

$$F_\tau=ma_\tau;\quad F_n=m\frac{a_\tau^2t^2}{R};\quad F=\sqrt{F_\tau^2+F_n^2}=ma_\tau\sqrt{1+a_\tau^2t^4/R^2}.$$

В момент, когда $s=R\sqrt{2}=a_\tau t^2/2$, $a_\tau t^2/R=2\sqrt{2}$ и, следовательно, $a_\tau^2t^4/R^2=8$,

$$F=a_\tau m\sqrt{1+8}=3ma_\tau.$$

Тангенс угла α между радиусом окружности и силой $\bar{F}$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_\tau}{F_n}=\frac{ma_\tau}{ma_\tau^2t^2/R}=\frac{R}{a_\tau t^2}=\frac{R}{2\sqrt{2}R}=\sqrt{2}/4.$$

Из рассмотрения первой задачи динамики точки видно, что по заданной массе точки и уравнениям ее движения сила полностью определяется как по величине, так и по направлению.

Вторая задача. *По заданной массе и действующей на точку силе необходимо определить движение этой точки.* Рассмотрим решение этой задачи в прямоугольной декартовой системе координат. В общем случае сила $\bar{F}$, а следовательно, и ее проекции на координатные оси могут зависеть от времени, координат движущейся точки, ее скорости, ускорения и т. д. Для простоты ограничимся случаем зависимости силы и ее

проекций на оси координат от времени, координат и скорости. Дифференциальные уравнения движения точки (9) имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z});\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z});$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_x(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}). \qquad (9')$$

Для нахождения уравнений движения точки в декартовых координатах необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6$.

Каждая из координат x, y, z движущейся точки после интегрирования системы уравнений (9) зависит от времени t и всех шести произвольных постоянных, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6);\\ y&=f_2(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6);\\ z&=f_3(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Если продифференцировать уравнения (13) по времени, то определяются проекции скорости точки на координатные оси:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\dot{x}=f'_1(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6);\\ v_y&=\dot{y}=f'_2(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6);\\ v_z&=\dot{z}=f'_3(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Таким образом, задание силы не определяет конкретного движения материальной точки, а выделяет целый класс движений, характеризующийся шестью произвольными постоянными. Действующая сила определяет только ускорение движущейся точки, а скорость и положение точки на траектории могут зависеть еще от скорости, которая сообщена точке в начальный момент, и от начального положения точки. Так, например, материальная точка, двигаясь вблизи поверхности Земли под действием силы тяжести, имеет ускорение $\bar{g}$, если не учитывать сопротивление воздуха. Но точка будет иметь различные скорости и положение в пространстве в один и тот же момент времени и различную форму траектории в зависимости от того, из какой точки пространства началось движение и с какой по величине и направлению начальной скоростью.

Для выделения конкретного вида движения материальной точки надо дополнительно задать условия, позволяющие определить произвольные постоянные, которых в общем случае будет шесть. В качестве таких условий обычно задают так

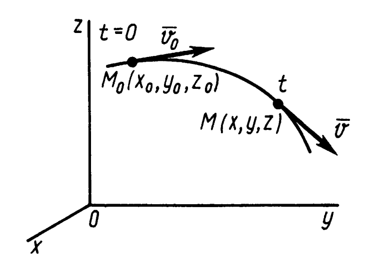


Рис. 7

называемые **начальные условия**, т. е. в какой-то определенный момент времени, например при $t=0$ (рис. 7), задают координаты движущейся точки x_0, y_0, z_0 и проекции ее скорости v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}:

$$\left.\begin{array}{l} x=x_0;\quad y=y_0;\quad z=z_0; \\ \dot{x}=v_{0x};\quad \dot{y}=v_{0y};\quad \dot{z}=v_{0z}. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Используя эти начальные условия и формулы (13) и (14), получаем шесть следующих уравнений для определения шести произвольных постоянных:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=f_1(0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y_0=f_2(0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z_0=f_3(0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ v_{0x}=f'_1(0;\ C_1, C_2, ..., C_6); \\ v_{0y}=f'_2(0;\ C_1, C_2, ..., C_6); \\ v_{0z}=f'_3(0;\ C_1, C_2, ..., C_6). \end{array}\right\} \quad (16)$$

Если система уравнений (16) удовлетворяет условиям разрешимости, то из нее можно определить все шесть произвольных постоянных.

Начальные условия в форме (15) определяют единственное решение системы дифференциальных уравнений (9) при соблюдении соответствующих условий теории дифференциальных уравнений. Условия в других формах, как например, задание двух точек, через которые должна проходить траектория движущейся точки, могут дать или несколько решений, удовлетворяющих этих условиям, или не дать ни одного решения.

При движении точки в плоскости Oxy имеется два дифференциальных уравнения движения. В решения этих уравнений входят четыре произвольные постоянные. Постоянные определяются из начальных условий

$$t=0;\quad x=x_0;\quad y=y_0;\quad \dot{x}=v_{0x};\quad \dot{y}=v_{0y}.$$

В случае прямолинейного движения точки имеется только одно дифференциальное уравнение и в его решение входят две произвольные постоянные. Для их определения необходимо задать начальные условия:

$$t=0;\quad x=x_0;\quad \dot{x}=v_{0x}.$$

Задача интегрирования системы дифференциальных уравнений (9′) при заданных начальных условиях в общем случае является довольно трудной. Даже в простейшем случае прямо-

линейного движения, когда имеется только одно дифференциальное уравнение, его решение удается выразить точно в квадратурах лишь при определенной зависимости силы от времени t, координаты x и скорости v. Поэтому важно определение таких соотношений из системы уравнений (9′), которые являются следствиями этой системы и в которые входят производные от координат точки только первого порядка. Такие соотношения, например, в виде $f(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})=C$ называют *первыми интегралами* системы дифференциальных уравнений (9′).

Если из системы (9′) удается найти три независимых первых интеграла, то задача интегрирования упрощается, так как вместо интегрирования системы дифференциальных уравнений второго порядка достаточно проинтегрировать систему трех дифференциальных уравнений первого порядка, которую представляют эти первые интегралы.

В дальнейшем будет рассмотрен способ получения первых интегралов дифференциальных уравнений движения точки из так называемых общих теорем динамики в некоторых частных случаях движения точки.

Для выяснения особенностей решения второй основной задачи динамики, имеющей прикладное значение, рассмотрим ее решение для случая как прямолинейного, так и криволинейного движения материальной точки.

§ 6. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Ox, согласно (11), имеет вид

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x(t;\ x,\ v), \tag{11′}$$

если рассматривается случай зависимости силы только от времени, координаты и скорости.

Начальные условия можно задать в форме $t=0$, $x=x_0$, $v_x=v_0$.

Наиболее важные случаи прямолинейного движения материальной точки получаются тогда, когда сила F_x постоянна или она зависит только от времени, или от координаты x, или от скорости v. Если сила постоянна, имеем случай равнопеременного движения, т. е. движения с постоянным ускорением. От времени сила зависит обычно, когда ее изменяют путем регулирования, например регулируют силу тяги самолета изменением режима работы его двигателей.

Силу, зависящую от координаты x, могут создать сжатая или растянутая пружина и другие упругие тела при их деформации. Силы, зависящие от скорости движения,—это прежде всего силы сопротивления, когда материальная точка движется в какой-либо среде, например в воздухе, в воде и т. д.

Отметим, что в перечисленных случаях интегрирование дифференциального уравнения (11′) выполняется наиболее просто и его можно довести до конца в квадратурах. В более общем случае, если сила одновременно зависит от времени t, координаты x и скорости v, в большинстве случаев дифференциальное уравнение можно проинтегрировать лишь приближенно.

Рассмотрим примеры на составление и интегрирование дифференциального уравнения прямолинейного движения точки. Эти примеры позволяют выявить некоторые особенности решения таких задач. Ниже приведены примеры, когда сила зависит только от времени, или от скорости, или от координаты.

Пример 1. Точка массой m (рис. 8) падает вертикально вниз без начальной скорости под действием силы тяжести, испытывая силу сопротивления воздуха $\bar{R}$, значение которой пропорционально квадрату скорости и массе точки, т. е. $R=kmv^2$, где k — постоянная положительная величина.

Найти уравнение движения точки.

Решение. Направим ось Ox по вертикали вниз, выбрав за начало координат положение точки в момент начала движения. В этот же момент примем $t=0$. В произвольный момент времени прикладываем к точке действующие на нее силы $\bar{P}$ и $\bar{R}$ и составляем дифференциальное уравнение ее движения. Имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-kmv^2.$$

Скорость в этом случае можно определить в зависимости от времени или от координаты, используя подстановки

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}.$$

Последняя подстановка позволяет исключить из дифференциального уравнения время при определении скорости. Эта подстановка получается из первой умножением и одновременным делением на dx:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v.$$

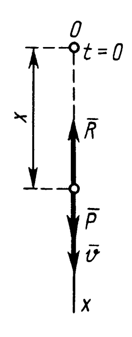


Рис. 8

Используя первую подстановку, получаем дифференциальное уравнение движения точки в следующем виде:

$$dv/dt=k(g/k-v^2).$$

Разделяя переменные и беря интегралы от обеих частей, имеем

$$\int_0^v\frac{dv}{g/k-v^2}=k\int_0^t dt.$$

Для того чтобы не искать дополнительно произвольную постоянную интегрирования, интегралы возьмем определенные, сохраняя верхний предел переменным для последующего интегрирования, а для нижних пределов используем также условие: при $t=0$ $v=0$. Выполняя интегрирование и подставляя пределы, получаем

$$\int_0^v \left[-\frac{d(\sqrt{g/k}-v)}{\sqrt{g/k}-v} + \frac{d(\sqrt{g/k}+v)}{\sqrt{g/k}+v} \right] = 2\sqrt{g/k} \cdot k \int_0^t dt,$$

или

$$-\ln \frac{\sqrt{g/k}-v}{\sqrt{g/k}+v} \bigg|_0^v = 2\sqrt{g/k}\, t \bigg|_0^t,$$

т. е.

$$\ln \frac{\sqrt{g/k}-v}{\sqrt{g/k}+v} - \ln 1 = -2\sqrt{g/k}\, t.$$

Потенцируя и решая относительно v, имеем

$$v = \sqrt{g/k}\, \frac{1-e^{-2\sqrt{gk}\, t}}{1+e^{-2\sqrt{gk}\, t}} = \sqrt{g/k}\, \frac{e^{\sqrt{gk}\, t} - e^{-\sqrt{gk}\, t}}{e^{\sqrt{gk}\, t} + e^{-\sqrt{gk}\, t}} = \sqrt{g/k}\, \text{th}(\sqrt{gk}\, t). \qquad (a)$$

Переходя в (а) к пределу при t, стремящемся к бесконечности, получаем

$$v_{\text{пр}} = v_{t=\infty} = \sqrt{g/k} \lim_{t\to\infty} \frac{1-e^{-2\sqrt{gk}\, t}}{1+e^{-2\sqrt{gk}\, t}} = \sqrt{g/k}.$$

Для достижения предельной скорости требуется бесконечно большое время. Более подробные расчеты показывают, что скорость, близкая к предельной, устанавливается довольно быстро.

Отметим, что для свободного падения в воздухе парашютиста вблизи Земли без раскрытия парашюта предельная скорость равна 50...60 м/с; для авиационной бомбы она составляет 200...300 м/с.

Для нахождения закона движения точки подставляем в (а) вместо скорости v ее значение dx/dt. Тогда

$$dx/dt = \sqrt{g/k}\, \text{th}(\sqrt{gk}\, t).$$

Интегрируя это уравнение после разделения переменных, имеем

$$\int_0^x dx = \sqrt{g/k} \int_0^t \text{th}(\sqrt{gk}\, t)\, dt,$$

или

$$x = \sqrt{g/k} \cdot \sqrt{1/(gk)}\, \ln \text{ch}(\sqrt{gk}\, t)|_0^t = (1/k) \ln \text{ch}(\sqrt{gk}\, t).$$

Пример 2. Материальная точка массой m (рис. 9), брошенная вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью v_0, движется под действием силы тяжести по закону тяготения Ньютона.

Определить зависимость скорости точки от ее расстояния до центра Земли, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Решение. Направив ось Ox по прямолинейной траектории точки, выберем начало координат в центре Земли. Тогда по закону Ньютона для силы тяготения имеем

$$F = k/x^2.$$

Постоянный коэффициент k можно выразить через другие величины, в частности $k = GMm$, где M — масса Земли; G — универсальная постоянная тяготения. Для рассматриваемого случая удобнее k выразить из условия, что на поверхности Земли сила тяготения F равна силе тяжести $P = mg$. Приравнивая F и P при $x = R$, получим

$$mg = k/R^2; \quad k = mgR^2,$$

где g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли; R — радиус Земли. Подставляя полученное значение k в выражение для силы тяготения, имеем

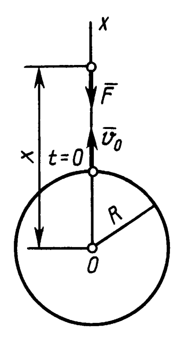


Рис. 9

$$F = mgR^2/x^2.$$

Составляем дифференциальное уравнение движения точки. Получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgR^2}{x^2}.$$

Знак минус в правой части этого уравнения определяется знаком проекции силы $\bar{F}$ на ось Ox. Проекция силы отрицательна для положительных значений x, рассматриваемых в этом примере.

Исключая время из дифференциального уравнения подстановкой

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx},$$

получаем

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2}.$$

Разделяя переменные и беря от обеих частей интегралы с учетом, что при $x=R$ $v=v_0$, имеем

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -gR^2 \int_{R}^{x} \frac{dx}{x^2},$$

или

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -gR\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{R}\right).$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)}.$$

Для определения наибольшего расстояния x_{max} в зависимости от скорости v_0 следует положить $v=0$. Из последней формулы получим

$$x_{max} = 2gR^2/(2gR - v_0^2).$$

Видно, что x_{max} увеличивается с ростом скорости v_0 и при $v_0^* = \sqrt{2gR}$ расстояние x_{max} становится равным бесконечности. Это можно истолковать так, что точка, брошенная с Земли со скоростью $v_0^* = \sqrt{2gR}$, не возвратится на Землю. Приняв $g \approx 9{,}8$ м/с^2, $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, получим

$$v_0^* = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Скорость v_0^* называют *второй космической скоростью.* Это наименьшая скорость, которую должен иметь космический корабль для полета к другим планетам Солнечной системы.

Наименьшую скорость космического корабля, при которой он становится спутником Земли, называют *первой космической скоростью.* Она приблизительно равна 8 км/с (см. ниже § 2 гл. 10).

Пример 3. Материальная точка массой m (рис. 10) движется под действием силы притяжения F к неподвижной точке O. Эта сила пропорциональна массе точки и обратно пропорциональна кубу расстояния между точками. Коэффициент пропорциональности равен единице. В начальный момент $t=0$ начальное расстояние точки $x_0 = 2$ м и начальная скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с.

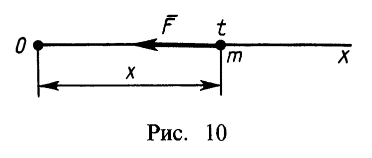


Рис. 10

Определить уравнение движения точки.

Решение. Выбирая за начало координат точку O для силы F при положительном x, имеем

$$F=m/x^3.$$

Учитывая направление силы $\bar{F}$, составляем дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x; \quad F_x=-m/x^3.$$

После преобразования левой части оно примет форму

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x^3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение, имеем

$$\int\limits_{v_0}^{v} v\,dv=-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^3},$$

или

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2x_0^3}.$$

После подстановки числовых значений для x_0 и v_0 получаем:

$$v=1/x; \quad v=dx/dt; \quad dx/dt=1/x.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x} x\,dx=\int\limits_{0}^{t} dt; \quad \frac{x^2}{2}-2=t.$$

Закон движения точки можно выразить в форме

$$x=\sqrt{4+2t}.$$

§ 7. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В случае криволинейного движения по плоскости имеется два дифференциальных уравнения движения точки в декартовой системе координат, а в общем случае движения в пространстве — система трех дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения криволинейного движения точки интегрируются сравнительно просто, если каждое из этих уравнений интегрируется независимо от других уравнений и при этом возможен один из трех рассмотренных случаев зависимости проекции равнодействующей силы от времени, координаты и скорости.

Рассмотрим примеры криволинейного движения точки в плоскости и в пространстве.

Пример 1. Материальная точка массой m (рис. 11) движется по плоскости под действием силы притяжения $\bar{F}$ к неподвижной точке O. Сила притяжения (сила упругости) изменяется по закону $\bar{F}=-mk^2\bar{r}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор

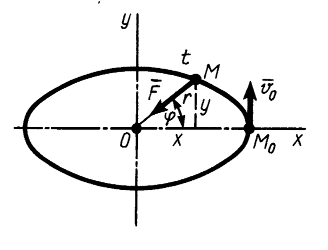


Рис. 11

движущейся точки, проведенный из точки O; k — постоянный коэффициент. В начальный момент $t=0$ $x=l$, $y=0$, $v_x=0$, $v_y=v_0$, если начало координат выбрано в неподвижной точке O.

Определить уравнения движения точки и уравнение ее траектории в координатной форме.

Решение. Пусть в момент t движущаяся точка имеет координаты x и y. Прикладываем к точке силу $\bar{F}$ и составляем дифференциальные уравнения ее движения в проекциях на оси координат. Имеем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y;$$

$$F_x=-mk^2r\cos\varphi; \quad F_y=-mk^2r\sin\varphi.$$

Учитывая, что

$$r\cos\varphi=x; \quad r\sin\varphi=y,$$

дифференциальные уравнения принимают форму

$$d^2x/dt^2=-k^2x; \quad d^2y/dt^2=-k^2y.$$

Для интегрирования этих уравнений можно применить подстановки

$$\frac{d^2x}{dt^2}=v_x\frac{dv_x}{dx}; \quad \frac{d^2y}{dt^2}=v_y\frac{dv_y}{dy},$$

или интегрировать их как линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Выполним интегрирование уравнений, используя подстановки. Имеем

$$\int_0^v v_x dv_x=-k^2\int_l^x x dx,$$

или

$$\frac{v_x^2}{2}=\frac{k^2}{2}(l^2-x^2).$$

Аналогично для v_y получаем

$$\frac{v_y^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=-\frac{k^2}{2}y^2.$$

Учитывая, что

$$v_x=dx/dt; \quad v_y=dy/dt,$$

имеем

$$dx/dt=k\sqrt{l^2-x^2}; \quad dy/dt=k\sqrt{v_0^2/k^2-y^2}.$$

Эти дифференциальные уравнения интегрируем путем разделения переменных. Получаем

$$\int_l^x\frac{dx}{\sqrt{l^2-x^2}}=k\int_0^t dt; \quad \int_0^y\frac{dy}{\sqrt{v_0^2/k^2-y^2}}=k\int_0^t dt.$$

Выполняя интегрирование и подставляя пределы, имеем

$$\arcsin\frac{x}{l}-\arcsin 1=kt; \quad \arcsin\frac{y}{v_0/k}-\arcsin 0=kt,$$

или

$$\frac{x}{l}=\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}\right)=\cos kt; \quad \frac{y}{v_0/k}=\sin kt$$

и уравнения движения точки принимают вид

$$x = l\cos kt; \quad y = (v_0/k)\sin kt.$$

Возводя в квадрат $\cos kt$ и $\sin kt$, получаем уравнение траектории точки в координатной форме:

$$x^2/l^2 + k^2y^2/v_0^2 = 1.$$

Траекторией точки оказался эллипс с полуосями l и v_0/k.

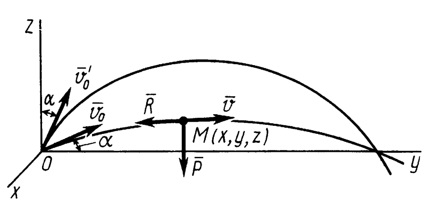


Рис. 12

Пример 2. Материальная точка массой m (рис. 12) брошена с поверхности Земли в вертикальной плоскости со скоростью $\bar{v}_0$ под углом α к горизонту. Определить уравнения движения точки, если сила сопротивления воздуха, направленная против скорости, пропорциональна скорости и массе, т. е. $R = kmv$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности.

Решение. Задачу удобно решать в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой находится в точке бросания, а ось Oz направлена по вертикали вверх. Оси Ox и Oy при этом расположатся в горизонтальной плоскости. Для определенности предположим, что начальная скорость $\bar{v}_0$ располагается в плоскости Oyz. Для составления дифференциальных уравнений движения точки возьмем такое ее положение в момент t, когда координаты точки x, y, z и их первые производные по времени положительны. На точку действуют две силы: сила тяжести $\bar{P}$, направленная по вертикали вниз, и сила сопротивления $\bar{R}$, направление которой противоположно направлению скорости $\bar{v}$. Равнодействующая сила

$$\bar{F} = \bar{P} + \bar{R},$$

причем $\bar{R} = -km\bar{v}$.

Для проекций равнодействующей силы $\bar{F}$ на оси координат, считая, что в выбранном положении точки и положительных значениях v_x, v_y, v_z, имеем

$$F_x = -kmv_x = -km\dot{x};$$
$$F_y = -kmv_y = -km\dot{y};$$
$$F_z = -mg - kmv_z = -mg - km\dot{z}.$$

Знак минус у проекций силы сопротивления указывает на то, что их знаки противоположны знакам проекций скорости, принятым положительными.

Дифференциальные уравнения движения точки имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -km\dot{x}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mk\dot{y}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - mk\dot{z}. \qquad \text{(а)}$$

При сделанном выборе осей координат имеем следующие начальные условия:

$$t=0,\ x=0,\ y=0,\ v_x=0,\ v_y=v_0\cos\alpha,\ v_z=v_0\sin\alpha. \qquad \text{(б)}$$

Каждое дифференциальное уравнение системы в рассматриваемом случае можно интегрировать отдельно, независимо от других уравнений. После сокращения на m дифференциальные уравнения примут вид

$$dv_x/dt = -kv_x; \ dv_y/dt = -kv_y; \ dv_z/dt = -g - kv_z. \qquad \text{(в)}$$

Разделяя переменные и интегрируя каждое из уравнений системы, получаем:

$$\ln v_x = -kt + \ln C_1; \ \ln v_y = -kt + \ln C_2; \ \ln(v_z + g/k) = -kt + \ln C_3.$$

После потенцирования имеем:

$$v_x = C_1e^{-kt}; \ v_y = C_2e^{-kt}; \ v_z = -g/k + C_3e^{-kt}. \qquad \text{(г)}$$

Подставляя в (г) начальные значения для v_x, v_y, v_z, получаем уравнения для определения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3:

$$0=C_1;\quad v_0\cos\alpha=C_2;\quad v_0\sin\alpha=-g/k+C_3.$$

Постоянные интегрирования имеют следующие значения:

$$C_1=0;\quad C_2=v_0\cos\alpha;\quad C_3=g/k+v_0\sin\alpha.$$

После подстановки постоянных интегрирования в (г) и замены проекций скорости на оси координат производными от координат по времени получаем

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=0;\quad \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=v_0\cos\alpha e^{-kt};\\ &\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=(g/k+v_0\sin\alpha)e^{-kt}-g/k.\end{aligned}\right\}\qquad (г')$$

Разделяя в (г′) переменные и интегрируя каждое дифференциальное уравнение первого порядка, имеем

$$\left.\begin{aligned} &x=C_4;\quad y=\frac{-v_0\cos\alpha}{k}e^{-kt}+C_5;\\ &z=-\frac{1}{k}(g/k+v_0\sin\alpha)e^{-kt}-gt/k+C_6.\end{aligned}\right\}\qquad (д)$$

Подставляя в (д) начальные условия, получаем уравнения для определения постоянных интегрирования C_4, C_5, C_6:

$$0=C_4;\quad 0=-\frac{v_0\cos\alpha}{k}+C_5;\quad 0=-\frac{1}{k}(g/k+v_0\sin\alpha)+C_6.$$

Отсюда находим

$$C_4=0;\quad C_5=(v_0\cos\alpha)/k;\quad C_6=(1/k)(g/k+v_0\sin\alpha).$$

Подставляя значения постоянных в (д), получаем искомые уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned} &x=0;\quad y=\frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt});\\ &z=\frac{1}{k}(g/k+v_0\sin\alpha)(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t.\end{aligned}\right\}\qquad (е)$$

Проведем некоторые исследования движения точки. Из уравнений движения (е) путем предельного перехода при k, стремящемся к нулю, можно получить уравнения движения точки под действием только одной силы тяжести. Обозначая координаты точки в этом случае x_1, y_1, z_1, раскрываем неопределенности в уравнениях (е) по правилу Лопиталя. Для y_1 получаем

$$y_1=v_0\cos\alpha\lim_{k\to 0}\frac{1-e^{-kt}}{k}=v_0\cos\alpha\lim_{k\to 0}\frac{(\mathrm{d}/\mathrm{d}k)(1-e^{-kt})}{\mathrm{d}k/\mathrm{d}k}=$$

$$=v_0\cos\alpha\lim_{k\to 0}\frac{t\cdot e^{-kt}}{1}=v_0t\cos\alpha.$$

Прежде чем переходить к пределу в z, преобразуем его к виду

$$z=\frac{g(1-e^{-kt}-kt)}{k^2}+\frac{v_0\sin\alpha(1-e^{-kt})}{k}.$$

После этого

$$z_1=g\lim_{k\to 0}\frac{(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}k^2)(1-e^{-kt}-kt)}{(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}k^2)k^2}+v_0\sin\alpha\lim_{k\to 0}\frac{(\mathrm{d}/\mathrm{d}k)(1-e^{-kt})}{\mathrm{d}k/\mathrm{d}k}=$$

$$=g\lim_{k\to 0}\frac{-t^2e^{-kt}}{2}+v_0\sin\alpha\lim_{k\to 0}\frac{te^{-kt}}{1}=-\frac{gt^2}{2}+v_0t\sin\alpha.$$

Получаем следующие уравнения движения точки под действием одной силы тяжести:

$$x_1 = 0; \quad y_1 = v_0 t \cos\alpha; \quad z_1 = v_0 t \sin\alpha - g t^2/2.$$

Если из этих уравнений исключить время t, то получим уравнения траектории точки в координатной форме (рис. 12):

$$x_1 = 0; \quad z_1 = y_1 \operatorname{tg}\alpha - \frac{g y_1^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (ж)$$

Траекторией точки является парабола, расположенная в плоскости $x_1 = 0$.

Если в (ж) принять $z_1 = 0$, то y_1 при этом окажется горизонтальной дальностью l, которая определяется по формуле

$$l = 2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g. \qquad (з)$$

Из (з) следует, что наибольшая горизонтальная дальность получается при угле бросания $\alpha = 45°$:

$$l_{max} = v_0^2 / g.$$

При других углах бросания α одну и ту же дальность l, как это следует из (з), можно получить бросая точку под углом α к горизонту или под тем же углом α к вертикали с той же самой скоростью v_0.

§ 8. ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Как уже известно, основной закон динамики для несвободной материальной точки, а следовательно, и ее дифференциальные уравнения движения имеют такой же вид, как и для свободной точки, только к действующим на точку силам добавляют все силы реакций связей. Естественно, что в этом случае движения точки могут возникнуть соответствующие особенности при решениях первой и второй основных задач динамики, так как силы реакций связей заранее не известны и их необходимо дополнительно определить по заданным связям, наложенным на движущуюся материальную точку.

При решении первой основной задачи динамики действующая на точку равнодействующая сила определяется по заданному движению точки из дифференциальных уравнений ее движения. Затем из этой равнодействующей силы по заданным связям выделяют силу реакции связей. Таким образом получается задача о разложении известной силы на ее составляющие.

Полную силу реакции точки при ее движении обычно разлагают на две составляющие. Составляющая силы реакции связей, уравновешивающая заданные силы, приложенные к точке, называется *статической реакцией*. Другая составляющая полной силы реакции, зависящая только от движения точки под действием заданных сил, называется *динамической реакцией*. Она уравновешивает силу инерции движущейся точки.

При решении второй основной задачи динамики, когда по заданным силам и начальным условиям требуется определить движение несвободной точки, часть сил, действующих на точку, а именно все силы реакций связей, заранее не известны и их необходимо определить по заданным связям

в процессе решения задачи. Таким образом, вторую основную задачу динамики для несвободной материальной точки можно сформулировать так: *по заданным силам, начальным условиям и связям, наложенным на точку, определить движение этой точки и силы реакции связей.*

Рассмотрим решение этой задачи для движения точки по поверхности и кривой линии. Дифференциальные уравнения при этом выражают в той системе координат, которая наиболее соответствует конкретной задаче. Разберем постановку и решение задачи в прямоугольной декартовой системе координат.

Движение точки по поверхности

Пусть гладкая неподвижная поверхность, по которой движется точка массой m под действием данной силы $\bar{F}$, задана уравнением $f(x, y, z)=0$, где x, y, z — координаты движущейся точки. Так как рассматриваемая поверхность является гладкой, то сила трения отсутствует. Обозначив $\bar{N}$ неизвестную нормальную силу реакции поверхности, получим следующие дифференциальные уравнения движения точки по поверхности:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x+N_x;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y+N_y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z+N_z. \tag{17}$$

Из дифференциальной геометрии известно, что косинусы углов внешней нормали к поверхности с осями координат, а следовательно, и силы $\bar{N}$, параллельной главной нормали, можно вычислить по формулам

$$\cos(\bar{N},\hat{\ }x)=\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x};\quad \cos(\bar{N},\hat{\ }y)=\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y};\quad \cos(\bar{N},\hat{\ }z)=\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z},$$

где

$$\Delta f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} N_x&=N\cos(\bar{N},\hat{\ }x)=\frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x};\\ N_y&=N\cos(\bar{N},\hat{\ }y)=\frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y};\\ N_z&=N\cos(\bar{N},\hat{\ }z)=\frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Обозначив $\lambda=N/\Delta f$ и подставив значения N_x, N_y, N_z из (18) в (17), получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x};\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y};\quad m\frac{d^2z}{\partial t^2}=F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Эти дифференциальные уравнения называют *дифференциальными уравнениями Лагранжа первого рода* для движения несвободной материальной точки. Из этих трех дифференциальных уравнений и одного конечного уравнения — уравнения поверхности $f(x, y, z)=0$ — можно найти четыре неизвестных — координаты точки x, y, z и *неопределенный множитель Лагранжа* λ как функции времени и произвольных постоянных интегрирования. Произвольные постоянные определяют из начальных условий.

По найденному неопределенному множителю Лагранжа λ легко определить силу реакции поверхности $N=\lambda\Delta f$, которая в общем случае зависит от времени.

Если поверхность не гладкая, то кроме нормальной силы реакции возникает предельная сила трения $\bar{F}_{max}$, проекции которой надо добавить в правые части дифференциальных уравнений движения точки. Это добавление усложнит решение задачи, но задача и в этом случае принципиально разрешима, так как наряду с добавлением неизвестной силы добавляется и конечное уравнение, связывающее эту силу с нормальной реакцией:

$$F_{max}=kN,$$

где k — коэффициент трения.

Так как сила трения скольжения всегда направлена против скорости, то проекции этой силы на оси координат можно представить в виде

$$F^x_{max}=-F_{max}\cos(\bar{v},\hat{\ }x)=-F_{max}\frac{v_x}{v}=-F_{max}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}};$$

аналогично,

$$F^y_{max}=-F_{max}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}};\quad F^z_{max}=-F_{max}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.$$

Учет силы трения значительно усложняет задачу интегрирования дифференциальных уравнений движения несвободной материальной точки.

Движение точки по гладкой кривой линии

Кривую неподвижную линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей: $f_1(x, y, z)=0$ и $f_2(x, y, z)=0$. Эти поверхности создадут для движущейся точки две нормальные реакции $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$, и поэтому полная реакция кривой линии $\bar{N}=\bar{N}_1+\bar{N}_2$.

Дифференциальные уравнения Лагранжа первого рода движения точки по кривой линии имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=F_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x};\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=F_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y};\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=F_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z},\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

где соответственно

$$\lambda_1=\frac{N_1}{\Delta f_1};\quad \lambda_2=\frac{N_2}{\Delta f_2};\quad \Delta f_1=\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2};$$

$$\Delta f_2=\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}.$$

Присоединяя к дифференциальным уравнениям Лагранжа первого рода (19) два конечных уравнения поверхностей $f_1(x, y, z)=0$ и $f_2(x, y, z)=0$, получаем пять уравнений для определения пяти величин x, y, z, λ_1, λ_2 как функций времени. Таким образом, и в этом случае поставленная задача может быть разрешена. Она принципиально разрешима и при учете силы трения.

Если при рассмотрении этой задачи за оси координат взять естественные оси, то дифференциальные уравнения движения точки по гладкой кривой примут вид

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau;\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_n+N_n;\quad 0=F_b+N_b. \qquad (20)$$

где F_τ — проекция силы $\bar{F}$ на касательную; F_n и N_n — проекции сил на главную нормаль; F_b и N_b — проекции сил на бинормаль; ρ — радиус кривизны кривой линии.

Из первого дифференциального уравнения системы (20) независимо от двух других уравнений можно найти закон движения точки и, следовательно, скорость точки v. После этого из двух оставшихся уравнений (20) можно определить проекции неизвестной нормальной реакции $\bar{N}$ соответственно на главную нормаль и бинормаль.

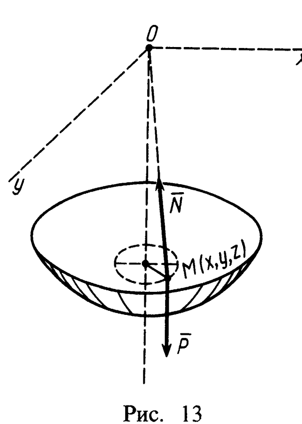


Рис. 13

Пример. Материальная точка массой m (рис. 13) движется под действием силы тяжести по внутренней части поверхности сферы радиуса R вблизи устойчивого положения равновесия. В начальный момент $t=0$ $x=x_0$, $y=0$, $v_x=0$, $v_y=v_0$. Ось Oz направлена по

вертикали вниз, а Ox и Oy расположены в горизонтальной плоскости. Начало координат находится в центре сферы.

Определить движение точки и силу реакции абсолютно гладкой сферы на точку. Эта задача известна как задача о сферическом маятнике.

Решение. Дифференциальные уравнения движения точки по поверхности сферы имеют вид

$$m\ddot{x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x};\quad m\ddot{y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y};\quad m\ddot{z}=mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z},\tag{а}$$

где

$$\lambda=N/\Delta f.$$

К дифференциальным уравнениям (а) следует добавить уравнение связи, т. е. уравнение поверхности сферы

$$f(x, y, z)=R^2-(x^2+y^2+z^2)=0.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-2z;$$

$$\Delta f=+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R,$$

так как

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R.$$

Подставляя в уравнения (а) значения производных $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial z$, имеем:

$$m\ddot{x}=-2\lambda x;\quad m\ddot{y}=-2\lambda y;\quad m\ddot{z}=-mg-2\lambda z.\tag{а$'$}$$

Эту систему и надо проинтегрировать. Для этого обычно из этих уравнений прежде всего исключают неизвестную λ, учитывая, что производные от нее не входят в уравнения (а$'$). Система уравнений сложна для интегрирования. Проинтегрируем ее приближенно. Для получения первого приближения сохраним в уравнениях только первые степени величин x/R, y/R и пренебрежем их квадратами в выражении для z:

$$z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}.$$

Разлагая это выражение по формуле для бинома, получаем

$$z=R\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R^2}}=R\left(1-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^{1/2}\approx R\left(1-\frac{x^2+y^2}{2R^2}\right)\approx R.$$

Полагая в третьем уравнении системы (а$'$) $z=R$ и $\ddot{z}=0$, имеем

$$mg-2\lambda R=0;\quad \lambda=mg/(2R),$$

т. е.

$$N=\lambda\Delta f=mg.$$

Подставляя значение λ в первые два уравнения системы (а$'$), получаем:

$$\ddot{x}=-\frac{g}{R}x;\quad \ddot{y}=-\frac{g}{R}y\quad \text{или}\quad \ddot{x}+\frac{g}{R}x=0;\quad \ddot{y}+\frac{g}{R}y=0.$$

Решения этих дифференциальных уравнений (см. выше § 7, пример 1), зависящие каждое от двух постоянных интегрирования, имеют вид

$$x=C_1\sin(\sqrt{g/R}\,t+C_2);\quad y=C_3\sin(\sqrt{g/R}\,t+C_4).\tag{б}$$

Дифференцируя их по времени, получаем

$$\dot{x}=C_1\sqrt{g/R}\cos(\sqrt{g/R}\,t+C_2);\quad \dot{y}=C_3\sqrt{g/R}\cos(\sqrt{g/R}\,t+C_4).\tag{в}$$

Используя начальные условия из (б) и (в), имеем следующие уравнения для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\left.\begin{array}{ll} x_0=C_1\sin C_2; & 0=C_3\sin C_4; \\ 0=C_1\sqrt{g/R}\cos C_2; & v_0=C_3\sqrt{g/R}\cos C_4. \end{array}\right\} \quad (г)$$

Из второго и третьего уравнений системы (г) находим $C_4=0$, $C_2=\pi/2$. Подставляя эти значения в первое и четвертое уравнения, имеем

$$C_1=x_0; \quad C_3=v_0\sqrt{R/g}.$$

Искомые уравнения движения точки при принятом допущении принимают вид

$$x=x_0\sin(\sqrt{g/R}\,t); \quad y=\sqrt{R/g}\,v_0\cos(\sqrt{g/R}\,t); \quad z=R.$$

Если исключить из уравнений движения время t, то получим уравнение траектории точки в координатной форме:

$$x^2/x_0^2+gy^2/(Rv_0^2)=1; \quad z=R,$$

т. е. траекторией точки в принятом приближении является эллипс, расположенный в плоскости $z=R$ с центром на оси Oz.

Не следует думать, что система уравнений (а′) проинтегрирована с точностью до членов первого порядка x/R, y/R, так как дополнительно принято $\ddot{z}=0$. Если интегрирование уравнений выполнить с точностью до указанных слагаемых, приняв за первое приближение полученное решение, то вместо эллипса получится незамкнутая кривая, близкая на первом витке к эллипсу. Движение по такой незамкнутой кривой можно воспроизвести, если полученный эллипс поворачивать равномерно с определенной скоростью в сторону движения точки[1].

ГЛАВА 2

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Во многих задачах динамики рассматривается движение материальной точки относительно системы отсчета, движущейся относительно инерциальной системы. Дифференциальные уравнения движения материальной точки относительно таких подвижных, в общем случае неинерциальных, систем отсчета получают из уравнений движения точки относительно инерциальной системы отсчета и кинематической теоремы Кориолиса о сложении ускорений.

Имеем инерциальную систему отсчета $O_1x_1y_1z_1$ и материальную точку массой m, на которую действуют приложенные силы $\bar{F}$ и $\bar{N}$ (рис. 14), где $\bar{F}$ — равнодействующая заданных активных сил; $\bar{N}$ — равнодействующая сил реакций связей. Если $\bar{a}$ — ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета (абсолютное ускорение), то согласно уравнению движения точки в векторной форме имеем

---

[1] Собрание трудов академика А. Н. Крылова, вып. III. Математика. Изд. АН СССР, 1949. Ч. I. С. 333.

$$m\bar{a}=\bar{F}+\bar{N}. \qquad (1)$$

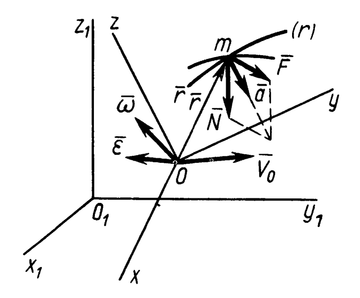


Рис. 14

Если ввести другую, неинерциальную, систему отсчета $Oxyz$, которая в общем случае может двигаться относительно инерциальной как свободное твердое тело, то по теореме сложения ускорений имеем

$$\bar{a}=\bar{a}_e+\bar{a}_r+\bar{a}_к, \qquad (2)$$

где $\bar{a}_e$, $\bar{a}_r$, $\bar{a}_к$ — соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения.

Подставляя значение абсолютного ускорения $\bar{a}$ из (2) в (1) после переноса слагаемых, кроме $m\bar{a}_r$, из левой части в правую, получим

$$m\bar{a}_r=\bar{F}+\bar{N}+\bar{\Phi}_e+\bar{\Phi}_к, \qquad (3)$$

где $\bar{\Phi}_e=-m\bar{a}_e$; $\bar{\Phi}_к=-m\bar{a}_к$ называются соответственно переносной и кориолисовой силами инерции. Получена динамическая теорема Кориолиса, или уравнение относительного движения точки в векторной форме: *материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же, как и относительно инерциальной, только к приложенным активным силам и реакциям связей следует добавить переносную и кориолисову силы инерции.*

Силы инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_к$ являются поправками на неинерциальность системы отсчета. Для инерциальной системы отсчета они равны нулю, так как в этом случае абсолютное и относительное движения точки совпадают. Переносная и кориолисова силы инерции участвуют в создании относительного ускорения совершенно так же, как и приложенные силы со стороны материальных тел. Но эти силы инерции, по определению приложенных сил классической механики, не приложены к материальной точке, так как не участвуют в создании ее ускорения относительно инерциальной системы отсчета.

Если координаты движущейся точки относительно подвижной системы координат $Oxyz$ в момент времени t есть x, y, z, то в проекциях на подвижные оси координат (3) примет форму

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=F_x+N_x+\Phi_{ex}+\Phi_{кx};\\ m\ddot{y}&=F_y+N_y+\Phi_{ey}+\Phi_{кy};\\ m\ddot{z}&=F_z+N_z+\Phi_{ez}+\Phi_{кz}.\end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

Это дифференциальные уравнения движения точки относительно подвижной системы координат в проекциях на декартовы подвижные оси координат. Они отличаются от дифференциальных

уравнений абсолютного движения относительно инерциальной системы отсчета только наличием поправок на неинерциальность системы отсчета.

§ 2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Относительное движение по инерции. Если материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета прямолинейно и равномерно, то такое движение называют *относительным движением по инерции*. В этом случае относительная скорость $\bar{v}_r$ постоянна по модулю и направлению, а потому относительное ускорение $\bar{a}_r=0$. Из (3) следует в этом случае

$$\bar{F}+\bar{N}+\bar{\Phi}_e+\bar{\Phi}_к=0. \quad (4)$$

Это условие для сил при относительном движении точки по инерции.

Относительное равновесие. При покое материальной точки относительно подвижной системы отсчета ее относительные скорость и ускорение равны нулю, т. е. $\bar{v}_r=0$ и $\bar{a}_r=0$. Ускорение Кориолиса тоже равно нулю, так как

$$\bar{a}_к=2(\bar{\omega}\times\bar{v}_r).$$

Из (3) получаем условие относительного равновесия для сил:

$$\bar{F}+\bar{N}+\bar{\Phi}_e=0. \quad (5)$$

При абсолютном движении по инерции или абсолютном равновесии относительно инерциальной системы отсчета имеем для сил одно и то же условие $\bar{F}+\bar{N}=0$. Условие относительного равновесия для сил отличается от условия относительного движения по инерции.

Инерциальные системы отсчета. Переносное ускорение в общем случае вычисляется по формуле

$$\bar{a}_e=\bar{a}_0+\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}),$$

где $\bar{a}_0$ — ускорение точки, принятой за полюс, например начало координат подвижной системы координат; $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения подвижной системы координат вокруг выбранного полюса; $\bar{\varepsilon}=\mathrm{d}\bar{\omega}/\mathrm{d}t$ — угловое ускорение этого вращения; $\bar{r}$ — радиус-вектор движущейся точки относительно выбранного полюса.

Пусть подвижная система отсчета все время движется относительно основной инерциальной системы поступательно, равномерно и прямолинейно. В этом случае переносная и кориолисова силы инерции равны нулю, т. е.

$$\bar{\Phi}_e=-m\bar{a}_e=0; \quad \bar{\Phi}_к=-m\bar{a}_к=0,$$

так как при поступательном движении $\bar{\omega}=0$ и $\bar{\varepsilon}=\mathrm{d}\bar{\omega}/\mathrm{d}t=0$. При равномерном и прямолинейном движении $\bar{a}_0=0$. Таким

образом, в этом случае из (3) получаем уравнение относительного движения

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N}, \qquad (6)$$

которое совпадает с уравнением движения относительно инерциальной системы отсчета (1).

Все подвижные системы отсчета, которые движутся поступательно, равномерно и прямолинейно относительно основной инерциальной системы отсчета, называются тоже *инерциальными*. Относительно всех инерциальных систем отсчета получаются одинаковые уравнения движения материальной точки. Ускорения материальной точки относительно всех инерциальных систем отсчета одинаковы.

Отсутствие принципиальной возможности каким-либо механическим опытом, основанным на наблюдении за движением материальных тел, отличить одну инерциальную систему отсчета от другой находится в основе принципа относительности классической механики — принципа Галилея — Ньютона, который утверждает: *все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаково, или никаким механическим опытом нельзя обнаружить инерциальное движение системы отсчета, участвуя вместе с ней в этом движении.* Наоборот, неинерциальную систему отсчета можно обнаружить и отличить одну от другой по поправкам на неинерциальность.

Скорости материальной точки относительно различных инерциальных систем отсчета разные, но нет возможности из наблюдений за движением материальной точки в различных системах отсчета сделать утверждение, какая из инерциальных систем отсчета является основной, неподвижной, а какая — подвижной.

В специальной теории относительности имеет место принцип относительности Эйнштейна, который утверждает: *все физические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.* Физические явления кроме механических включают также электромагнитные процессы.

Возьмем две инерциальные системы отсчета: $O_1x_1y_1z$ и $Oxyz$ (рис. 15). Примем, что система отсчета $Oxyz$ движется относительно $O_1x_1y_1z_1$ с постоянной по модулю и направлению скоростью v параллельно оси O_1x_1, причем в начальный момент времени при $t=0$ начала координат и соответствующие оси координат совпадают. В соответствии с концепцией классической механики время для обеих систем координат одно и то же. Нетрудно

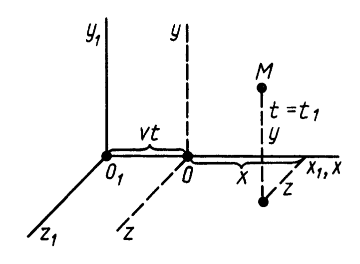


Рис. 15

видеть, что координаты какой-либо точки M в двух инерциальных системах отсчета связаны соотношениями параллельного переноса. Имеем:

$$x = x_1 - vt;\quad y = y_1;\quad z = z_1;\quad t = t_1. \tag{7}$$

Эти соотношения называются *преобразованиями Галилея* в частном случае движения двух инерциальных систем отсчета друг относительно друга.

Преобразования Галилея не изменяют формы уравнения движения точки (1), т. е. оно инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея.

§ 3. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗЕМЛИ

Для неинерциальной системы отсчета уравнение движения материальной точки под действием силы отличается от уравнения движения относительно инерциальных систем отсчета. Согласно (3), оно имеет форму

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_к. \tag{8}$$

Наличие поправок на неинерциальность систем отсчета в виде сил инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_к$ позволяет установить неинерциальность системы отсчета и отличить эти системы отсчета одну от другой.

Система отсчета, скрепленная с земным шаром, не является инерциальной. Земной шар движется относительно гелиоцентрической инерциальной системы отсчета. При рассмотрении движения материальных тел относительно Земли должны проявлять себя эффекты, связанные с неинерциальностью системы отсчета. Земной шар движется относительно гелиоцентрической системы отсчета как свободное твердое тело. Его центр перемещается по эллиптической орбите, близкой к окружности. Кроме того, он вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с почти постоянной по модулю и направлению угловой скоростью, совершая один оборот за сутки. Угловая скорость вращения Земли

$$\omega = 2\pi/(24\cdot 60\cdot 60) \approx 0{,}00007\ \text{с}^{-1},$$

т. е. величина малая по сравнению с единицей.

В общем случае переносная сила инерции

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = -m\left[\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\right],$$

где $\bar{a}_0$ — ускорение центра земного шара относительно гелиоцентрической системы отсчета; $\bar{r}$ — радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра Земли. Ускорение $\bar{a}_0$ с очень большой степенью точности можно считать равным нулю, так как центр Земли движется по эллиптической орбите очень

больших размеров. Угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ можно тоже считать равным нулю, так как $\bar{\omega}$ считаем постоянным вектором. Оставшаяся часть переносного ускорения $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ пропорциональна ω^2, т. е. величина малая по сравнению с величинами порядка ω для не очень больших расстояний r. Величиной порядка ω является сила инерции Кориолиса

$$\bar{\Phi}_{к}=-m\bar{a}_{к}=-m\cdot 2(\bar{\omega}\times\bar{v}_r),$$

где $\bar{v}_r$ — скорость материальной точки относительно Земли. Таким образом, неинерциальность системы отсчета, скрепленной с Землей, проявляется главным образом через влияние силы инерции Кориолиса, если рассматривается движение материальной точки вблизи Земли, при котором r не очень велико. Рассмотрим несколько примеров этого влияния кориолисовой силы инерции.

Маятник Фуко. Если подвесить на длинной нити груз достаточно малых размеров, то действующая на него сила $\bar{F}$ будет состоять из силы притяжения $\bar{P}$ к Земле, направленной к центру Земли, и силы натяжения нити $\bar{S}$ (рис. 16, *а*). Эти силы расположены в одной вертикальной плоскости π (рис. 16, *б*). Если начальные отклонения и скорость груза тоже находятся в плоскости π, то маятник при колебаниях должен все время находиться в плоскости π, неподвижной относительно гелиоцентрической системы отсчета. Земной шар поворачивается относительно этой системы отсчета с угловой скоростью ω. Следовательно, плоскость π по отношению к Земле должна поворачиваться в сторону, противоположную Земле, с угловой скоростью ω, если маятник подвесить на северном полюсе. Для маятника на широте φ угловая скорость вращения плоскости колебаний маятника равна $\omega\sin\varphi$. На экваторе эта скорость равна нулю.

Если тело маятника имеет выступ, который при колебаниях может оставлять след, например на песке, то этот след при

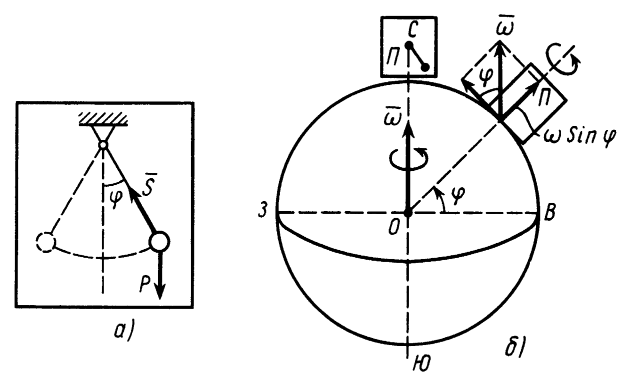


Рис. 16

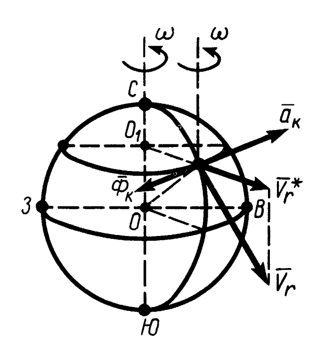


Рис. 17

движении маятника в одну сторону будет отличаться от следа при движении в противоположную сторону из-за вращения Земли. Это отличие тем больше, чем длиннее нить маятника. Фуко в 1857 г. использовал маятник длиной $l = 67$ м. В СССР маятник Фуко имеется в Исаакиевском соборе в Ленинграде. Маятник Фуко наглядно демонстрирует вращение Земли относительно инерциальной системы отсчета.

Отклонение движущихся тел вправо в Северном полушарии. В Северном полушарии из-за дополнительного действия силы инерции Кориолиса, вызванной вращением Земли, все движущиеся тела должны смещаться в правую сторону, если смотреть в направлении движения. Пусть материальная точка движется со скоростью $\bar{v}_r$ относительно Земли по касательной к меридиану с севера на юг (рис. 17). Определим проекцию $\bar{v}_r^*$ этой скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения Земли. Повернув вектор $\bar{v}_r^*$ вокруг оси, параллельной оси вращения земного шара, на 90° в направлении его вращения, получим, согласно правилу Жуковского, направление ускорения Кориолиса $\bar{a}_к$ по касательной к параллели с запада на восток. Сила инерции Кориолиса $\bar{\Phi}_к = -m\bar{a}_к$ соответственно направлена с востока на запад, т. е. вправо от направления движения. Действие такой силы вызовет у движущейся точки дополнительное ускорение относительно Земли в направлении этой силы, а следовательно, и ее перемещение, если точка движется в течение некоторого времени. Движение точки может иметь направление, отличное от касательной к меридиану. Важно, чтобы оно имело отличную от нуля проекцию скорости $\bar{v}_r^*$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения земного шара.

Если рассмотреть поступательное движение железнодорожного вагона, то для него сила инерции Кориолиса пройдет через центр его тяжести слева направо, если смотреть по движению вагона. Это приведет к увеличению давления на правый рельс и к его уменьшению на левый. На двухколейных железных дорогах правый рельс изнашивается быстрее левого.

Для частички воды в реке действие силы Кориолиса слева направо, если смотреть по течению реки, приведет к прижиманию этой частички к правому берегу, способствуя большему его подмыванию. Правый берег рек в Северном полушарии более подмыт, чем левый на прямолинейных участках реки. Этот эффект известен в географии как закон Бэра. На закруглениях реки вследствие центробежных сил инерции может оказаться подмытым и левый берег.

Действие силы инерции Кориолиса на летящие самолеты, ракеты, снаряды, движущийся воздух, морские течения приво-

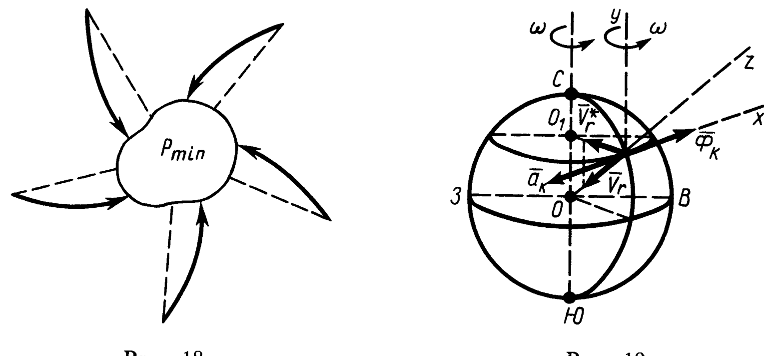


Рис. 18 Рис. 19

дит к их отклонению в правую сторону в Северном полушарии. В Южном полушарии отклонение будет в левую сторону. Сила инерции Кориолиса способствует образованию циклонов, антициклонов, вихрей, смерчей и т. д. Если в каком-то месте образовалось пониженное давление, например вследствие местного нагревания воздуха, то к этому месту начнет двигаться воздух из мест с повышенным давлением. Сила инерции Кориолиса отклонит движущиеся частички воздуха вправо, создав местный вихрь (рис. 18), а для больших масс воздуха — циклон. Аналогично, в местах с повышенным давлением образуются антициклоны.

Отклонение падающих тел к востоку. Рассмотрим в Северном полушарии тело, падающее вертикально вниз под действием силы тяжести без начальной скорости. Действие силы инерции Кориолиса в этом случае в первом приближении сведется к отклонению падающего тела к востоку. Действительно, если скорость тела $\bar{v}_r$ направлена по вертикали к центру Земли, то ее проекция на плоскость параллельного круга направлена к центру этого круга (рис. 19). Ускорение Кориолиса $\bar{a}_к$ соответственно направлено по касательной к параллели на запад, а сила инерции Кориолиса $\bar{\Phi}_к$ — по касательной к параллели на восток. Она вызовет отклонение падающего тела к востоку. Как показывают расчеты, это отклонение при падении с высоты 160 м составляет приблизительно 2,8 см при $\varphi=50°$, что хорошо согласуется с результатами опытов.

Пример. Внутри трубки, имеющей гладкую поверхность, находится шарик массой $m=1$ кг (рис. 20). Шарик притягивается к неподвижной точке O трубки силой, пропорциональной расстоянию шарика до этой точки. Коэффициент пропорциональности $c=4{,}9$ Н/м. Трубка наклонена к вертикальной оси Oz_1 на угол $\alpha=60°$ и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью $\omega=1\ с^{-1}$. В начальный момент шарик находился в точке M_0 на расстоянии $M_0O=2{,}4$ м и имел скорость относительно трубки $v_0=10$ м/с.

Определить закон движения шарика по трубке, принимая его за точку; силу давления шарика на стенку трубки и силу притяжения в момент времени $t=\pi/2$ с.

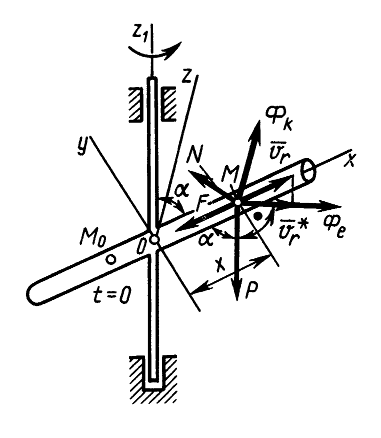


Рис. 20

Решение. Выберем систему подвижных осей координат $Oxyz$, вращающихся вместе с трубкой. Ось Ox направим по трубке.

Векторное уравнение движения шарика относительно подвижной системы координат имеет вид

$$m\bar{a}_r = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_к.$$

В проекциях на подвижные оси координат

$$m\ddot{x} = -F - P\cos\alpha + \Phi_e \sin\alpha;$$

$$0 = N_y - P\sin\alpha - \Phi_e\cos\alpha;$$

$$0 = N_z + \Phi_к.$$

Здесь $\bar{P} = m\bar{g}$ — сила тяжести шарика; $\bar{N}$ — сила реакции трубки; $\bar{F}$ — сила притяжения; $\bar{\Phi}_e$, $\bar{\Phi}_к$ — переносная сила инерции и сила инерции Кориолиса. Так как $y = \text{const} = 0$, $z = \text{const} = 0$, то $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$. Ось Oz направлена параллельно силе $\bar{\Phi}_к$, а ось Oy вместе с другими осями образует правую систему осей координат.

В рассматриваемом случае

$$\Phi_e = mx\omega^2 \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}x; \quad \Phi_к = 2m\omega\dot{x}\sin\alpha = \sqrt{3}\dot{x};$$

$$F = cx = 4{,}9x; \quad g = 9{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Подставляя эти значения сначала в общем виде в уравнения движения, после простых преобразований получаем:

$$\ddot{x} + (c/m - \omega^2\sin^2\alpha)x = -g\cos\alpha; \quad N_y = m\sin\alpha(g + x\omega^2\cos\alpha); \quad N_z = -2m\omega\dot{x}\sin\alpha.$$

После подстановки числовых значений величин имеем

$$\ddot{x} + 4{,}1x = -4{,}9; \quad N_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(9{,}8 + \frac{x}{2}\right); \quad N_z = -\sqrt{3}\dot{x}.$$

Дифференциальное уравнение является линейным неоднородным; следовательно, его решение

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 — общее решение однородного уравнения; x_2 — частное решение неоднородного уравнения, правая часть которого постоянна. В качестве частного решения можно взять постоянную $x_2 = -4{,}9/4 = -1{,}2$. При подстановке значения x_2 в дифференциальное уравнение убеждаемся, что оно обращает уравнение в тождество, т. е. является его частным решением.

Общее решение однородного уравнения x_1 является решением однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + 4{,}1x_1 = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4{,}1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} \approx \pm 2i$ чисто мнимые. Следовательно, решение однородного уравнения, зависящее от двух постоянных интегрирования C_1 и C_2, можно выразить в форме

$$x_1 = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t.$$

После этого

$$x = x_1 + x_2 = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t - 1{,}2;$$

$$\dot{x} = -2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t.$$

Начальные условия задачи

$$t=\pi/2\text{с};\ x=x_0=-2{,}4\ \text{м};\ \dot{x}=v_0=10\ \text{м/с}.$$

Подставляя их в выражения для x и $\dot{x}$, получаем следующие уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$-2{,}4=-C_1-1{,}2;\ 10=-2C_2.$$

Их решения $C_1=1{,}2$; $C_2=-5$.

Уравнения движения шарика с учетом значений постоянных принимает вид

$$x=1{,}2(\cos 2t-1)-5\sin 2t;\ \dot{x}=-2{,}4\sin 2t-10\cos 2t.$$

В момент времени $t=\pi/2$ с

$$x=1{,}2(\cos\pi-1)-5\sin\pi=-2{,}4\ \text{м};\ \dot{x}=-2{,}4\sin\pi-10\cos\pi=10\ \text{м/с}.$$

Подставляя эти значения x и $\dot{x}$ в выражения для N_y и N_z, имеем

$$N_y=(\sqrt{3}/2)(9{,}8-1{,}2)=7{,}3\ \text{Н};\ N_z=-\sqrt{3}\cdot 10=-17{,}3\ \text{Н}.$$

Давление шарика N' на трубку равно по величине силе реакции трубки на шарик. Поэтому

$$N'=N=\sqrt{N_y^2+N_z^2}=18{,}8\ \text{Н}.$$

Сила притяжения F при $t=\pi/2$ с

$$F=c\cdot|x|=4{,}9\cdot 2{,}4=11{,}8\ \text{Н}.$$

§ 4. НЕВЕСОМОСТЬ

Динамическая теорема Кориолиса позволяет рассмотреть состояние невесомости, которое, в частности, возникает при движении космических кораблей как искусственных спутников Земли. При рассмотрении невесомости материальной точки целесообразно ее представлять как твердое тело, имеющее поверхность, которой оно может соприкасаться с другими телами. Будем предполагать, что скорости и ускорения всех точек тела одинаковы, а реакции соприкасающихся тел приводятся к равнодействующей.

Под невесомостью такой материальной точки понимают отсутствие давления этой точки на каждое из тел, с которым она может соприкасаться. В частности, невесомая материальная точка не давит на площадку весов (не имеет веса), находящихся в покое по отношению к той системе отсчета, относительно которой покоится материальная точка.

Систему отсчета, относительно которой материальная точка находится в покое и, следовательно, имеет относительно нее скорость и ускорение, равные нулю, назовем *собственной системой отсчета* материальной точки. Все величины относительно этой системы отсчета условимся обозначать специальным индексом $*$. Тогда имеем $\bar{v}_r^*$, $\bar{a}_r^*$, $\bar{a}_e^*$, и т. д. Естественно, что $\bar{v}_r^*$ и $\bar{a}_r^*$ равны нулю.

Невесомая материальная точка (тело), прикрепленная на пружине к любому телу, покоящемуся относительно ее собственной системы отсчета, не деформирует эту пружину. Учитывая, что давление точки на какое-либо тело по модулю

совпадает с силой реакции тела на эту точку, невесомость наблюдается при равенстве нулю силы реакции от любого тела, соприкасающегося с рассматриваемой невесомой материальной точкой.

Если в общем случае рассматривать невесомость материального тела, а не точки, то реакции окружающих его тел сведутся к распределенным силам по поверхности его соприкосновения с этими телами. Сила реакции, отнесенная к единице площади поверхности соприкосновения (напряжение силы реакции), должна при невесомости тела быть равна нулю в каждой точке его поверхности. Это является условием невесомости для любого тела, не обязательно твердого.

Для абсолютно твердого тела при его невесомости вместо равенства нулю напряжения поверхностной силы в каждой точке его поверхности соприкосновения достаточно равенства нулю главного вектора и главного момента этих сил относительно любого центра приведения.

Ограничимся рассмотрением невесомости материальной точки, т. е. абсолютно твердого тела, для которого все поверхностные силы приводятся только к одной равнодействующей силе — реакции тел, соприкасающихся с ним. Невесомость материальной точки не связана с системой отсчета или с наблюдателем, находящимся в той или иной системе отсчета. Но для выявления сил, действие которых испытывает материальная точка, выберем ее собственную систему отсчета, по отношению к которой ее относительные скорость и ускорение равны нулю, т. е. $v_r^*=0$ и $a_r^*=0$. В этом случае сила инерции Кориолиса тоже равна нулю и для сил выполняется условие относительного равновесия

$$\bar{F}+\bar{N}+\bar{\Phi}_e^*=0,$$

где $\bar{F}$ — равнодействующая активных или заданных сил от тел, не соприкасающихся с точкой; $\bar{N}$ — равнодействующая реакция от всех соприкасающихся в точкой тел; $\bar{\Phi}_e^*=-m\bar{a}_e^*$ — переносная сила инерции в собственной системе отсчета рассматриваемой точки.

Из условия относительного равновесия сил имеем

$$-\bar{N}=\bar{F}+\bar{\Phi}_e^*.$$

Согласно определению невесомости, $\bar{N}=0$ и, следовательно, $\bar{F}+\bar{\Phi}_e^*=0$.

Таким образом, условие невесомости через силы можно выразить как $\bar{N}=0$ или как $\bar{F}+\bar{\Phi}_e^*=0$, т. е. *для невесомости материальной точки необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая активных сил от материальных объектов, не соприкасающихся с точкой, вместе с переносной силой инерции в собственной системе отсчета рассматриваемой точки образовывала равновесную систему сил.*

Согласно теореме о сложении ускорений, абсолютное ускорение в общем случае определяется по формуле

$$\bar{a}=\bar{a}_e+\bar{a}_r+\bar{a}_к.$$

Если абсолютное ускорение рассматривать относительно инерциальной системы отсчета, а в качестве подвижной системы отсчета выбрать собственную систему отсчета, то $\bar{v}_r^*=0$, $\bar{a}_r^*=0$, $\bar{a}_к^*=0$ и, следовательно, $\bar{a}=\bar{a}_e^*$. Сила инерции в инерциальной системе отсчета $\bar{\Phi}=-m\bar{a}$, таким образом, совпадает с переносной силой инерции в собственной системе отсчета $\bar{\Phi}_e^*=-m\bar{a}_e^*$. Учитывая, что $\bar{\Phi}_e^*=\bar{\Phi}$, условие невесомости можно выразить как $\bar{F}+\bar{\Phi}=0$, т. е. как *уравновешивание силой инерции в инерциальной системе отсчета равнодействующей сил от действия тел, не соприкасающихся с невесомой материальной точкой.*

Проверим выполнение условия невесомости для материальной точки, находящейся в космическом корабле, который движется поступательно относительно Земли в качестве ее искусственного спутника за пределами атмосферы. За инерциальную систему отсчета можно принять систему отсчета, скрепленную с Землей.

Пусть материальная точка неподвижна относительно космического корабля. Тогда собственной системой отсчета будет система отсчета, скрепленная с кораблем. Силой от действия тел, не соприкасающихся с точкой, является сила тяготения Земли $\bar{F}=m\bar{g}$, где m — масса точки, а $\bar{g}$ — ее ускорение, создаваемое силой тяготения. Сила инерции точки в ее движении относительно Земли $\bar{\Phi}=-m\bar{a}$ совпадает с переносной силой инерции $\bar{\Phi}_e^*=-m\bar{a}_e^*$, где $\bar{a}_e^*$ — переносное ускорение точки от поступательного движения вместе с собственной системой отсчета, скрепленной с космическим кораблем.

Если корабль не испытывает действия других сил, кроме силы тяготения Земли, то его ускорение от этого тяготения тоже равно $\bar{g}$, так как ускорения от силы тяготения не зависят от масс тел, а зависят только от расстояния этих тел до центра Земли. Таким образом, $\bar{a}_e^*=\bar{a}=\bar{g}$ и, следовательно, условие невесомости точки $\bar{F}+\bar{\Phi}=0$ выполняется. Материальная точка будет находиться в невесомости и, следовательно, не должна оказывать давления на любое тело, движущееся вместе с космическим кораблем.

В космическом корабле, который кроме поступательного движения имеет также и вращение, каждая из материальных частиц корабля не находится в состоянии невесомости, хотя весь корабль как целое находится в состоянии невесомости. Для него главный вектор и главный момент поверхностных сил равны нулю, так как нет тел, с которыми корабль соприкасается своей поверхностью.

Материальная точка внутри кабины корабля находится в состоянии невесомости, пока она не соприкасается со стенками корабля и с другими телами, скрепленными с кораблем.

Кажется, что для невесомости тела необходима невесомость каждой его точки. Это приводит к требованию отсутствия взаимных давлений между точками тела или к отсутствию внутренних напряжений в теле. Но такие напряжения всегда имеются при невесомости вследствие естественной связи точек тела друг с другом, на которую можно влиять, например, термообработкой, изменением температуры и т. д. При невесомости тела как целого не обязательно отсутствие даже дополнительных напряжений, создаваемых движением тела. Достаточно равенства нулю напряжений в точках поверхности тела, создаваемых другими, соприкасающимися телами (связями), а для абсолютно твердого тела — равенства нулю главного вектора и главного момента поверхностных сил.

В невесомости находятся земной шар и другие планеты Солнечной системы, их спутники, если пренебречь действием на них метеоритов, космического излучения и т. д.

В состоянии невесомости находилось бы свободно падающее тело вблизи Земли, если бы не было действия воздуха. Невесомость можно создать искусственно вблизи Земли в герметизированной кабине летательного аппарата, заставив его с помощью двигателей совершать поступательное движение с ускорением $\bar{g}$, равным ускорению от силы притяжения Земли.

ГЛАВА 3

ГЕОМЕТРИЯ МАСС

§ 1. ЦЕНТР МАСС

При рассмотрении движения твердых тел и других механических систем важное значение имеет точка, называемая **центром масс**. Если механическая система состоит из конечного числа материальных точек N с массами m_1, m_2, ..., m_N, радиусы-векторы которых, проведенные из одной и той же точки O, — $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, ..., $\bar{r}_N$ (рис. 21), то *центром масс называется геометрическая точка* C, радиус-вектор которой $\bar{r}_C$ определяется выражением

$$\bar{r}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k / M, \tag{1}$$

где $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ — масса системы. Обозначая декартовы координаты материальных точек (x_1, y_1, z_1), ..., (x_N, y_N, z_N), из (1) проецированием на декартовы оси координат получим следующие формулы для координат центра масс:

$$x_C = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k / M; \quad y_C = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k / M; \quad z_C = \sum_{k=1}^{N} m_k z_k / M. \tag{1'}$$

Центр масс является не материальной точкой, а г е о м е т р и ч е с к о й. Он может не совпадать ни с одной материальной точкой системы, как, например, в случае кольца. Центр масс системы характеризует распределение масс в системе.

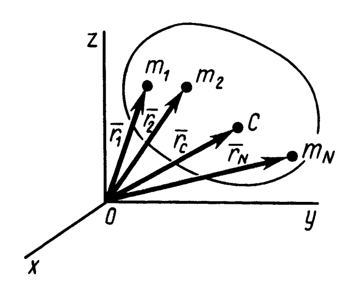


Рис. 21

Векторная величина $\bar{S}_O = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k$ называется *статическим моментом массы относительно точки O*. Скалярная величина $S_{Oyz} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k$ называется *статическим моментом массы относительно координатной плоскости Oyz*. Величины $S_{Oxz} = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k$ и $S_{Oxy} = \sum_{k=1}^{N} m_k z_k$ являются соответственно статическими моментами массы относительно координатных плоскостей Oxz и Oxy.

Радиус-вектор и координаты центра масс через статические моменты массы выражаются формулами

$$\bar{r}_C = \bar{S}_O / M; \quad x_C = S_{Oyz}/M; \quad y_C = S_{Oxz}/M; \quad z_C = S_{Oxy}/M.$$

Если механическая система представляет собой сплошное тело, то его разбивают на элементарные частицы с бесконечно малыми массами $\mathrm{d}m$ и с изменяющимися от частицы к частице радиусом-вектором $\bar{r}$.

Суммы в пределе переходят в интегралы. Формулы (1) и (1′) принимают форму

$$\bar{r}_C = \int \bar{r}\,\mathrm{d}m / M, \qquad (2)$$

$$x_C = \int x\,\mathrm{d}m/M; \quad y_C = \int y\,\mathrm{d}m/M; \quad z_C = \int z\,\mathrm{d}m/M, \qquad (2')$$

где $M = \int \mathrm{d}m$ — масса тела.

Для однородных сплошных тел $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$; $M = \rho V$, где ρ — плотность тела, общая для всех элементарных частиц; $\mathrm{d}V$ — объем элементарной частицы; V — объем тела.

Для тел типа тонкого листа, которые можно принять за однородные материальные поверхности, $\mathrm{d}m = \rho_S \mathrm{d}S$; $M = \rho_S S$, где ρ_S — поверхностная плотность; $\mathrm{d}S$ — площадь поверхности элементарной частицы; S — площадь поверхности.

Для тонкой проволоки, которую можно принять за отрезок линии, $\mathrm{d}m = \rho_l \mathrm{d}l$, $M = \rho_l l$, где ρ_l — линейная плотность; $\mathrm{d}l$ — длина элемента линии; l — длина отрезка линии.

В этих случаях определение центра масс тел сводится к вычислению центра масс объемов, площадей и длин линий соответственно.

§ 2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Для характеристики распределения масс в телах при рассмотрении вращательных движений требуется ввести понятия моментов инерции.

Моменты инерции относительно точки и оси

Моментом инерции механической системы, состоящей из N материальных точек, относительно точки O называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до точки O (рис. 22), т. е.

$$J_O = \sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2. \tag{3}$$

Момент инерции относительно точки часто называют *полярным моментом инерции*. В случае сплошного тела сумма переходит в интеграл и для полярного момента инерции имеем

$$J_O = \int d^2 \mathrm{d}m, \tag{3'}$$

где $\mathrm{d}m$ — масса элементарной частицы тела, принимаемой в пределе за точку; d — ее расстояние до точки O.

Моментом инерции J_l *системы материальных точек относительно оси* Ol *называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний* r_k *до оси* Ol (рис. 22), т. е.

$$J_l = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2. \tag{4}$$

В частном случае сплошного тела сумму следует заменить интегралом:

$$J_l = \int r^2 \mathrm{d}m. \tag{4'}$$

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, не зависящей от массы материала, является радиус инерции. Радиус инерции ρ_l относительно оси Ol определяется по формуле

$$\rho_l = \sqrt{J_l / M}, \tag{5}$$

где M — масса тела.

Момент инерции относительно оси через радиус инерции относительно этой оси определяется выражением

$$J_l = M \rho_l^2. \tag{5'}$$

В справочниках по моментам инерции приводят таблицы значений радиусов инерции различных тел.

Рис. 22

Формула (5′) позволяет считать радиус инерции тела относительно оси расстоянием

от этой оси до такой точки, в которой следует поместить массу тела, чтобы ее момент инерции оказался равным моменту инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Моменты инерции относительно оси и точки имеют одинаковую размерность — произведение массы на квадрат длины (кг · м^2).

Кроме моментов инерции относительно точки и оси используются также моменты инерции относительно плоскостей и центробежные моменты инерции. Эти моменты инерции удобно рассмотреть относительно координатных плоскостей и осей декартовой системы координат.

Моменты инерции относительно осей координат

Моменты инерции относительно декартовых осей координат Ox, Oy и Oz и их начала — точки O (рис. 23) — определяются выражениями

$$J_x = \sum_{k=1}^{N} m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right); \quad J_y = \sum_{k=1}^{N} m_k\left(z_k^2 + x_k^2\right); \quad J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right); \qquad (6)$$

$$J_O = \sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right), \qquad (7)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты материальных точек системы. Для сплошных тел эти формулы примут вид

$$J_x = \int\left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m; \quad J_y = \int\left(z^2 + x^2\right) \mathrm{d}m;$$

$$J_z = \int\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m; \quad J_O = \int\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m.$$

Из приведенных формул следует зависимость

$$2J_O = J_x + J_y + J_z. \qquad (8)$$

Если через точку O провести другую систему декартовых осей координат $Ox'y'z'$, то для них по формуле (8) получим

$$2J_O = J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}. \qquad (8')$$

Из сравнения (8) и (8′) следует, что

$$J_x + J_y + J_z = J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}.$$

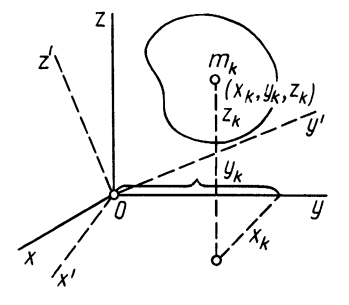


Рис. 23

Сумма моментов инерции относительно декартовых осей координат не зависит от ориентации этих осей в рассматриваемой точке, т. е. является величиной, инвариантной по отношению к направлению осей координат.

Для осей координат $Oxyz$ можно определить следующие три центробежных момента инерции:

$$J_{xy}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k;\quad J_{yz}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k;$$

$$J_{zx}=\sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k. \tag{9}$$

Центробежные моменты инерции часто называют *произведениями инерции*.

Моменты инерции относительно осей и точек — величины положительные, так как в них входят квадраты координат. Центробежные моменты инерции содержат произведения координат и могут быть как положительными, так и отрицательными.

Центробежные моменты инерции имеют важное значение при рассмотрении давлений на подшипники при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси и в других случаях.

Кроме рассмотренных моментов инерции иногда используются моменты инерции относительно координатных плоскостей J_{Oxy}, J_{Oyz}, J_{Ozx}, которые определяются выражениями

$$J_{Oxy}=\sum_{k=1}^{N} m_k z_k^2;\quad J_{Oyz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2;\quad J_{Ozx}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2.$$

§ 3. ТЕОРЕМА О МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ (ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА)

Установим зависимость между моментами инерции системы относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Пусть имеем две системы прямоугольных, взаимно параллельных осей координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$. Начало системы координат $Cx'y'z'$ находится в центре масс системы (рис. 24).

По определению момента инерции относительно оси имеем

$$J_{Oz}=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k^2+y_k^2\right);$$

$$J_{Cz'}=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k'^2+y_k'^2\right),$$

где m_k — масса точки M_k, а x_k, y_k, z_k и x_k', y_k', z_k' — координаты этой точки относительно систем координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$ соответственно. Если обозначить x_C, y_C, z_C координаты центра масс относительно системы координат $Oxyz$, то для взаимно параллельных осей координаты одной и той же точки M_k связаны соотношениями параллельного переноса

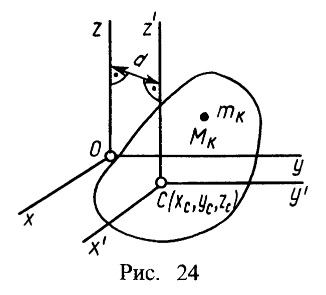


Рис. 24

$$x_k=x_k'+x_C;\quad y_k=y_k'+y_C;\quad z_k=z_k'+z_C,$$

Подставим эти значения координат в выражение момента инерции J_{Oz}. После преобразований получим

$$J_{Oz}=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k'^2+y'^{2k}\right)+2x_C\sum_{k=1}^{N} m_k x_k'+2y_C\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'+\left(x_C^2+y_C^2\right)\sum_{k=1}^{N} m_k.$$

В этом соотношении $\sum_{k=1}^{N} m_k=M$ — масса системы, $\sum_{k=1}^{N} m_k x_k' = = Mx_c'=0$ и $\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'=My_C'=0$, так как $x_C'=0$ и $y_C'=0$ вследствие того, что по условию центр масс находится в начале координат этой системы координат.

Величина $x_C^2+y_C^2=d^2$, где d — расстояние между осями Oz и Cz'. Окончательно

$$J_{Oz}=J_{Cz'}+Md^2.$$

Связь моментов инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, составляет содержание так называемой теоремы Штейнера или Гюйгенса — Штейнера: *момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями.*

Из теоремы Штейнера следует, что для совокупности параллельных осей момент инерции является наименьшим относительно оси, проходящей через центр масс.

Если взять ось O_1z_1 параллельной Oz, то для нее получим

$$J_{O_1z_1}=J_{Cz'}+Md_1^2,$$

где d_1 — расстояние между параллельными осями O_1z_1 и Cz'.

Исключая момент инерции $J_{Cz'}$ из двух последних формул, получим зависимость моментов инерции относительно двух параллельных осей, не проходящих через центр масс:

$$J_{O_1z_1}=J_{Oz}+M\left(d_1^2-d^2\right).$$

Установим изменение центробежных моментов инерции при параллельном переносе осей координат. Имеем

$$J_{yz}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k' z_k'+y_C\sum_{k=1}^{N} m_k z_k'+z_C\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'+y_C z_C\sum_{k=1}^{N} m_k.$$

Учитывая, что $\sum_{k=1}^{N} m_k y_k' z_k'=J_{y'z'}$, $\sum_{k=1}^{N} m_k z_k'=Mz_C'$; $\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'=My_C'$, $\sum_{k=1}^{N} m_k=M$, получаем

$$J_{yz}=J_{y'z'}+My_C z_C'+Mz_C y_C'+My_C z_C,$$

где y_C', z_C' — координаты центра масс относительно системы координат $Cx'y'z'$. Аналогичные формулы получаются для двух других центробежных моментов инерции:

$$J_{zx}=J_{z'x'}+Mz_C x_C'+Mx_C z_C'+Mz_C x_C;$$

$$J_{xy}=J_{x'y'}+Mx_C y_C'+My_C x_C'+Mx_C y_C.$$

Так как начало системы координат $Cx'y'z'$ находится в центре масс, то $x'_C=0$, $y'_C=0$, $z'_C=0$ и тогда

$$J_{yz}=J_{y'z'}+My_Cz_C;\quad J_{zx}=J_{z'x'}+Mz_Cx_C;\quad J_{xy}=J_{x'y'}+Mx_Cy_C, \quad (10)$$

т. е. центробежные моменты инерции при параллельном переносе осей координат из любой точки в центре масс изменяются в соответствии с (10).

Если производится параллельный перенос осей $O_1x_1y_1z_1$ из точки O_1 в центр масс, то, согласно (10), имеем:

$$J_{y1z1}=J_{y'z'}+My_{1C}z_{1C};\; J_{z1x1}=J_{z'x'}+Mz_{1C}x_{1C};\; J_{x1y1}=J_{x'y'}+Mx_{1C}y_{1C}. \quad (10')$$

Исключая из (10) и (10′) центробежные моменты инерции $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$, $J_{x'y'}$, получим формулы для изменения центробежных моментов инерции при параллельном переносе осей координат из точки O_1 в точку O:

$$J_{y1z1}=J_{yz}+M(y_{1C}z_{1C}-y_Cz_C);\quad J_{z1x1}=J_{zx}+M(z_{1C}x_{1C}-z_Cx_C);$$

$$J_{x1y1}=J_{xy}+M(x_{1C}y_{1C}-x_Cy_C),$$

где (x_{1C}, y_{1C}, z_{1C}) и (x_C, y_C, z_C) — координаты центра масс в двух системах взаимно параллельных осей координат.

§ 4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Моменты инерции тел сложной формы часто удается вычислить, если их предварительно разбить на тела простой формы. Моменты инерции сложных тел получают суммируя моменты инерции частей этих тел. Получим формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных простейших тел.

Однородный стержень

Имеем однородный стержень длиной l и массой M (рис. 25). Направим по стержню ось Ox. Вычислим момент инерции стержня относительно оси Oz, проходящей перпендикулярно стержню через его конец. Согласно определению момента инерции сплошного тела относительно оси, имеем

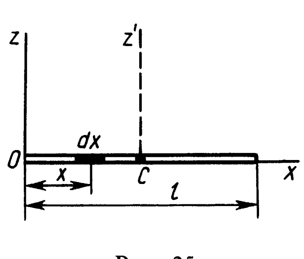


Рис. 25

$$J_{Oz}=\int_{(l)} x^2\,dm=\rho\int_0^l x^2\,dx,$$

так как $dm=\rho dx$, где $\rho=M/l$ — плотность стержня.

Вычисляя интеграл, получаем

$$J_{Oz}=\frac{M}{l}\int_0^l x^2\,dx=\frac{M}{l}\,\frac{l^3}{3}=M\frac{l^2}{3}.$$

Таким образом,

$$J_{Oz} = M\frac{l^2}{3}. \qquad (11)$$

Момент инерции стержня относительно оси Cz', проходящей через центр масс и параллельной оси Oz, определяется по теореме Штейнера:

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2 \quad \text{где} \quad d^2 = (l/2)^2 = l^2/4.$$

Следовательно,

$$J_{Cz'} = J_{Oz} - Md^2 = M\frac{l^2}{3} - M\frac{l^2}{4} = M\frac{l^2}{12},$$

т. е.

$$J_{Cz'} = M\frac{l^2}{12}. \qquad (12)$$

Прямоугольная пластина

Прямоугольная тонкая пластина имеет размеры l и h и массу M (рис. 26). Оси Ox и Oy расположим в плоскости пластины, а ось Oz — перпендикулярно ей. Для определения момента инерции пластины относительно оси Oy разобьем пластину на элементарные полоски шириной $\mathrm{d}x$ и массой $\mathrm{d}m = \rho h \mathrm{d}x$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Получим

$$J_y = \int_0^l x^2 \mathrm{d}m = \rho h \int_0^l x^2 \mathrm{d}x = \rho h\frac{l^3}{3} = M\frac{l^2}{3},$$

так как $\rho h l = M$.

Аналогичные вычисления для оси Ox дадут

$$J_x = M\frac{h^2}{12},$$

так как эта ось Ox проходит через середину пластины.

Для определения момента инерции пластины относительно оси Oz следует предварительно вычислить момент инерции отдельной заштрихованной полоски относительно параллельной оси $O'z'$ по формуле (12) для стержня и применить затем теорему Штейнера. Для элементарной полоски имеем

$$\mathrm{d}m\frac{h^2}{12} + x^2 \mathrm{d}m.$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до l, получим

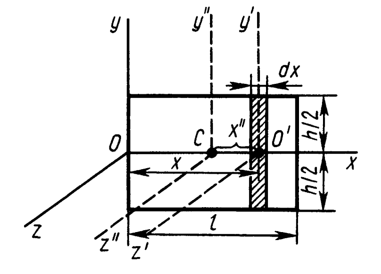


Рис. 26

$$J_z = \int_0^M \left(\mathrm{d}m\frac{h^2}{12} + x^2\mathrm{d}m\right) = \rho h\left[\frac{h^2}{12}\int_0^l \mathrm{d}x + \int_0^l x^2\mathrm{d}x\right] = M\left(\frac{h^2}{12} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Итак, для моментов инерции пластины относительно осей координат получены следующие формулы:

$$J_x = M\frac{h^2}{12}; \quad J_y = M\frac{l^2}{3}; \quad J_z = M\left(\frac{h^2}{12} + \frac{l^2}{3}\right). \tag{13}$$

Круглый диск

Имеем тонкий однородный диск радиусом R и массой M (рис. 27). Вычислим момент его инерции J_0 относительно точки O. Этот момент инерции для тонкого диска совпадает с моментом инерции J_z относительно координатной оси Oz, перпендикулярной плоскости диска. Разобьем диск на концентрические полоски шириной $\mathrm{d}r$, принимаемые в пределе за материальные окружности. Масса полоски равна ее площади $2\pi r\,\mathrm{d}r$, умноженной на плотность $\rho = M/(\pi R^2)$, т. е. $\mathrm{d}m = \rho \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r$. Момент одной полоски относительно точки O равен $r^2\mathrm{d}m$. Для всего диска

$$J_O = \int_0^M r^2\mathrm{d}m = \rho\cdot 2\pi\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \rho\cdot 2\pi\frac{R^4}{4} = M\frac{R^2}{2}.$$

Таким образом,

$$J_z = J_O = MR^2/2. \tag{14}$$

Рис. 27

Для осей координат Ox и Oy, расположенных в плоскости диска, в силу симметрии $J_x = J_y$. Используя (8), имеем $2J_O = J_x + J_y + J_z$, но $J_z = J_O$, поэтому

$$J_x = J_y = {}^1/_2\, J_O = MR^2/4. \tag{15}$$

В случае тонкого проволочного кольца или круглого колеса, у которых масса распределена не по площади, а по его ободу, имеем

$$J_z = J_O = MR^2; \; J_x = J_y = {}^1/_2\, MR^2. \tag{16}$$

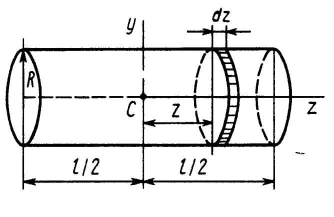


Рис. 28

Круглый цилиндр

Для круглого однородного цилиндра, масса которого M, радиус R и длина l (рис. 28), вычислим прежде всего его момент инерции относительно продольной оси симметрии Oz. Для этого разобьем

цилиндр плоскостями, перпендикулярными оси Oz, на тонкие диски массой $\mathrm{d}m$ и толщиной $\mathrm{d}z$. Для такого диска момент инерции относительного оси Oz равен $\frac{R^2}{2}\mathrm{d}m$. Для всего цилиндра

$$J_z=\int_0^M \frac{R^2}{2}\mathrm{d}m\ \frac{R^2}{2}\int_0^M \mathrm{d}m=M\frac{R^2}{2},$$

т. е.

$$J_z=MR^2/2. \tag{17}$$

Вычислим момент инерции цилиндра относительно его поперечной оси симметрии Cy. Для этого разобьем цилиндр поперечными сечениями, перпендикулярными его продольной оси, на элементарные диски толщиной $\mathrm{d}z$. Момент инерции элементарного диска массой $\mathrm{d}m=\pi R^2\rho\mathrm{d}z$ относительно оси Cy, по теореме Штейнера, $\mathrm{d}m\frac{R^2}{4}+\mathrm{d}mz^2$.

Чтобы получить момент инерции всего цилиндра относительно оси Cy, следует проинтегрировать полученное выражение по z в пределах от 0 до $l/2$ и результат удвоить. Получим

$$J_{Cy}=\int_0^M (R^2/4+z^2)\mathrm{d}m=2\pi R^2\rho\int_0^{l/2}(R^2/4+z^2)\mathrm{d}z=\pi R^2 l\rho\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right).$$

Но $\pi R^2 l\rho=M$ — масса цилиндра. Следовательно,

$$J_{Cy}=M\left(R^2/4+l^2/12\right).$$

Таким образом, момент инерции цилиндра относительно его поперечной оси симметрии получается как сумма моментов инерции относительно этой оси диска и стержня, массы которых равны по отдельности массе цилиндра. Диск получается из цилиндра симметричным сжатием его с торцов до срединной плоскости при сохранении радиуса, а стержень — сжатием цилиндра в однородный стержень, расположенный по оси цилиндра, при сохранении длины.

Шар

Пусть масса шара M, радиус R (рис. 29). Разобьем шар на концентрические сферические слои радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$. Масса такого слоя $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$, где $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{{}^4/_3\pi R^3}$; $\mathrm{d}V$ — объем слоя, равный произведению площади поверхности сферы радиусом r на толщину слоя $\mathrm{d}r$, т. е. $\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$. Таким образом, масса элементарного слоя $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho 4\pi r^2\mathrm{d}r$.

Для момента инерции шара относительно его центра O имеем

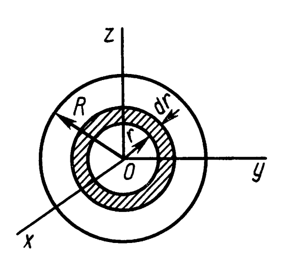


Рис. 29

$$J_O = \int_0^M r^2 \mathrm{d}m = \rho 4\pi \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \rho 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2,$$

т. е.

$$J_O = {}^3/_5\, MR^2. \qquad (18)$$

Для осей координат, проходящих через центр шара, в силу симметрии $J_x = J_y = J_z$. Но $2J_O = J_x + J_y + J_z = 3J_x = 3J_y = 3J_z$. Следовательно,

$$J_x = J_y = J_z = {}^2/_3\, J_O = {}^2/_5\, MR^2. \qquad (19)$$

§ 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ТОЧКУ

В заданной точке O выберем декартову систему осей координат $Oxyz$. Ось Ol образует с осями координат углы α, β, γ (рис. 30). По определению момента инерции относительно оси Ol имеем

$$J_l = \sum_{k=1}^{N} m_k d_2^k, \qquad (20)$$

или для сплошных тел

$$J_l = \int d^2 \mathrm{d}m.$$

В дальнейшем используется определение (20). Сплошные тела считаются разбитыми на N малых частей, принимаемых за точки.

Из прямоугольного треугольника OA_kM_k получаем

$$d_k^2 = r_k^2 - (OA_k)^2, \qquad (21)$$

где $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$, x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k. Отрезок OA_k является проекцией радиуса-вектора $\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k}$ на ось Ol. Для получения проекции вектора $\bar{r}_k$ на ось Ol его следует умножить скалярно на единичный вектор этой оси $\bar{l}^0 = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$. Имеем

$$OA_k = \bar{r}_k \cdot \bar{l}^0 = (x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k})(\bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma) = x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma. \qquad (22)$$

Умножая в (21) r_k^2, выраженный через координаты точки M_k, на единицу в виде $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и используя значение (22) для OA_k, получим

$$d_k^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma)^2 = (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (z_k^2 + x_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma - 2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma - 2z_kx_k\cos\gamma\cos\alpha - 2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (20) и вынося косинусы углов за знаки сумм, имеем

$$J_l=\cos^2\alpha\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2)+\cos^2\beta\sum_{k=1}^{N} m_k(z_k^2+x_k^2)+$$
$$+\cos^2\gamma\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2)-2\cos\beta\cos\gamma\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k-$$
$$-2\cos\gamma\cos\alpha\sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k-2\cos\alpha\cos\beta\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2)=J_x;\quad \sum_{k=1}^{N} m_k(z_k^2+x_k^2)=J_y;\quad \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2)=J_z$$

— моменты инерции относительно осей координат, а

$$\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=J_{yz};\quad \sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k=J_{zx};\quad \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k=J_{xy}$$

— центробежные моменты инерции относительно тех же осей, получим

$$J_l=J_x\cos^2\alpha+J_y\cos^2\beta+J_z\cos^2\gamma-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma-$$
$$-2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \qquad (24)$$

Для определения момента инерции J_l кроме углов α, β, γ, определяющих направление оси, необходимо знать в точке O шесть моментов инерции: J_x, J_y, J_z, J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}. Их удобно расположить как элементы единой таблицы или матрицы:

$$(J)=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Матрица, или таблица (25), составленная из осевых и центробежных моментов инерции относительно декартовых осей координат, называется *тензором инерции* в точке O. В тензоре инерции условились центробежные моменты инерции брать со знаком минус. Компоненты тензора инерции (отдельные осевые или центробежные моменты инерции) зависят не только от выбора точки, но и от ориентации осей координат в этой точке.

Для определения момента инерции относительно какой-либо оси, проходящей через заданную точку, для рассматриваемого тела необходимо иметь тензор инерции в этой точке и углы, определяющие направление оси с осями координат.

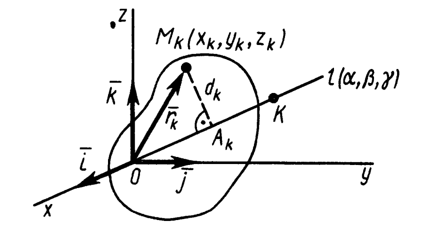


Рис. 30

§ 6. ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ

Для характеристики распределения моментов инерции тела относительно различных осей, проходящих через заданную точку, используется поверхность второго порядка — эллипсоид инерции. Для построения этой поверхности на каждой оси Ol (см. рис. 31), проходящей через точку O, откладывают от этой точки отрезок

$$OK = 1/\sqrt{J_l}. \tag{26}$$

Геометрическое место концов отрезков OK расположится на поверхности, которая называется эллипсоидом инерции. Получим уравнение эллипсоида инерции. Для этого выразим косинусы углов α, β, γ через координаты x, y, z точки K. Имеем:

$$\cos\alpha = \frac{x}{OK} = \sqrt{J_l}x; \quad \cos\beta = \frac{y}{OK} = \sqrt{J_l}y; \quad \cos\gamma = \frac{z}{OK} = \sqrt{J_l}z.$$

Подставляя эти значения косинусов углов в (24) и сокращая на J_l, получим уравнение поверхности второго порядка:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy = 1. \tag{27}$$

Это действительно уравнение эллипсоида, так как отрезок OK имеет конечную длину для всех осей, для которых моменты инерции не обращаются в нуль. Другие поверхности второго порядка, например гиперболоиды и параболоиды, имеют бесконечно удаленные точки. Эллипсоид инерции вырождается в цилиндр для тела в виде прямолинейного отрезка, если точка O расположена на самом отрезке. Для оси, направленной по этой прямой линии, момент инерции обращается в нуль и соответственно отрезок OK равен бесконечности.

Для каждой точки O имеется свой эллипсоид инерции. Эллипсоид инерции для центра масс тела называют *центральным эллипсоидом инерции.* Оси эллипсоида инерции (его сопряженные диаметры) называются *главными осями инерции.* В общем случае эллипсоид инерции имеет три взаимно перпендикулярные главные оси инерции. Они являются его осями симметрии.

В случае эллипсоида вращения все прямые, расположенные в экваториальной плоскости эллипсоида, перпендикулярной оси вращения, будут главными осями инерции. Для шара любая прямая, проходящая через его центр, есть главная ось инерции.

Моменты инерции относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции,* а относительно главных центральных осей инерции — *главными центральными моментами инерции.*

Если уравнение эллипсоида инерции отнести к его главным осям Ox', Oy', Oz', то оно примет вид

$$J_{x'}x'^2+J_{y'}y'^2+J_{z'}z'^2=1, \qquad (27')$$

где x', y', z' — текущие координаты точки, расположенной на эллипсоиде инерции, относительно главных осей инерции; $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$ — главные моменты инерции. Уравнение эллипсоида инерции (27') не содержит слагаемых с произведениями координат точек. Поэтому *центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю*, т. е.

$$J_{y'z'}=0; \quad J_{z'x'}=0; \quad J_{x'y'}=0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если центробежные моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей равны нулю, то эти оси являются главными осями инерции. Обращение в нуль трех центробежных моментов инерции является необходимым и достаточным условием того, что соответствующие прямоугольные оси координат есть главные оси инерции.

Главные моменты инерции часто обозначают J_1, J_2, J_3 вместо $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$. Для главных осей инерции формула (24) принимает форму

$$J_l=J_1\cos^2\alpha+J_2\cos^2\beta+J_3\cos^2\gamma. \qquad (24')$$

§ 7. СВОЙСТВА ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ

Теорема 1. Если одна из декартовых осей координат, например Oz (рис. 31), является главной осью инерции для точки O, а две другие оси Ox и Oy — любые, то два центробежных момента инерции, содержащих индекс главной оси инерции Oz, обращаются в нуль, т. е. $J_{xz}=0$ и $J_{yz}=0$.

Главная ось инерции Oz является осью симметрии эллипсоида инерции. Поэтому каждой точке эллипсоида, например $M(O, y, z)$, соответствует симметричная относительно этой оси точка $M'(O, -y, z)$. Подставляя в уравнение эллипсоида инерции (27) последовательно координаты этих точек, получим

$$J_y y^2+J_z z^2-2J_{yz}yz=1; \quad J_y(-y)^2+J_z z^2-2J_{yz}(-y)z=1.$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем

$$-4J_{yz}yz=0.$$

Так как всегда можно выбрать точки, для которых y и z отличны от нуля, то $J_{yz}=0$.

Аналогичные рассуждения для двух симметричных относительно оси Oz точек $N(x, O, z)$ и $N'(-x, O, z)$ приводят к заключению, что $J_{xz}=0$. В аналитической геометрии при исследовании уравнений поверхностей

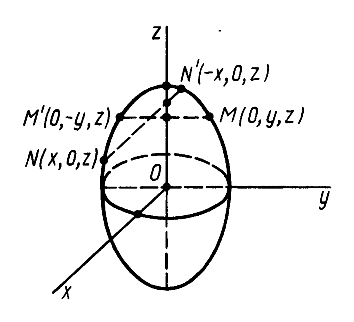


Рис. 31

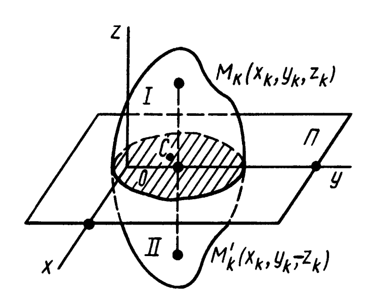


Рис. 32

второго порядка доказывается обратное утверждение, что если $J_{xz}=0$ и $J_{yz}=0$, то ось Oz есть главная ось. Таким образом, обращение в нуль центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} является необходимым и достаточным условием, чтобы ось Oz была главной осью инерции для точки O.

Теорема 2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то для любой точки, лежащей в этой плоскости, одна из главных осей инерции перпендикулярна плоскости симметрии, а две другие главные оси инерции расположены в этой плоскости.

Для доказательства теоремы выберем в плоскости симметрии П точку O и в ней оси прямоугольной системы координат $Oxyz$, причем ось Oz направим перпендикулярно плоскости симметрии (рис. 32). Тогда каждой точке тела $M_k(x_k, y_k, z_k)$ массой m_k соответствует симметричная относительно плоскости П точка $M'_k(x_k, y_k, -z_k)$ с такой же массой. Координаты точек M_k и M'_k отличаются только знаком у координат z_k.

Для центробежного момента инерции J_{yz} имеем

$$J_{yz}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=\sum_{(I)} m_k y_k z_k+\sum_{(II)} m_k y_k(-z_k)=0,$$

так как часть тела (I), соответствующая точкам с положительными координатами z_k, одинакова с частью тела (II), у которой точки имеют такие же координаты z_k, но со знаком минус. Аналогично доказывается, что

$$J_{xz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k=0.$$

Так как центробежные моменты инерции J_{yz} и J_{xz} обращаются в нуль, то ось Oz есть главная ось инерции для точки O. Другие две главные оси инерции перпендикулярны оси Oz и, следовательно, расположены в плоскости симметрии.

Центр масс однородного симметричного тела находится в плоскости симметрии. Поэтому одна из главных центральных осей инерции перпендикулярна плоскости симметрии, а две другие расположены в этой плоскости.

Доказанная теорема справедлива и для неоднородного тела, имеющего плоскость материальной симметрии.

Теорема 3. Если однородное тело имеет ось симметрии или неоднородное тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Теорема доказывается аналогично предыдущей. Для каждой точки тела M_k с положительными координатами x_k, y_k, z_k

и массой m_k существует симметричная относительно оси точка с такой же массой и такими же по величине, но отрицательными координатами $-x_k$, $-y_k$, $+z_k$, если осью симметрии является ось Oz. Тогда

$$J_{xz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k=\sum_{(I)} m_k x_k z_k+\sum_{(II)} m_k(-x_k)z_k=0,$$

так как суммы по симметричным относительно оси частям тела (I) и (II) отличаются друг от друга только знаком у координаты x_k.

Аналогично доказывается, что $J_{yz}=0$.

Таким образом, ось Oz является главной осью инерции для любой точки, расположенной на оси симметрии тела. Она есть главная центральная ось инерции, так как центр масс находится на оси симметрии.

Теорема 4. Главные оси инерции для точки O, расположенной на главной центральной оси инерции, параллельны главным центральным осям инерции (рис. 33).

Выберем в точке O главной центральной оси инерции Cz систему декартовых осей координат $Ox'y'z'$, взаимно параллельных главным центральным осям инерции $Cxyz$. Тогда координаты точки тела M_k в двух системах осей координат будут связаны между собой формулами параллельного переноса осей

$$x_k'=x_k;\quad y_k'=y_k;\quad z_k'=z_k-h,$$

где $h=OC$. Используя эти формулы, вычисляем центробежные моменты инерции $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$ и $J_{x'y'}$. Имеем

$$J_{y'z'}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k' z_k'=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k-h\sum_{k=1}^{N} m_k y_k=J_{yz}-hMy_C,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=J_{yz},\quad \sum_{k=1}^{N} m_k y_k=My_C,$$

где M — масса тела; y_C — координата центра масс относительно системы координат $Cxyz$.

Аналогично получаем

$$J_{z'x'}=J_{zx}-hMx_C;\quad J_{x'y'}=J_{xy}.$$

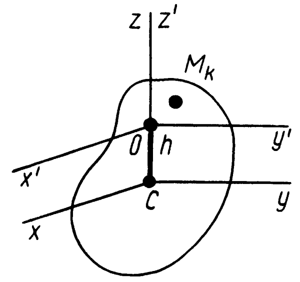


Рис. 33

Если C — центр масс системы, то $x_C=0$ и $y_C=0$. Для главных центральных осей инерции центробежные моменты инерции равны нулю, т. е.

$$J_{yz}=0;\quad J_{zx}=0;\quad J_{xy}=0.$$

Используя полученные формулы при этих условиях, имеем:

$$J_{y'z'}=0;\quad J_{z'x'}=0;\quad J_{x'y'}=0.$$

Следовательно, оси Ox', Oy', Oz' есть главные оси инерции для произвольной точки O, расположенной на главной центральной оси инерции Cz. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы в качестве следствия получаем: *главная центральная ось инерции является главной осью инерции для всех своих точек*. Действительно, главная ось инерции Oz' для точки O, лежащей на главной центральной оси инерции Cz, совпадает с этой осью. Главная ось инерции таким свойством не обладает. Главные оси инерции для точки O_1, расположенной на главной оси инерции точки O, не параллельны главным осям инерции для этой точки. Они в общем случае повернуты относительно этих осей.

§ 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И НАПРАВЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ

Пусть известны компоненты тензора инерции в точке O относительно осей координат $Oxyz$. Для определения направления главных осей инерции в точке O используем уравнение эллипсоида инерции относительно этих осей

$$\varphi(x, y, z)=J_x x^2+J_y y^2+J_z z^2-$$
$$-2J_{yz}yz-2J_{zx}zx-2J_{xy}xy-1=0. \qquad (27'')$$

Если оси координат $Ox'y'z'$ являются главными осями инерции, то радиус-вектор $\bar{r}$ точки M эллипсоида инерции, расположенной на главной оси инерции, например оси Oz' (рис. 34), направлен по нормали к эллипсоиду, т. е. параллельно вектору $\operatorname{grad}\varphi$, который, согласно его определению, вычисляется по формуле

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}.$$

Параллельные векторы отличаются друг от друга скалярным множителем, который обозначим $2J$. Тогда для параллельных векторов $\bar{r}$ и $\operatorname{grad}\varphi$ и их проекций на оси координат имеем:

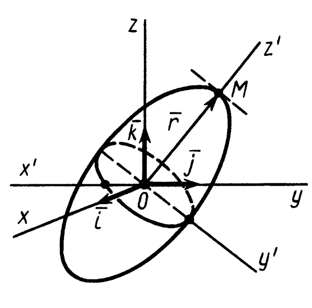


Рис. 34

$$2J\cdot\bar{r}=\operatorname{grad}\varphi; \qquad (28)$$

$$2J\cdot x=\partial\varphi/\partial x;\quad 2J\cdot y=\partial\varphi/\partial y;$$
$$2J\cdot z=\partial\varphi/\partial z. \qquad (28')$$

В этих уравнениях x, y, z являются координатами точки конца вектора $\bar{r}$, проведенного из точки O вдоль какой-либо главной оси инерции для этой точки.

Для частных производных из (27″) получаем:

$$\partial\varphi/\partial x = 2J_x \cdot x - 2J_{xy} \cdot y - 2J_{xz} \cdot z;$$
$$\partial\varphi/\partial y = -2J_{xy} \cdot x + 2J_y \cdot y - 2J_{yz} \cdot z;$$
$$\partial\varphi/\partial z = -2J_{zx} \cdot x - 2J_{yz} \cdot y + 2J_z \cdot z.$$

Подставляя их значения в (28′) и перенося все слагаемые в левую часть, после объединения и сокращения на общий множитель получим следующую систему уравнений для определения координат x, y, z точки M, находящейся на главной оси инерции:

$$\left.\begin{aligned} &(J_x - J) \cdot x - J_{xy} \cdot y - J_{xz} \cdot z = 0; \\ &-J_{yx} \cdot x + (J_y - J) \cdot y - J_{yz} \cdot z = 0; \\ &-J_{zx} \cdot x + J_{zy} \cdot y + (J_z - J) \cdot z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Так как (29) является однородной системой линейных уравнений, то отличные от нуля решения для координат x, y, z получаются только при условии, что определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} J_x - J & -J_{zy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y - J & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z - J \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Это кубическое уравнение для определения J называется *уравнением собственных значений тензора инерции.*

В общем случае имеется три различных действительных корня кубического уравнения J_1, J_2, J_3, которые являются главными моментами инерции. Действительно, если ось Ox совпадает с главной осью инерции, то для точки M эллипсоида инерции, расположенной на этой оси, $y = 0$ и $z = 0$. Первое уравнение (29) принимает вид

$$(J_x - J) \cdot x = 0.$$

Так как $x \neq 0$, то $J_x - J = 0$ и $J_x = J$, которое следует обозначить J_1. Аналогично можно получить $J_y = J = J_2$, $J_z = J = J_3$, если оси Oy и Oz — главные оси инерции.

Подставляя в (29) $J = J_1$, получим только два независимых уравнения для определения координат точки x, y, z эллипсоида инерции, соответствующих главной оси инерции, для которой главный момент инерции есть J_1. Третье уравнение системы будет следствием двух других уравнений, так как определитель этой системы равен нулю. Из (29) можно найти только две величины, например x/z и y/z. Они определят направление вектора $\bar{r}_1$ вдоль главной оси инерции, момент инерции относительно которой есть J_1. Модуль радиуса-вектора $\bar{r}_1$ остается неопределенным. Аналогично определяются направления векторов $\bar{r}_2$ и $\bar{r}_3$ вдоль двух других главных осей инерции, для которых главные моменты инерции равны J_2 и J_3. Можно доказать, что векторы $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, направленные вдоль главных осей инерции, взаимно перпендикулярны.

Таким образом, если известен тензор инерции для осей $Oxyz$, то можно определить как направление главных осей инерции, так и главные моменты инерции. Для главных осей инерции тензор инерции (25) принимает форму

$$(J)=\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}. \tag{25'}$$

§ 9. ВЫРАЖЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ЧЕРЕЗ ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Определим компоненты тензора инерции в точке O относительно осей координат $Oxyz$, если в этой точке известны главные моменты инерции относительно главных осей инерции $Ox'y'z'$, т. е. $J_1=J_{x'}$, $J_2=J_{y'}$, $J_3=J_{z'}$. Предположим, что ориентация осей координат $Oxyz$ относительно главных осей инерции $Ox'y'z'$ задана таблицей углов:

	Ox'; $\bar{i}'$	Oy'; $\bar{j}'$	Oz'; $\bar{k}'$
Ox; $\bar{i}$	α_1	β_1	γ_1
Oy; $\bar{j}$	α_2	β_2	γ_2
Oz; $\bar{k}$	α_3	β_3	γ_3

Осевые моменты инерции относительно осей Ox, Oy, Oz через главные моменты инерции определяются по формуле (24′). Принимая последовательно за ось Ol оси координат Ox, Oy, Oz, получим

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_{x'}\cos^2\alpha_1 + J_{y'}\cos^2\beta_1 + J_{z'}\cos^2\gamma_1; \\ J_y &= J_{x'}\cos^2\alpha_2 + J_{y'}\cos^2\beta_2 + J_{z'}\cos^2\gamma_2; \\ J_z &= J_{x'}\cos^2\alpha_3 + J_{y'}\cos^2\beta_3 + J_{z'}\cos^2\gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Для выражения центробежных моментов инерции через главные моменты инерции используем формулы преобразования координат точек тела при повороте осей координат вокруг точки O (рис. 35). Эти формулы получим проецированием на оси $Oxyz$ радиуса-вектора $\bar{r}_k$ точки M_k, разложенного предварительно на составляющие, параллельные осям двух систем осей координат в точке O. Имеем

$$\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k} = x'_k\bar{i}' + y'_k\bar{j}' + z'_k\bar{k}', \tag{32}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k относительно системы осей координат $Oxyz$, а x'_k, y'_k, z'_k — относительно $Ox'y'z'$. Проецирование вектора на какую-либо ось прямоугольной системы координат эквивалентно скалярному умножению этого вектора на единичный вектор оси. Умножая обе части (32) последовательно на единичные векторы осей координат $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и учитывая таблицу углов для осей, получим

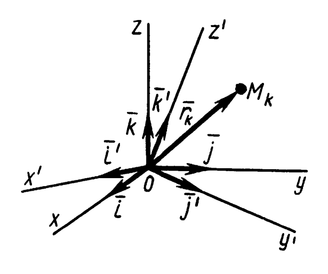


Рис. 35

$$\left.\begin{aligned}
x_k &= \bar{r}_k \cdot \bar{i} = (x'_k \bar{i}' + y'_k \bar{j}' + z'_k \bar{k}')\bar{i} = \\
&= x'_k \cos\alpha_1 + y'_k \cos\beta_1 + z'_k \cos\gamma_1; \\
y_k &= \bar{r}_k \cdot \bar{j} = (x'_k \bar{i}' + y'_k \bar{j}' + z'_k \bar{k}')\bar{j} = \\
&= x'_k \cos\alpha_2 + y'_k \cos\beta_2 + z'_k \cos\gamma_2; \\
z_k &= \bar{r}_k \cdot \bar{k} = (x'_k \bar{i}' + y'_k \bar{j}' + z'_k \bar{k}')\bar{k} = \\
&= x'_k \cos\alpha_3 + y'_k \cos\beta_3 + z'_k \cos\gamma_3;
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Используя (33) для центробежного момента инерции J_{xy}, имеем

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k = \left(\sum_{k=1}^{N} m_k x'^2_k\right)\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 +$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{N} m_k y'^2_k\right)\cos\beta_1 \cos\beta_2 + \left(\sum_{k=1}^{N} m_k z'^2_k\right)\cos\gamma_1 \cos\gamma_2, \qquad (34)$$

так как центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю, т. е.

$$J_{x'y'} = \sum_{k=1}^{N} m_k x'_k y'_k = 0; \quad J_{y'z'} = \sum_{k=1}^{N} m_k y'_k z'_k = 0; \quad J_{z'x'} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} m_k z'_k x'_k = 0.$$

Оси координат Ox и Oy взаимно перпендикулярны, поэтому косинусы их углов удовлетворяют условию

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0,$$

или

$$\cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = -(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2).$$

Используя это соотношение для исключения величины $\cos\gamma_1 \cos\gamma_2$ и добавляя в первом слагаемом (34) под знаком суммы $(y'^2_k - y'^2_k) = 0$, а во втором $(x'^2_k - x'^2_k) = 0$, после объединения слагаемых с одинаковыми произведениями косинусов получим

$$J_{xy}=\left[\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k'^2+y_k'^2)-\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k'^2+z_k'^2)\right]\cos\alpha_1\cos\alpha_2+$$
$$+\left[\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k'^2+y_k'^2)-\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k'^2+z_k'^2)\right]\cos\beta_1\cos\beta_2=$$
$$=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_1\cos\alpha_2+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_1\cos\beta_2,$$

где $\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k'^2+y_k'^2)=J_{z'}$; $\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k'^2+z_k'^2)=J_{x'}$; $\sum_{k=1}^{N} m_k(z_k'^2+x_k'^2)=J_{y'}$

— главные моменты инерции. Аналогично получаются выражения для J_{yz} и J_{zx}. Итак имеем

$$\left.\begin{aligned} J_{xy}&=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_1\cos\alpha_2+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_1\cos\beta_2;\\ J_{yz}&=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_2\cos\alpha_3+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_2\cos\beta_3;\\ J_{zx}&=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_3\cos\alpha_1+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_3\cos\beta_1.\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Формулы (31) и (35) дают выражения всех компонентов тензора инерции для осей координат $Oxyz$ через главные моменты инерции, если известны углы этих осей с главными осями инерции. В приложениях встречаются частные случаи, когда одна из осей координат $Oxyz$ совпадает с главной осью инерции.

Если ось Ox сопадает с главной осью инерции Ox' (рис. 36), то $J_{xy}=J_{x'y}=0$; $J_{zx}=J_{zx'}=0$. Это же можно получить из (35). Необходимые для вычисления углы соответственно равны:

$$\alpha_2=90°,\ \alpha_3=90°,\ \beta_2=\alpha,\ \beta_3=90°-\alpha.$$

Из (35) имеем

$$J_{yz}=(J_{z'}-J_{y'})\cos\alpha\sin\alpha=\frac{J_{z'}-J_{y'}}{2}\sin 2\alpha. \quad (35')$$

В формуле (35′) с полюсом следует брать главный момент инерции с индексом той оси, на положительное направление которой указывает дуговая стрелка поворота осей Oyz на угол $\alpha<90°$ до совпадения с осями $Oy'z'$. В рассматриваемом случае поворот осей Oyz вокруг Ox до совпадения с главными осями производится от оси Oy к оси Oz; следовательно, с плюсом следует взять главный момент инерции J_z' и с минусом — J_y'.

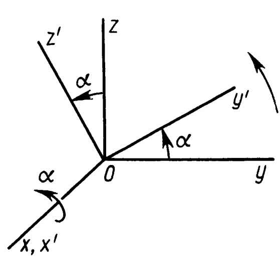


Рис. 36

Если оси расположены, как показано на рис. 37, то дуговая стрелка поворота осей Oyz до совпадения с

главными осями инерции $Oy'z'$ на угол $\alpha < 90°$ направлена к отрицательному направлению оси Oz. Поэтому в (35′) $J_{z'}$ следует взять со знаком минус, а $J_{y'}$ — со знаком плюс, в чем нетрудно убедиться, используя (35) и таблицу углов. Имеем:

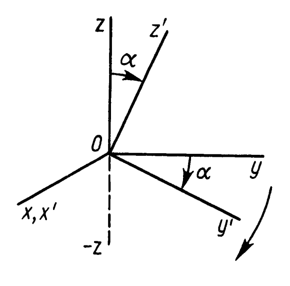


Рис. 37

$$\alpha_2 = 90°;\ \alpha_3 = 90°;\ \beta_2 = \alpha;\ \beta_3 = 90° + \alpha;$$

$$J_{yz} = (J_{z'} - J_{y'})\cos\alpha(-\sin\alpha) =$$

$$= (J_{y'} - J_{z'})\cos\alpha\sin\alpha = \frac{J_{y'} - J_{z'}}{2}\sin 2\alpha.$$

Аналогично при совпадении осей Oy с Oy' и повороте осей Oxz вокруг Oy до совпадения с осями $Ox'z'$ на угол $\beta < 90°$ от Oz к Ox в направлении против часовой стрелки имеем:

$$J_{xy} = J_{xy'} = 0;\ J_{yz} = J_{y'z} = 0;\ J_{zx} = \frac{J_{x'} - J_{z'}}{2}\sin 2\beta.$$

При совпадении осей Oz и Oz' и повороте осей вокруг Oz на угол $\gamma < 90°$ от Ox к Oy против часовой стрелки получим:

$$J_{xz} = J_{xz'} = 0;\ J_{yz} = J_{yz'} = 0;\ J_{xy} = \frac{J_{y'} - J_{x'}}{2}\sin 2\gamma.$$

ГЛАВА 4

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВНУТРЕННИХ СИЛ СИСТЕМЫ

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Внешними силами механической системы называются силы, с которыми действуют на точки системы тела и точки, не входящие в рассматриваемую систему.

Внутренними силами механической системы называют силы взаимодействия между точками рассматриваемой системы.

Внешнюю силу, приложенную к какой-либо точке системы, обозначим $\bar{F}_k^{(e)}$, а внутреннюю — $\bar{F}_k^{(i)}$. Заметим, что внутренние и внешние силы могут включать в себя как активные силы, так и силы реакций связей.

Рассмотрим некоторые простейшие свойства внутренних сил, действующих на всю механическую систему в любом ее состоянии. Докажем, что *главный вектор всех внутренних сил системы и главный момент этих сил относительно произвольной точки равны нулю при любом состоянии системы*, т. е. при

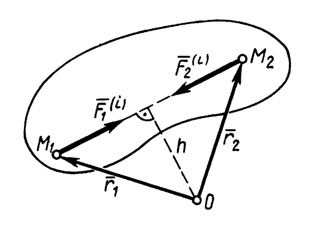


Рис. 38

ее равновесии и при произвольном движении.

Пусть система состоит из N точек, где N — любое конечное число (рис. 38). Условимся пределы у суммы не ставить, когда суммирование производится по всем N точкам системы. Если рассмотреть какие-либо две произвольные точки системы, например M_1 и M_2, то для них $\bar{F}_1^{(i)}+\bar{F}_2^{(i)}=0$, так как силы действия и противодействия всегда равны друг другу по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой линии, соединяющей взаимодействующие точки. Главный вектор внутренних сил $\bar{R}^{(i)}$ состоит из векторной суммы таких сил действия и противодействия, так как вся система состоит из пар взаимодействующих точек. Следовательно,

$$\bar{R}^{(i)}=\sum \bar{F}_k^{(i)}=0. \qquad (1)$$

В проекциях на координатные оси

$$R_x^{(i)}=\sum F_{kx}^{(i)}=0; \quad R_y^{(i)}=\sum F_{ky}^{(i)}=0; \quad R_z^{(i)}=\sum F_{kz}^{(i)}=0. \qquad (1')$$

Внешние силы тоже являются силами взаимодействия, но для них силы действия приложены к точкам рассматриваемой системы, а силы противодействия приложены к телам и точкам, не входящим в эту систему.

Рассмотрим теперь сумму моментов сил $\bar{F}_1^{(i)}$ и $\bar{F}_2^{(i)}$ относительно точки O. Легко видеть, что

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1^{(i)})+\bar{M}_O(\bar{F}_2^{(i)})=0,$$

так как обе силы имеют одинаковые плечи и противоположные направления векторных моментов. Главный момент внутренних сил $\bar{L}_O^{(i)}$ относительно точки O состоит из векторной суммы таких выражений, равных нулю. Следовательно,

$$\bar{L}_O^{(i)}=\sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(i)})=\sum \bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(i)}=0 \qquad (2)$$

и соответственно в проекциях на координатные оси

$$L_x^{(i)}=\sum M_x(\bar{F}_k^{(i)})=0; \quad L_y^{(i)}=\sum M_y(\bar{F}_k^{(i)})=0;$$
$$L_z^{(i)}=\sum M_z(\bar{F}_k^{(i)})=0. \qquad (2')$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Пусть даны внешние и внутренние силы, действующие на систему, состоящую из N точек (рис. 39). Если к каждой точке системы приложить равнодействующую силу внешних сил $\bar{F}_k^{(e)}$ и равнодействующую силу всех внутренних сил $\bar{F}_k^{(i)}$, то для любой k-й точки системы можно составить дифференциальное уравнение движения, например, в векторной форме, т. е.

$$m_k\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}=\bar{F}_k^{(e)}+\bar{F}_k^{(i)} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \qquad (3)$$

Систему N дифференциальных уравнений (3) называют *дифференциальными уравнениями движения механической системы в векторной форме*. Если спроецировать векторные дифференциальные уравнения (3) на прямоугольные декартовы оси координат, то получим систему $3N$ дифференциальных уравнений, описывающих движение точек механической системы.

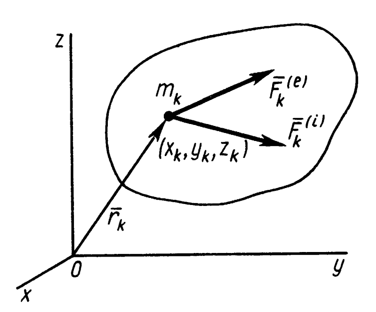


Рис. 39

Для нахождения движения механической системы по заданным силам и начальным условиям для каждой точки системы нужно проинтегрировать, следовательно, систему $3N$ дифференциальных уравнений. Эту задачу не удается точно решить в общем случае даже для одной точки. Она исключительно трудна в случае двух материальных точек, которые движутся только под действием сил взаимодействия по закону всемирного притяжения (задача о двух телах) и совершенно неразрешима в случае трех взаимодействующих точек (задача о трех телах).

Задача интегрирования дифференциальных уравнений механической системы еще сложнее, если на механическую систему наложены связи, силы реакций которых заранее не известны и должны быть дополнительно определены по заданным силам и связям аналогично случаю движения несвободной материальной точки по поверхности и кривой линии.

В некоторых случаях из дифференциальных уравнений движения системы можно получить первые интегралы, т. е. соотношения, в которые не входят производные второго порядка от координат по времени.

Если известны первые интегралы, то задача интегрирования системы дифференциальных уравнений облегчается. Хотя отдельные первые интегралы и не могут полностью описать движения всех точек системы, однако они иногда характеризуют важные стороны движения системы в целом.

Первые интегралы системы дифференциальных уравнений удобно получать из так называемых общих теорем динамики, когда выполняются некоторые дополнительные условия для действующих сил. Кроме того, общие теоремы динамики, даже когда по ним нельзя определить первые интегралы, дают ценную информацию о движении точки или системы. В некоторых задачах, где не требуется полного знания движения системы, эти сведения могут оказаться достаточными.

Общие теоремы динамики являются следствиями системы дифференциальных уравнений движения точки или соответственно системы точек.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Количество движения точки и системы

Одной из мер движения точки или системы является количество их движения.

Количеством движения материальной точки $\bar{q}$ называют вектор, равный произведению массы точки m на ее скорость $\bar{v}$, т. е.

$$\bar{q}=m\bar{v}. \tag{4}$$

Количество движения точки в физике часто называют *импульсом материальной точки.*

Проекции количества движения точки на прямоугольные декартовы оси координат:

$$q_x=mv_x=m\dot{x}; \quad q_y=mv_y=m\dot{y}; \quad q_z=mv_z=m\dot{z}. \tag{4'}$$

Размерность количества движений в СИ — кг · м/с или Н · с.

Количеством движения системы $\bar{Q}$ называют векторную сумму количеств движений отдельных точек систем, т. е.

$$\bar{Q}=\sum m_k\bar{v}_k, \tag{5}$$

и, следовательно, проекции количества движения системы на прямоугольные декартовы оси координат

$$Q_x=\sum m_k v_{kx}; \quad Q_y=\sum m_k v_{ky}; \quad Q_z=\sum m_k v_{kz}. \tag{5'}$$

Вектор количества движения системы $\bar{Q}$ в отличие от вектора количества движения точки $\bar{q}$ не имеет точки приложения. Вектор количества движения точки считается приложенным в самой движущейся материальной точке, а вектор $\bar{Q}$ является свободным вектором.

Вычисление количества движения системы

Количество движения системы можно выразить через массу системы M и скорость центра масс $\bar{v}_C$:

$$\bar{Q}=M\bar{v}_C. \tag{6}$$

В проекциях на прямоугольные декартовы оси соответственно

$$Q_x=Mv_{Cx}=M\dot{x}_C; \quad Q_y=Mv_{Cy}=M\dot{y}_C; \quad Q_z=Mv_{Cz}=M\dot{z}_C, \tag{6'}$$

где x_C, y_C, z_C — координаты центра масс системы.

Выведем формулу (6):

$$\bar{Q}=\sum m_k\bar{v}_k=\sum m_k\frac{d\bar{r}_k}{dt}=\frac{d}{dt}\sum m_k\bar{r}_k, \tag{7}$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор k-й точки системы (рис. 40).

По формуле для радиуса-вектора центра масс,

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C. \qquad (8)$$

Подставляя значение статического момента массы (8) в (7), имеем

$$\bar{Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(M\bar{r}_C) = M\frac{\mathrm{d}r_C}{\mathrm{d}t} = M\bar{v}_C,$$

так как масса системы M не изменяется при движении системы.

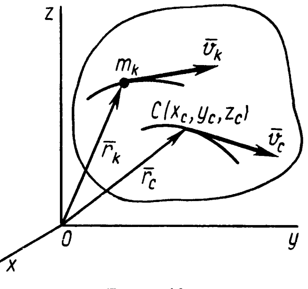


Рис. 40

Элементарный и полный импульсы силы

Действие силы $\bar{F}$ на материальную точку в течение времени $\mathrm{d}t$ можно охарактеризовать так называемым *элементарным импульсом силы* $\bar{F}\mathrm{d}t$. *Полный импульс силы* $\bar{F}$ за время t, или импульс силы $\bar{S}$, определяют по формуле

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F}\mathrm{d}t. \qquad (9)$$

Проекции импульса силы на прямоугольные оси координат выражаются формулами

$$S_x = \int_0^t F_x \mathrm{d}t; \quad S_y = \int_0^t F_y \mathrm{d}t; \quad S_z = \int_0^t F_z \mathrm{d}t. \qquad (9')$$

Единица импульса силы — Н · с.

Теорема об изменении количества движения точки

Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы $\bar{F}$ можно представить в следующей векторной форме:

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \bar{F}.$$

Так как масса точки m принята постоянной, то ее можно внести под знак производной. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{v}) = \bar{F}. \qquad (10)$$

Формула (10) выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *первая производная по времени от количества движения точки равна действующей на точку силе.*

В проекциях на координатные оси (10) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_x) = F_x; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_y) = F_y; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_z) = F_z. \qquad (10')$$

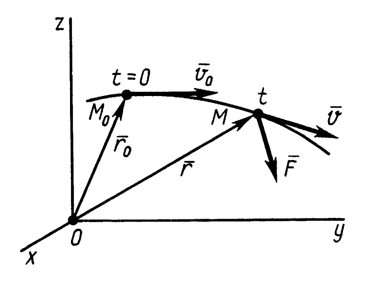


Рис. 41

Если обе части (10) умножить на dt, то получим другую форму этой же теоремы — теорему импульсов в дифференциальной форме:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F} dt, \qquad (11)$$

т. е. *дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку.*

Проецируя обе части (11) на координатные оси, получаем

$$\left.\begin{aligned} d(mv_x) &= F_x dt; \\ d(mv_y) &= F_y dt; \\ d(mv_z) &= F_z dt. \end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

Интегрируя обе части (11) в пределах от нуля до t (рис. 41), имеем

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}, \qquad (12)$$

где $\bar{v}$ — скорость точки в момент t; $\bar{v}_0$ — скорость при $t=0$; $\bar{S}$ — импульс силы за время t.

Выражение в форме (12) часто называют теоремой импульсов в конечной (или интегральной) форме: *изменение количества движения точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за тот же промежуток времени.* В проекциях на координатные оси эту теорему можно представить в следующем виде:

$$mv_x - mv_{0x} = S_x; \quad mv_y - mv_{0y} = S_y; \quad mv_z - mv_{0z} = S_z. \qquad (12')$$

Для материальной точки теорема об изменении количества движения в любой из форм, по существу, не отличается от дифференциальных уравнений движения точки.

Теорема об изменении количества движения системы

Аналогично тому, как для одной материальной точки, выведем теорему об изменении количества движения для системы в различных формах. Пусть к точкам системы приложены внешняя и внутренняя силы. Тогда для каждой точки можно применить теорему об изменении количества движения, например в форме (10) (см. рис. 40):

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{v}_k) = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Суммируя по всем точкам системы правые и левые части этих соотношений и учитывая, что сумма производных равна производной от суммы, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\bar{v}_k=\sum \bar{F}_k^{(e)}+\sum \bar{F}_k^{(i)}.$$

Так как, по свойству внутренних сил и определению количества движения системы,

$$\sum \bar{F}_k^{(i)}=0; \quad \sum m_k\bar{v}_k=\bar{Q},$$

то приведенное соотношение можно представить в виде

$$d\bar{Q}/dt=\sum \bar{F}_k^{(e)}. \tag{13}$$

Выражение (13) является теоремой об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.* В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат

$$dQ_x/dt=\sum F_{kx}^{(e)}; \quad dQ_y/dt=\sum F_{ky}^{(e)}; \quad dQ_z/dt=\sum F_{kz}^{(e)}, \tag{13'}$$

т. е. *производная по времени от проекции количества движения системы на какую-либо координатную ось равна сумме проекций всех внешних сил системы на ту же ось.*

Умножая обе части (13) на dt, получаем теорему импульсов для системы в дифференциальной форме:

$$d\bar{Q}=\sum \bar{F}_k^{(e)}dt, \tag{14}$$

т. е. *дифференциал количества движения системы равен векторной сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему.* В проекциях на координатные оси эта теорема примет вид

$$dQ_x=\sum F_{kx}^{(e)}dt; \quad dQ_y=\sum F_{ky}^{(e)}dt; \quad dQ_z=\sum F_{kz}^{(e)}dt. \tag{14'}$$

Вычисляя интегралы от обеих частей (14) по времени от нуля до t, получаем теорему импульсов для системы в конечной или интегральной форме:

$$\bar{Q}-\bar{Q}_0=\sum \bar{S}_k^{(e)}, \tag{15}$$

где $\bar{Q}_0$ — количество движения системы в момент $t=0$; $\bar{Q}$ — количество движения в момент t; $\bar{S}_k^{(e)}$ — импульс внешней силы, действующей на k-ю точку за время t; $\bar{S}_k^{(e)}=\int_0^t \bar{F}_k^{(e)}dt$.

Теорема импульсов для системы в конечной форме формулируется так: *изменение количества движения системы за какое-либо время равно векторной сумме всех импульсов внешних сил, действующих на систему за то же время.*

В проекциях на прямоугольные оси согласно (15) имеем:

$$Q_x-Q_{0x}=\sum S_{kx}^{(e)}; \quad Q_y-Q_{0y}=\sum S_{ky}^{(e)}; \quad Q_z-Q_{0z}=\sum S_{kz}^{(e)}. \tag{15'}$$

Внутренние силы системы не входят явно в теорему об изменении количества движения системы в любой из форм и, следовательно, не влияют непосредственно на изменение

количества движения системы. Они могут влиять на изменение количества движения только неявно через внешние силы.

Из теоремы об изменении количества движения для точки и системы при некоторых условиях для внешних сил можно получить так называемые первые интегралы системы дифференциальных уравнений точки и системы. Эти первые интегралы называют законами сохранения количества движения или проекции количества движения на ось. Рассмотрим эти законы сохранения для точки и системы одновременно, считая материальную точку механической системой, состоящей из одной точки.

Законы сохранения количества движения

Законы сохранения количества движения системы получаются как частные случаи теоремы об изменении количества движения для системы в зависимости от особенностей системы внешних сил, приложенных к рассматриваемой механической системе, а для одной точки — от особенностей сил, действующих на точку. Внутренние силы при этом могут быть любыми, так как они явно не влияют на изменение количества движения системы.

Возможны два частных случая.

1. Если векторная сумма всех внешних сил, приложенных к системе, равна нулю, т. е. $\sum \bar{F}_k^{(e)}=0$, то из теоремы об изменении количества движения системы, например в форме (13), следует, что

$$\bar{Q}=\overrightarrow{\text{const}}. \tag{16}$$

Этот закон (точнее, частный случай теоремы) формулируется так: *если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то количество движения системы постоянно по величине и направлению*. В проекциях на координатные оси, по этому закону,

$$Q_x=C_1;\quad Q_y=C_2;\quad Q_z=C_3, \tag{16'}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные величины.

В соотношения (16) и (16′) входят производные от координат точек по времени не выше первого порядка и не входят вторые производные от этих координат. Следовательно, эти соотношения являются первыми интегралами дифференциальных уравнений системы (3).

2. Если равна нулю проекция главного вектора внешних сил на какую-либо координатную ось Ox, т. е. $\sum F_{kx}^{(e)}=0$, то из (13′) имеем

$$Q_x=\text{const}. \tag{17}$$

Выражение (17) является законом сохранения проекции количества движения системы: *если проекция главного вектора всех внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то*

проекция количества движения на ту же ось является постоянной величиной.

Применим закон сохранения количества движения системы для объяснения принципа реактивного движения. Пусть, например, система состоит из двух сочлененных твердых тел, находящихся в покое и свободных от действия внешних сил. Тогда для рассматриваемой системы количество движения все время постоянно и равно нулю. Допустим, что при взрыве пиропатрона (действие внутренних сил) первому телу массой M_1 сообщена скорость $\bar{v}_1$. Тогда скорость второго тела массой M_2 определится из закона сохранения количества движения:

$$\bar{Q} = M_1\bar{v}_1 + M_2\bar{v}_2 = \overrightarrow{\text{const}} = 0$$

Следовательно,

$$\bar{v}_2 = -\frac{M_1}{M_2}\bar{v}_1,$$

т. е. второе тело движется в сторону, противоположную первому телу. Если его движению препятствует какая-либо связь, то рассматриваемое тело давит на эту связь с некоторой силой по направлению скорости $\bar{v}_2$. Эту силу называют *реактивной.* В реактивных двигателях она создается за счет истечения газа с большой скоростью (около 2...2,5 км/с) из сопла двигателя.

Теорему об изменении количества движения в той или другой форме удобно применять для решения задач именно в рассмотренных частных случаях, хотя в некоторых случаях ее применяют и в общем случае. Отметим, что внутренние силы не влияют на изменение количества движения в изолированных системах, т. е. в системах, которые не соприкасаются с другими телами, не принадлежащими к рассматриваемой системе, или окружающей систему материальной средой.

В неизолированных механических системах внутренние силы, вызывая движение отдельных частей системы вследствие взаимодействия с внешними телами или окружающей материальной средой, могут вызвать внешние силы в виде сил реакций связей или изменения активных сил, которые могут изменить количество движения системы.

Количество движения системы может зависеть от внутренних сил только неявно, через внешние силы.

Пример. Через изогнутую под прямым углом трубу постоянного сечения за 1 с протекает жидкость массой m (рис. 42). Скорость течения жидкости v постоянна, т. е. одна и та же у всех частиц жидкости. Определить силу, с которой жидкость давит на участок трубы вследствие поворота потока на прямой угол.

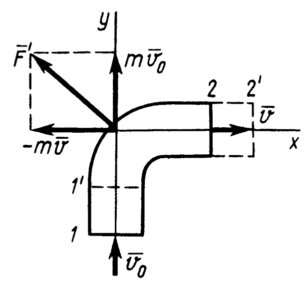


Рис. 42

Решение. Применим к объему жидкости, заключенному между стенками трубы и попереч-

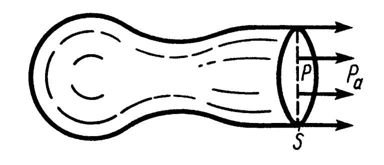


Рис. 43

ными сечениями *1* и *2*, теорему об изменении количества движения в форме теоремы импульсов за промежуток времени, равный 1 с. За секунду точки жидкости из сечения *1* сместятся на расстояние $v \cdot 1$ и займут положение *1'*, а точки жидкости из сечения *2* займут положение *2'*. По теореме импульсов для выделенного объема жидкости имеем

$$\bar{Q}-\bar{Q}_0=\int_0^1 \bar{F}\,\mathrm{d}t; \quad \int_0^1 \bar{F}\,\mathrm{d}t=\bar{F}\cdot 1, \tag{a}$$

где $\bar{Q}_0$ — количество движения жидкости, заключенной между сечениями *1* и *2*; $\bar{Q}$ — количество движения жидкости, заключенной между сечениями *1'* и *2'*; $\bar{F}$ — главный вектор распределенных сил, с которыми стенки трубы действуют на выделенный объем жидкости.

Так как в общей части объема жидкости количества движения, входящие в $\bar{Q}$ и $\bar{Q}_0$, взаимно уничтожаются при их вычитании, то из (а) получаем

$$\bar{F}=\bar{Q}-\bar{Q}_0; \quad \bar{F}=m\bar{v}-m\bar{v}_0.$$

Сила давления жидкости $\bar{F}'$ на стенки трубы по закону о равенстве действия и противодействия выразится в виде

$$\bar{F}'=-\bar{F}=m\bar{v}_0-m\bar{v}. \tag{б}$$

Проецируя (б) на оси координат, получаем

$$F'_x=-mv; \quad F'_y=mv_0=mv,$$

так как $v=v_0$. После этого

$$F'=\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2}=mv\cdot\sqrt{2}.$$

Направление силы давления жидкости $\bar{F}'$ указано на рисунке.

Если бы через сечение *1* жидкость не поступала, а образовывалась внутри трубы, как в реактивном двигателе образуются газы после сгорания топлива, а через сечение *2* она выходила (рис. 43), то сила $\bar{F}'$, согласно (б), имела бы значение $\bar{F}'=-m\bar{v}$.

Эта сила $\bar{F}'$ является частью реактивной силы двигателя вследствие выброса продуктов сгорания из двигателя, являющегося источником газа. Другая часть реактивной силы двигателя, равная $(p-p_a)S$, получается за счет разности давлений p, в струе выходящего из сопла газа и давления в среде p_a, куда выходит из двигателя газ. Здесь S — площадь выходного сечения сопла.

Полная реактивная сила двигателя

$$R=mv+(p-p_a)S.$$

По направлению реактивная сила $\bar{R}$ всегда противоположна скорости $\bar{v}$ выходящего из двигателя газа. Для получения большой скорости выходящего газа сопло двигателя следует расширять по направлению к выходному его сечению при сверхзвуковых скоростях истечения газа.

Теорема о движении центра масс системы

Следствием теоремы об изменении количества движения системы является теорема о движении центра масс системы.

По теореме об изменении количества движения системы (13),

$$\mathrm{d}\bar{Q}/\mathrm{d}t=\sum \bar{F}_k^{(e)}.$$

Но количество движения системы можно вычислить по формуле (6):

$$\bar{Q}=M\bar{v}_C,$$

где $\bar{v}_C$ — скорость центра масс; M — масса системы.

Подставляя (6) в (13) и учитывая, что масса системы постоянна, получаем теорему о движении центра масс в векторной форме:

$$M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)},$$

или

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^{(e)}, \qquad (18)$$

где $\bar{a}_C$ — ускорение центра масс.

Рис. 44

Теорема о движении центра масс формулируется так: *центр масс системы движется так же, как и материальная точка, масса которой равна массе всей системы, если на точку действуют все внешние силы, приложенные к рассматриваемой механической системе.*

Проецируя (18) на прямоугольные декартовы оси координат (рис. 44), получаем дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e; \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e; \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^{(e)}, \end{aligned} \right\} \qquad (18')$$

где x_C, y_C, z_C — координаты центра масс.

Из теоремы о движении центра масс можно получить следствия, аналогичные законам сохранения количества движения и проекции количества движения на ось.

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т. е. $\bar{F}_k^{(e)} = 0$, то из (18) следует, что ускорение центра масс $\bar{a}_C$ равно нулю, а следовательно, скорость центра масс $\bar{v}_C$ является постоянной по модулю и направлению, т. е. центр масс движется прямолинейно и равномерно по инерции или находится в покое. Если, в частности, в начальный момент он находится в покое, то он покоится в течение всего времени, пока главный вектор внешних сил равен нулю.

2. Если проекция, например на ось Ox, главного вектора внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т. е.

$$\sum F_{kx}^{(e)} = 0,$$

то из (18′) следует, что проекция ускорения $\ddot{x}_C$ центра масс на эту ось равна нулю, а следовательно, проекция скорости центра масс является постоянной величиной, т. е. $v_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const}$.

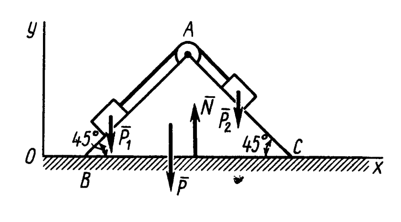


Рис. 45

Если дополнительно в начальный момент $v_{Cx}=0$, то тогда $x_C=\text{const}$, т. е. координата x_C центра масс не изменяется при движении системы.

Внутренние силы не влияют явно на движение центра масс. Они могут влиять только неявно, через внешние силы. Следовательно, одними внутренними силами, без внешних, нельзя вывести из равновесия или изменить движение центра масс системы. Но внутренними силами для неизолированной механической системы можно создать движение отдельных частей системы и, следовательно, взаимодействие с внешними телами, вызывая этим внешние силы реакций связей или изменяя активные силы. Это может изменить движение центра масс или вывести его из равновесия.

Пусть человек стоит на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости вблизи скрепленного с этой плоскостью тела. Так как на человека не действуют внешние силы в горизонтальном направлении, то внутренними силами он не может вывести из равновесия в этом направлении свой центр масс. Но человек может оттолкнуться рукой от препятствия, т. е. внутренними силами вызвать внешнюю силу реакций препятствия и таким образом вызвать движение своего центра масс в горизонтальном направлении. Все, что движется по Земле, летает в воздухе, плавает по воде, совершает это с помощью внутренних сил, создавая внешние силы трения на твердых поверхностях внешних тел, отталкиваясь от воздуха или воды.

Пример 1. Два груза с силами тяжести P_1 и P_2, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок, скользят по боковым граням равнобедренного клина (рис. 45). Клин стороной BC опирается на гладкую горизонтальную плоскость. В начальный момент система находится в покое.

Найти перемещение клина по плоскости при опускании груза P_1 на высоту h. Сила тяжести клина $P=2P_1$ и $P_1=2P_2$. Массой блока и нити пренебречь.

Решение. Внешними силами, действующими на клин вместе с грузами, являются силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}$ и нормальная реакция горизонтальной гладкой поверхности $\bar{N}$. Следовательно,

$$\sum F_{kx}^{(e)}=0.$$

Учитывая, что в начальный момент система находится в покое, на основании второго следствия из теоремы о движении центра масс имеем $x_C=\text{const}$.

Вычислим x_C при $t=0$ и x_C^* в момент, когда груз опустится на высоту h. Для момента $t=0$

$$x_C=\frac{(P_1/g)x_1+(P_2/g)x_2+(P/g)x}{P_1/g+P_2/g+P/g}=\frac{P_1x_1+P_2x_2+Px}{P_1+P_2+P},$$

где x_1, x_2 и x — соответственно координаты центра масс по оси Ox грузов P_1, P_2 и клина.

Пусть вся система вместе с клином переместилась в положительном направлении оси Ox на величину l при опускании груза P_1 на h. Тогда

$$x_C^* = \frac{P_1(x_1+l-h)+P_2(x_2+l-h)+P(x+l)}{P_1+P_2+P},$$

так как грузы вместе с клином передвинутся на l вправо и по клину вдоль отрицательного направления оси Ox на h при заданном угле клина, равном 45°.

Так как $x_C^* - x_C = 0$, то после вычитания получим

$$P_1(l-h)+P_2(l-h)+Pl=0.$$

Отсюда

$$l = \frac{(P_1+P_2)h}{P_1+P_2+P} = \frac{(2P_2+P_2)h}{2P_2+P_2+4P_2} = \frac{3}{7}h.$$

Так как величина l оказалась положительной, то клин действительно перемещается вправо в положительном направлении оси Ox.

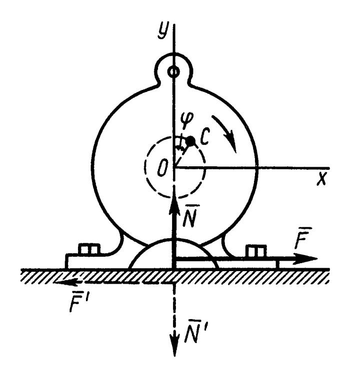


Рис. 46

Пример 2. В электромоторе корпус (статор) имеет силу тяжести $P_1 = 700$ Н, а ротор $P_2 = 300$ Н. Ротор вращается по часовой стрелке с частотой $n = 980$ об/мин (рис. 46). Центр масс ротора вследствие его несимметричности отстоит от оси вращения на расстоянии $l = 5$ см.

Определить горизонтальную силу, с которой действует мотор на болты, крепящие его к фундаменту, и вертикальное давление на пол.

Решение. Предположим, что при $t=0$ центр масс ротора находится на оси Oy. Тогда в момент времени t координаты центра масс ротора можно выразить как

$$x_2 = l\sin\varphi = l\sin\omega t; \qquad y_2 = l\cos\varphi = l\cos\omega t,$$

где $\omega = \pi n/30 = \pi\cdot 980/30 = 98\pi/3$ с$^{-1}$.

Для определения давления мотора на болты и пол рассмотрим в качестве механической системы весь мотор, для которого внешней силой в горизонтальном направлении является только сила действия болтов $\bar{F}$, а в вертикальном направлении — силы тяжести и нормальная реакция пола $\bar{N}$.

Для координат центра масс всего мотора

$$x_C = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}; \qquad y_C = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы корпуса мотора и ротора соответственно; x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты их центров масс.

Центр масс корпуса закрепленного мотора является неподвижной точкой и находится в начале координат. Следовательно, $x_1=0$, $y_1=0$, и поэтому координаты центра масс всего мотора

$$x_C = \frac{m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{P_2x_2}{P_1+P_2}; \qquad y_C = \frac{m_2y_2}{m_1+m_2} = \frac{P_2y_2}{P_1+P_2}.$$

Используя дифференциальные уравнения движения центра масс всего мотора в проекциях на координатные оси, получим

$$\frac{P_1+P_2}{g}\ddot{x}_C = F; \qquad \frac{P_1+P_2}{g}\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2, \tag{a}$$

где $\bar{F}$ — сила действия болтов на корпус мотора в горизонтальном направлении по оси Ox; $\bar{N}$ — нормальная сила реакции пола.

Так как

$$\ddot{x}_C = -\frac{P_2}{P_1+P_2}l\omega^2\sin\omega t; \qquad \ddot{y}_C = -\frac{P_2}{P_1+P_2}l\omega^2\cos\omega t,$$

то из (а) следует

$$F=-\frac{P_2}{g}\,l\omega^2\sin\omega t;\qquad N=-\frac{P_2}{g}\,l\omega^2+(P_1+P_2).$$

Сила действия мотора на болты $\bar{F}'$ и давление $\bar{N}'$ на пол равны

$$\bar{F}'=-\bar{F};\qquad \bar{N}'=-\bar{N}.$$

Наибольшие числовые значения этих сил

$$F'_{max}=\frac{P_2}{g}\,l\omega^2=\frac{300\cdot 5\cdot 98^2\cdot\pi^2}{980\cdot 9}\approx 16\,200\ \text{Н}=16{,}2\ \text{кН};$$

$$N'_{max}=P_1+P_2+\frac{P_2}{g}\,l\omega^2\approx 1000+16\,200=17\,200\ \text{Н}=17{,}2\ \text{кН}.$$

Если болтов нет, то корпус мотора может подпрыгивать в направлении оси Oy. Динамическое условие подпрыгивания в рассматриваемом случае выразится как $N<0$, кинематическое условие подпрыгивания мотора есть $\ddot{y}_1>0$.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

Из теоремы о движении центра масс системы получаются дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Имеем

$$M\bar{a}_C=\Sigma\,\bar{F}_k^{(e)}.$$

Но при поступательном движении твердого тела ускорения всех точек тела одинаковы по модулю и направлению, т. е. $\bar{a}_C=\bar{a}$, где $\bar{a}$ — ускорение произвольной точки тела. Учитывая это, из теоремы о движении центра масс получаем следующее дифференциальное уравнение поступательного движения тела в векторной форме:

$$M\bar{a}=\Sigma\,\bar{F}_k^{(e)}.$$

Проецируя на оси координат, имеем:

$$M\ddot{x}=\Sigma\,F_{kx}^{e};\quad M\ddot{y}=\Sigma\,F_{ky}^{e};\quad M\ddot{z}=\Sigma\,F_{kz}^{e}.$$

Это и есть дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела в проекциях на прямоугольные оси координат. В этих уравнениях x, y, z являются координатами произвольной точки тела, в частности могут быть координатами его центра масс. Тело, совершающее поступательное движение, имеет три степени свободы, и поэтому можно составить три дифференциальных уравнения его движения.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела аналогичны дифференциальным уравнениям движения одной материальной точки. С помощью этих уравнений можно решать такие же задачи, как и для одной точки.

§ 4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Кинетический момент точки и системы

Наряду с количеством движения в качестве векторной меры движения можно использовать *кинетический момент*, или *момент количества движения*. Для материальной точки

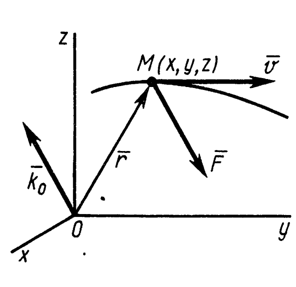


Рис. 47

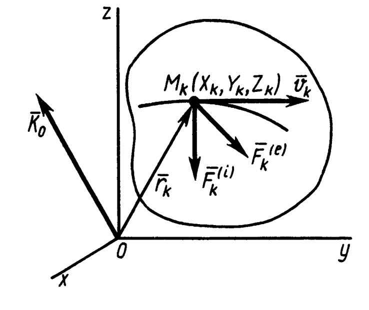


Рис. 48

массой m, движущейся со скоростью $\bar{v}$, кинетическим моментом $\bar{k}_O$ относительно какого-либо центра O называют момент количества движения точки относительно этого центра O (рис. 47), т. е.

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}. \tag{19}$$

Кинетический момент $\bar{k}_O$ приложен к точке O, относительно которой он вычисляется.

Проецируя обе части (19) на прямоугольные декартовы оси, получаем кинетические моменты точки относительно этих осей координат, если точка O является началом осей координат:

$$\left.\begin{aligned} k_x &= M_x(m\bar{v}) = m(yv_z - zv_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \\ k_y &= M_y(m\bar{v}) = m(zv_x - xv_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}). \\ k_z &= M_z(m\bar{v}) = m(xv_y - yv_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}\right\} \tag{19'}$$

В физике кинетический момент точки иногда называют *моментом импульса точки.*

Единица кинетического момента в СИ — кг·м^2/с, или Н·м·с.

Для механической системы кинетическим моментом $\bar{K}_O$ (или главным моментом количества движения системы относительно какой-либо точки O) называют векторную сумму кинетических моментов точек этой системы, взятых относительно точки O (рис. 48), т. е.

$$\bar{K}_O = \Sigma\,\bar{M}_O(m_k\bar{v}_k) = \Sigma\,\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k. \tag{20}$$

Кинетический момент системы $\bar{K}_0$ приложен к точке O, относительно которой он вычисляется.

Если спроецировать (20) на прямоугольные декартовы оси координат, то получим проекции кинетического момента на эти оси, или кинетические моменты относительно осей координат:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \Sigma M_x(m_k\bar{v}_k) = \Sigma m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k); \\ K_y &= \Sigma M_y(m_k\bar{v}_k) = \Sigma m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k); \\ K_z &= \Sigma M_z(m_k\bar{v}_k) = \Sigma m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k). \end{aligned}\right\} \qquad (20')$$

Кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела

Вычислим кинетический момент твердого тела относительно оси вращения, когда тело вращается вокруг этой неподвижной оси с угловой скоростью ω (рис. 49). По определению кинетического момента относительно оси [(см. формулы (20′)] имеем

$$K_z = \Sigma M_z(m_k\bar{v}_k).$$

Но при вращении тела вокруг оси $v_k = h_k\omega$, причем количество движения точки $m_k\bar{v}_k$ перпендикулярно отрезку h_k и лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения Oz. Следовательно, момент количества движения относительно оси Oz для одной точки

$$M_z(m_k\bar{v}_k) = h_k m_k v_k = m_k h_k^2 \omega.$$

Для всего тела

$$K_z = \Sigma m_k h_k^2 \omega = \omega \Sigma m_k h_k^2 = \omega J_z,$$

т. е.

$$K_z = J_z \omega. \qquad (21)$$

Таким образом, *кинетический момент тела относительно оси вращения при вращательном движении равен произведению угловой скорости тела на его момент инерции относительно оси вращения*. Знак кинетического момента относительно оси совпадает со знаком угловой скорости вращения вокруг этой оси: при вращении против часовой стрелки кинетический момент положительный; при вращении по часовой стрелке — отрицательный.

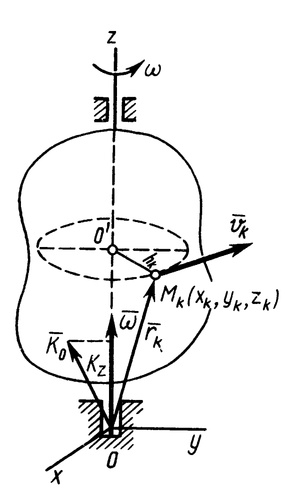


Рис. 49

Дополнительно без вывода приведем формулы для кинетических моментов относительно двух других осей координат Ox и Oy, перпендикулярных оси вращения Oz. Имеем

$$K_x = -J_{xz}\omega; \quad K_y = -J_{yz}\omega,$$

где $J_{xz} = \Sigma m_k x_k z_k$ и $J_{yz} = \Sigma m_k y_k z_k$ — центробежные моменты инерции.

Эти формулы можно получить как частный случай более общих формул для случая вращения твердого тела

вокруг неподвижной точки. Они могут быть получены и непосредственно.

Если ось вращения Oz является главной осью инерции для точки O, то $J_{xz}=J_{yz}=0$ и, следовательно, $K_x=K_y=0$ для этой точки. В этом случае кинетический момент $\bar{K}_O$ относительно точки O направлен по оси вращения. В общем случае $\bar{K}_O$ не направлен по оси вращения, так как имеет не равные нулю проекции K_x и K_y на оси координат, перпендикулярные оси вращения Oz.

Теорема об изменении кинетического момента точки

Для материальной точки основной закон динамики можно представить в виде

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}.$$

Умножая обе части этого соотношения слева векторно на радиус-вектор $\bar{r}$ (см. рис. 48), получаем

$$\bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{r}\times\bar{F}. \tag{22}$$

В правой части этой формулы имеем момент силы относительно неподвижной точки O. Преобразуем левую часть, применив формулу производной от векторного произведения:

$$\bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v})-\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}.$$

Но

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}=\bar{v}\times m\bar{v}=0$$

как векторное произведение параллельных векторов.

После этого из (22) получаем

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v})=\bar{r}\times\bar{F},$$

или

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt}=\bar{M}_O(\bar{F}). \tag{23}$$

Таким образом, *первая производная по времени от кинетического момента точки относительно какого-либо центра равна моменту силы относительно того же центра.*

Это и есть теорема об изменении кинетического момента для точки.

Проецируя (23) на прямоугольные декартовы оси координат, получаем теоремы об изменении кинетического момента точки относительно этих осей координат:

$$dk_x/dt=M_x(\bar{F});\quad dk_y/dt=M_y(\bar{F});\quad dk_z/dt=M_z(\bar{F}). \tag{23'}$$

Теорема об изменении кинетического момента системы

Если к точкам системы приложить все внешние и внутренние силы (рис. 48), то для каждой точки системы можно выразить теорему об изменении кинетического момента в форме (23), т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Суммируя правые и левые части этих соотношений по всем точкам системы и заменяя суммы производных производной от суммы, получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k = \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}.$$

Так как, по свойству внутренних сил,

$$\Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0,$$

а по определению кинетического момента системы,

$$\Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k = \bar{K}_O,$$

то

$$\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t = \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Если обозначить главный момент всех внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$, т. е.

$$\bar{L}_O^{(e)} = \Sigma\, \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

то теорему об изменении кинетического момента системы можно представить в виде

$$\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t = \bar{L}_O^{(e)}. \qquad (24)$$

Следовательно, *первая производная по времени от кинетического момента системы относительно какой-либо точки равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему, относительно той же точки.*

В эту теорему входит кинетический момент системы $\bar{K}_O$ в ее движении относительно инерциальной системы отсчета, причем кинетический момент и моменты внешних сил вычисляются относительно неподвижной в этой системе отсчета точки O. Получим теорему об изменении кинетического момента системы такого же движения, но выберем в качестве точки при вычислении кинетического момента и моментов внешних сил точку A, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета со скоростью $\bar{v}_A$.

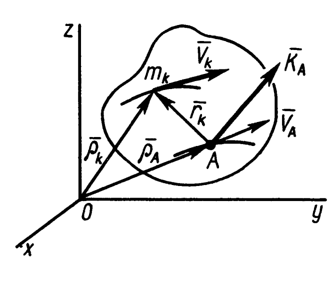


Рис. 50

По определению кинетического момента системы относительно точки A имеем (рис. 50)

$$\bar{K}_A = \Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k.$$

Вычислим производную по времени от кинетического момента $\bar{K}_A$ по правилу дифференцирования векторных произведений. Получим

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt}=\Sigma\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\times m_k\bar{v}_k+\bar{r}_k\times m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt}\right)=\Sigma\left[(\bar{v}_k-\bar{v}_A)\times m_k\bar{v}_k+\right.$$
$$\left.+\bar{r}_k\left(\bar{F}_k^{(e)}+\bar{F}_k^{(i)}\right)\right]=-\bar{v}_A\times\Sigma m_k\bar{v}_k+\Sigma\bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(e)},$$

так как $\bar{r}_k=\bar{\rho}_k-\bar{\rho}_A$; $\frac{d\bar{r}_k}{dt}=\frac{d\bar{\rho}_k}{dt}-\frac{d\bar{\rho}_A}{dt}=\bar{v}_k-\bar{v}_A$;

$$m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt}=\bar{F}_k^{(e)}+\bar{F}_k^{(i)};\quad \bar{v}_k\times m_k\bar{v}_k=0;\quad \Sigma\bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(i)}=0.$$

Учитывая, что $\bar{Q}=\Sigma m_k\bar{v}_k=M\bar{v}_C$, получим

$$d\bar{K}_A/dt=-\bar{v}_A\times M\bar{v}_C+\Sigma\bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(e)},$$

или

$$d\bar{K}_A/dt=M\bar{v}_C\times\bar{v}_A+\bar{L}_A^{(e)}.$$

Рассмотрим частные случаи этой теоремы.

1. Если точка A совпадает с центром масс C, то $M\bar{v}_C\times\bar{v}_C=0$ и теорема принимает форму

$$d\bar{K}_C/dt=\bar{L}_C^{(e)}.$$

2. Если в случае плоского движения твердого тела выбрать в качестве точки A мгновенный центр скоростей P, то $\bar{v}_A=\bar{v}_P\neq 0$, так как в рассматриваемом случае $\bar{v}_P$ есть скорость движения мгновенного центра скоростей по неподвижной центроиде, а она не равна нулю в отличие от скорости точки тела, совпадающей с точкой P, которая равна нулю. Очевидно, $\bar{v}_P\times M\bar{v}_C=0$, если $\bar{v}_P$ параллельна $\bar{v}_C$, т. е. если касательные к центроидам и траектории центра масс параллельны или, что то же самое, центр масс находится на нормали к центроидам в точке P. Тогда

$$d\bar{K}_P/dt=\bar{L}_P^{(e)}.$$

Эти частные случаи показывают, что *для подвижных точек центра масс для любой системы и мгновенного центра скоростей при плоском движении твердого тела в рассмотренном случае теорема об изменении кинетического момента для абсолютного движения имеет ту же форму, что и для неподвижной точки O.*

Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента системы. Они могут влиять на него только через внешние силы, т. е. неявно.

Проецируя (24) на прямоугольные декартовы оси координат, получаем теоремы об изменении кинетического момента системы относительно этих осей координат, т. е.

$$dK_x/dt=L_x^{(e)};\quad dK_y/dt=L_y^{(e)};\quad dK_z/dt=L_z^{(e)}. \qquad (24')$$

Теорема об изменении кинетического момента позволяет изучать вращательное движение твердого тела вокруг оси и точки или вращательную часть движения тела в общем случае движения свободного твердого тела.

Законы сохранения кинетических моментов

Выведем законы сохранения кинетических моментов для системы, рассматривая материальную точку как механическую систему, у которой число точек равно единице. Естественно, что для одной материальной точки все действующие на нее силы являются внешними. Возможны следующие частные случаи теоремы об изменении кинетического момента системы.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно точки O равен нулю, т. е. $\bar{L}_O^{(e)}=0$, то, согласно (24), кинетический момент системы $\bar{K}_O$ относительно той же точки постоянен по модулю и направлению, т. е.

$$\bar{K}_O=\overrightarrow{\text{const}}. \quad (25)$$

Этот частный случай теоремы об изменении кинетического момента системы называют законом сохранения кинетического момента. В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат по этому закону

$$K_x=C_1;\ K_y=C_2;\ K_z=C_3, \quad (25')$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные величины.

Соотношения (25′) являются первыми интегралами дифференциальных уравнений движения системы (3). Закон сохранения кинетического момента системы показывает, что одни внутренние силы не могут изменить кинетический момент системы, так же как они не изменяют ее количество движения.

2. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси Ox равна нулю, т. е. $L_x^{(e)}=\Sigma M_x(\bar{F}_k^{(e)})=0$, то из (24′) следует, что

$$K_x=\text{const}. \quad (26)$$

Следовательно, *кинетический момент системы относительно какой-либо координатной оси постоянен, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю,* что, в частности, наблюдается, когда внешние силы параллельны оси или пересекают ее. В частном случае для тела или системы тел, которые все вместе могут вращаться вокруг неподвижной оси, и если при этом

$$L_z^{(e)}=\Sigma M_z(\bar{F}_k^{(e)})=0,$$

то

$$K_z=J_z\omega=\text{const}$$

или

$$J_z\omega=J_{z_0}\omega_0, \quad (27)$$

где J_z и ω — момент инерции системы тел и их угловая скорость относительно оси вращения в произвольный момент времени t; J_{z0} и ω_0 — момент инерции тел и их угловая скорость в момент времени, выбранный за начальный, например при $t=0$.

Закон сохранения кинетического момента в форме (27) используют в своей деятельности акробаты, прыгуны, танцоры и т. д. Наглядно его можно продемонстрировать в опыте на скамье Жуковского (рис. 51). Если человек с гирями в руках встанет на горизонтальную платформу скамьи Жуковского, которая может вращаться вокруг вертикальной оси почти без трения, и затем ему сообщить угловую скорость вокруг этой оси, то

$$J_{z0}\omega_0 = J_z\omega,$$

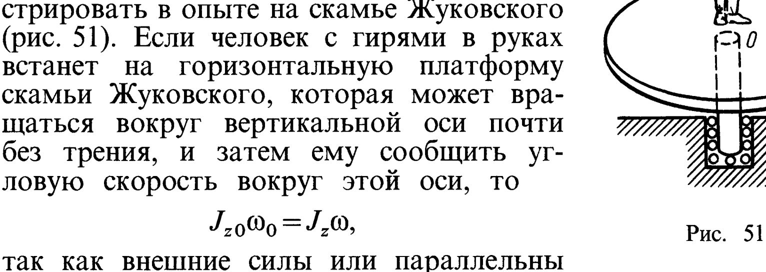


Рис. 51

так как внешние силы или параллельны оси вращения (силы веса человека, гирь и платформы), или пересекают ось (реакции подшипника, если пренебречь силами трения).

Следовательно, если человек увеличит момент инерции, например разведением рук с гирями в сторону, то угловая скорость вращения уменьшится, и наоборот. В действительности угловая скорость хотя и медленно, но все время уменьшается вследствие наличия сопротивления воздуха и трения в подшипнике скамьи.

Пример. Однородный горизонтальный диск радиусом R и силой тяжести P может вращаться без трения вокруг вертикальной оси. Как изменится угловая скорость диска, если первоначально стоящий на диске на расстоянии r от его оси человек с силой тяжести P_1 пойдет по окружности радиусом r по диску с относительной скоростью v (рис. 52)?

Решение. Пусть угловая скорость диска вначале была ω_0, а потом вследствие движения человека по диску стала ω. Так как внешние силы для системы, состоящей из человека и диска, параллельны оси Oz (силы тяжести $\bar{P}$ и $\bar{P}_1$) или ее пересекают (реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$), то

$$\Sigma M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$$

и, следовательно,

$$K_z = \text{const}.$$

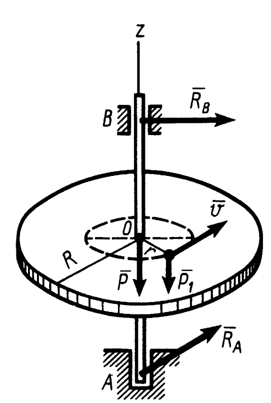


Рис. 52

Составим K_z для двух моментов времени и приравняем друг другу. В начальный момент, когда человек стоит, кинетический момент системы определяется как

$$K_z = J_z\omega_0 + \frac{P_1}{g} r^2 \omega_0.$$

После того как человек пойдет по диску, его кинетический момент станет равным кинетическому моменту от вращения вместе с диском плюс кинетический момент от относительного движения по диску, если человек идет в сторону вращения диска, т. е.

$$K_z = J_z\omega + \frac{P_1}{g} r^2 \omega + \frac{P_1}{g} rv.$$

Приравнивая полученные выражения кинетических моментов, получаем

$$J_z\omega + \frac{P_1}{g} r^2 \omega + \frac{P_1}{g} rv = J_z\omega_0 + \frac{P_1}{g} r^2 \omega_0.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{(J_z g + P_1 r^2)\,\omega_0 - P_1 rv}{J_z g + P_1 r^2}.$$

Для однородного диска

$$J_z = \frac{P}{g} \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Поэтому угловая скорость

$$\omega = \frac{(PR^2 + 2P_1 r^2)\,\omega_0 - 2P_1 rv}{PR^2 + 2P_1 r^2}.$$

Угловая скорость диска от движения по нему человека уменьшилась на $2P_1 rv/(PR^2 + 2P_1 r^2)$. Если вместо диска рассматривать земной шар, то движение по нему материальных объектов (воздуха, течения воды и т. д.), которые имеют не равную нулю проекцию скорости на касательную к параллелям, вызовет изменение угловой скорости вращения Земли. Она уменьшится, если проекции скорости положительны для направления по вращению земного шара, и увеличится, если против вращения.

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Из теоремы об изменении кинетического момента (24′) получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz (рис. 53). Имеем

$$\mathrm{d}K_z/\mathrm{d}t = \Sigma M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right).$$

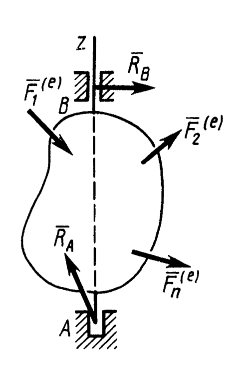


Рис. 53

Для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, согласно (21), имеем

$$K_z = J_z\omega,$$

где J_z — постоянный для твердого тела момент инерции относительно неподвижной оси вращения; ω — угловая скорость. Учитывая это, получаем

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Sigma M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right).$$

Если ввести угол поворота тела φ, то, учитывая, что $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \ddot{\varphi}$, имеем

$$J_z\ddot{\varphi}=\Sigma M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right).$$

Это и есть дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Оно полностью аналогично дифференциальному уравнению поступательного движения твердого тела в проекции на какую-либо ось, например на ось Ox.

В дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси вместо координаты x входит угол поворота φ, вместо массы тела M — момент инерции относительно оси вращения J_z, вместо суммы проекций внешних сил на ось Ox — сумма моментов внешних сил относительно оси вращения Oz или так называемый вращательный момент внешних сил.

Реакции подшипников $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ оси вращения являются внешними силами, но их моменты относительно оси вращения равны нулю, так как они пересекают ось, если пренебречь силами трения.

В частном случае, когда

$$\Sigma M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)=L_z^{(e)}=\text{const}, \quad \text{то} \quad \varepsilon=\ddot{\varphi}=L_z^{(e)}/J_z=\text{const},$$

т. е. вращение тела происходит с постоянным угловым ускорением.

Если

$$\Sigma M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)=L_z^{(e)}=0,$$

то

$$\ddot{\varphi}=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=0 \quad \text{и} \quad \omega=\text{const}.$$

Это случай равномерного вращения тела по инерции без действия вращательного момента внешних сил.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела в общем случае позволяет решать две основные задачи: по заданному вращению тела определять вращающий момент внешних сил и по заданному вращательному моменту и начальным условиям находить вращение тела. При решении второй задачи для нахождения угла поворота как функции времени приходится интегрировать дифференциальное уравнение вращательного движения. Методы его интегрирования полностью аналогичны рассмотренным выше методам интегрирования дифференциального уравнения прямолинейного движения точки.

Движение точки под действием центральной силы. Теорема площадей

Секторная скорость. Теорема площадей. Наряду с введенными в кинематике точки скоростью $\bar{v}$ и ускорением $\bar{a}$ можно ввести другие характеристики движения точки, например секторные скорость и ускорение. Секторной скоростью точки $\bar{v}_\sigma$ или $\mathrm{d}\bar{\sigma}/\mathrm{d}t$ относительно точки O (рис. 54) называют векторную величину, определяемую по формуле

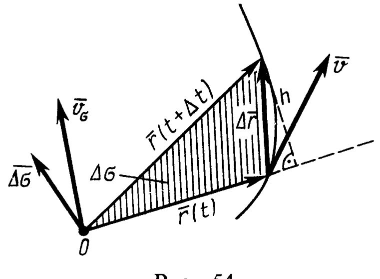


Рис. 54

$$\bar{v}_\sigma = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\sigma}}{dt}, \qquad (28)$$

где $\Delta\bar{\sigma}$ — вектор, численно равный заштрихованной на рисунке площади, ометаемой радиусом-вектором $\bar{r}$ движущейся точки за время Δt; направление вектора $\Delta\bar{\sigma}$ берется по перпендикуляру к заштрихованной площади так, чтобы с конца этого вектора при ометании заштрихованной площади видеть поворот радиуса-вектора $\bar{r}$ против часовой стрелки.

Для случая движения точки по плоскости секторная скорость перпендикулярна этой плоскости, если точка O выбрана в той же плоскости, в которой движется точка. Секторная скорость всегда приложена в той точке, относительно которой она вычисляется.

Секторное ускорение $\bar{a}_\sigma$ можно ввести как производную по времени от вектора секторной скорости, т. е.

$$\bar{a}_\sigma = d^2\bar{\sigma}/dt^2 = d\bar{v}_\sigma/dt.$$

Секторную скорость можно выразить через момент линейной скорости $\bar{v}$ относительно точки O:

$$\bar{v}_\sigma = {}^1/_2(\bar{r}\times\bar{v}). \qquad (29)$$

Векторное произведение $\bar{r}\times\bar{v}$, согласно определению, имеет такое же направление, как и $\bar{v}_\sigma$. Следовательно, для доказательства формулы (29) достаточно показать, что величины левой и правой частей одинаковы. Вычислим левую часть формулы (29):

$$|\bar{v}_\sigma| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{\sigma}|}{\Delta t},$$

но

$$|\Delta\bar{\sigma}| = {}^1/_2\,\mathrm{rh} = {}^1/_2 r\,|\Delta\bar{r}|\sin(\bar{r},\widehat{\ }\Delta\bar{r}).$$

Следовательно,

$$|\bar{v}_\sigma| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{\sigma}|}{\Delta t} = {}^1/_2\,r\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta t}\sin(\bar{r},\widehat{\ }\Delta\bar{r})\right] = {}^1/_2\,rv\sin(\bar{r},\widehat{\ }\bar{v}),$$

что совпадает с модулем векторного произведения, стоящим справа в формуле (29).

Если движение точки происходит в плоскости, то секторную скорость можно считать алгебраической величиной. В этом случае секторную скорость точки часто выражают в полярных координатах. Из формулы (29) секторная скорость

$$v_\sigma = d\sigma/dt = {}^1/_2\,rv\sin(\bar{r},\widehat{\ }\bar{v}).$$

Но из кинематики точки в полярной системе координат на плоскости известно (рис. 55), что $v\sin\left(\bar{r},\hat{}\,\bar{v}\right)=v_P=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

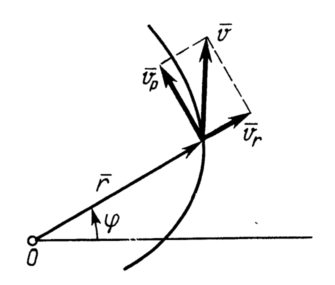


Рис. 55

Следовательно,

$$v_\sigma=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}={}^1/_2\,r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \qquad (30)$$

Формула (30) выражает секторную скорость в полярных координатах в случае плоского движения точки.

Используя формулу (29), кинетический момент через секторную скорость можно выразить в виде

$$\bar{k}_O=\bar{r}\times m\bar{v}=2m\bar{v}_\sigma. \qquad (31)$$

Соответственно теорему об изменении кинетического момента (23) для точки можно выразить через секторную скорость формулой

$$2m\frac{\mathrm{d}\bar{v}_\sigma}{\mathrm{d}t}=\bar{M}_O\left(\bar{F}\right). \qquad (32)$$

В форме (32) теорему об изменении кинетического момента для точки называют т е о р е м о й п л о щ а д е й.

Движение точки под действием центральной силы. *Центральной силой* $\bar{F}$ называют такую силу, линия действия которой при движении точки ее приложения проходит через одну и ту же точку O, называемую центром центральной силы.

Центральная сила может быть притягивающей (направленной к центру) и отталкивающей (направленной от центра). Так как для центральной силы момент силы относительно своего центра равен нулю, т. е. $\bar{M}_O\left(\bar{F}\right)=0$, то, следовательно, по теореме об изменении кинетического момента для точки (23),

$$\bar{k}_O=\overrightarrow{\mathrm{const}}. \qquad (33)$$

В проекциях на прямоугольные оси декартовой системы с началом в точке O по (33) имеем:

$$k_x=m\left(y\dot{z}-z\dot{y}\right)=C_1;\ \ k_y=m\left(z\dot{x}-x\dot{z}\right)=C_2;\ \ k_z=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)=C_3, \qquad (33')$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные величины.

Умножая первое соотношение (33′) на x, второе — на y, третье — на z и складывая, получаем $O=C_1x+C_2y+C_3z$, т.е. координаты движущейся точки x, y, z удовлетворяют уравнению плоскости, проходящей через начало координат.

Следовательно, траектория точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр силы.

Так как при движении точки 'под действием центральной силы

$$\bar{k}_0 = \overrightarrow{\text{const}},$$

то, учитывая формулу (31), имеем

$$\bar{v}_\sigma = d\bar{\sigma}/dt = \overrightarrow{\text{const}}$$

и, следовательно,

$$v_\sigma = d\sigma/dt = \text{const} = C, \qquad (34)$$

или

$$\sigma = \sigma_0 + Ct.$$

Формула (34) выражает так называемый интеграл площадей: *при движении точки под действием центральной силы секторная скорость является постоянной величиной и, следовательно, ометаемая радиусом-вектором площадь пропорциональна времени.*

Учитывая формулу (30), интеграл площадей (34) в полярных координатах можно представить в виде

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}. \qquad (35)$$

В этой форме интеграл площадей широко используется при рассмотрении движения планет вокруг Солнца и вообще различных спутников, в частности искусственных спутников Земли.

Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс

Рассмотрим относительное движение системы только относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы.

Прежде чем рассмотреть теорему, выведем формулу для вычисления кинетического момента системы.

Формула для кинетического момента системы. Пусть механическая система совершает движение относительно основной системы координат $Ox_1y_1z_1$. Возьмем подвижную систему координат $Cxyz$ с началом в центре масс системы C, движущуюся поступательно относительно основной системы координат. Из рис. 56 следует, что для любого момента времени $\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_C + \bar{r}_k$.

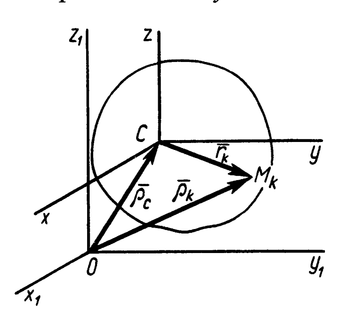


Рис. 56

Дифференцируя это тождество по времени, получаем

$$\frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_C}{dt} + \frac{d\bar{r}_k}{dt}$$

или

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_{kr},$$

где $\bar{v}_k$ — абсолютная скорость точки M_k; $\bar{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс; $\bar{v}_{kr} = \mathrm{d}\bar{r}_k/\mathrm{d}t$ — относительная скорость точки M_k относительно подвижной системы координат $Cxyz$. При поступательном движении подвижной системы координат ее угловая скорость $\bar{\omega}$ равна нулю и по формуле Бура полная производная по времени от радиуса-вектора $\bar{r}$ совпадает с локальной производной, равной относительной скорости.

Согласно определению кинетического момента $\bar{K}_O$ относительно неподвижной точки O, для абсолютного движения системы относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$ по формуле (20) имеем

$$\bar{K}_O = \Sigma\, \bar{\rho}_k \times m_k\bar{v}_k.$$

Подставляя в эту формулу значения $\bar{\rho}_k$ и $\bar{v}_k$, после небольших преобразований получаем

$$\bar{K}_O = \bar{\rho}_C \times \bar{v}_C \Sigma m_k + \Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_{kr} + \bar{\rho}_C \times \Sigma m_k \frac{\mathrm{d}\bar{r}_k}{\mathrm{d}t} + (\Sigma m_k\bar{r}_k) \times \bar{v}_C. \quad (36)$$

В этой формуле $\Sigma m_k = M$ — масса системы. Кроме того, последние два слагаемых равны нулю. Действительно, по определению радиуса-вектора центра масс относительно этого центра масс имеем

$$O = \bar{r}_C = \Sigma m_k\bar{r}_k / M.$$

Следовательно, $\Sigma m_k\bar{r}_k = 0$ и последнее слагаемое в (36) тоже равно нулю.

Другое слагаемое можно предварительно преобразовать:

$$\bar{\rho}_C \times \Sigma m_k \frac{\mathrm{d}\bar{r}_k}{\mathrm{d}t} = \bar{\rho}_C \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Sigma m_k\bar{r}_k).$$

Это слагаемое также равно нулю, так как все время $\Sigma m_k\bar{r}_k = 0$. Формула (36) принимает следующий окончательный вид:

$$\bar{K}_O = \bar{\rho}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)}, \quad (37)$$

где $\bar{K}_C^{(r)} = \Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_{kr}$.

Величина $\bar{K}_C^{(r)}$ является кинетическим моментом системы относительно центра масс для относительного движения относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс, т. е. системы координат $Cxyz$.

Формула (37) показывает, что *кинетический момент абсолютного движения системы относительно неподвижной точки O равен векторной сумме кинетического момента центра масс относительно той же точки, если бы в центре масс была сосредоточена вся масса системы, и кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс.*

Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс. Для

абсолютного движения системы и неподвижной точки O теорема об изменении кинетического момента имеет вид

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \Sigma\, \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Подставляя сюда значения $\bar{\rho}_k$ и $\bar{K}_O$ по формуле (37) и производя дифференцирование и группировку членов, получаем

$$\frac{d\,\bar{\rho}_C}{dt} \times M\bar{v}_C + \bar{\rho}_C \times M\frac{d\bar{v}_C}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \bar{\rho}_C \times \Sigma \bar{F}_k^{(e)} + \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Перенося из правой части в левую первое слагаемое и учитывая, что

$$\frac{d\,\bar{\rho}_C}{dt} \times M\bar{v}_C = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0$$

как векторное произведение параллельных векторов, после объединения слагаемых имеем

$$\bar{\rho}_C \times \left[M\frac{d\bar{v}_C}{dt} - \Sigma \bar{F}_k^{(e)} \right] + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

В этой формуле выражение в квадратных скобках равно нулю на основании теоремы о движении центра масс системы (18) и, следовательно, формула примет вид

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \Sigma \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

или

$$d\bar{K}_C^{(r)}/dt = \bar{L}_C^{(e)}, \qquad (38)$$

где $\bar{L}_C^{(e)} = \Sigma \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$ является главным моментом всех внешних сил относительно центра масс.

Формула (38) и выражает рассматриваемую теорему *об изменении кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно с центром масс; она формулируется так же, как если бы центр масс был неподвижной точкой.*

Эту теорему применяют для изучения вращательной части плоского движения и движения свободного твердого тела вокруг центра масс.

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Используя теоремы о движении центра масс и изменении кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к системе

координат, движущейся поступательно с центром масс, получим дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

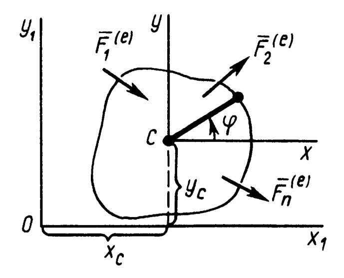


Рис. 57

В плоскости движения центра масс тела, совершающего плоское движение, выберем неподвижную систему координат Ox_1y_1, относительно которой рассматривается движение, и движущуюся поступательно вместе с центром масс систему Cxy (рис. 57). Пусть x_C и y_C — координаты центра масс тела относительно неподвижной системы координат. Тогда по теореме о движении центра масс получим два следующих дифференциальных уравнения плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \Sigma F_{kx}^{(e)};\quad M\ddot{y}_C = \Sigma F_{ky}^{(e)},$$

где M — масса тела.

Третье дифференциальное уравнение плоского движения твердого тела получим из теоремы об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс (38) в проекции на подвижную ось Cz:

$$\mathrm{d}K_{Cz}^{(r)}/\mathrm{d}t = \Sigma M_{Cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right).$$

Плоское движение твердого тела можно считать состоящим из поступательного движения вместе с центром масс C и вращения вокруг подвижной оси Cz. Для случая вращения вокруг оси кинетический момент относительно этой оси вычисляется по формуле

$$K_{Cz}^{(r)} = J_{Cz}\omega,$$

где ω — угловая скорость; J_{Cz} — момент инерции тела относительно оси Cz.

Так как J_{Cz} является величиной постоянной, то после подстановки $K_{Cz}^{(r)}$ в теорему об изменении кинетического момента в относительном движении получим

$$J_{Cz}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Sigma M_{Cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right).$$

Если ввести угол поворота φ вокруг подвижной оси Cz, то получим следующее дифференциальное уравнение:

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \Sigma M_{Cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right).$$

Таким образом, для твердого тела, совершающего плоское движение и, следовательно, имеющего три степени свободы, соответственно получим следующие три дифференциальных уравнения:

$$M\ddot{x}_C = \Sigma F_{kx}^{(e)};\quad M\ddot{y}_C = \Sigma F_{ky}^{(e)};\quad J_{Cz}\ddot{\varphi} = \Sigma M_{Cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right). \qquad (39)$$

С помощью этих уравнений можно решать две основные задачи: по заданному плоскому движению твердого тела находить действующие на тело внешние силы и по заданным внешним силам и начальным условиям определять его движение. При решении этих задач должны быть заданы масса тела M и его момент инерции.

Теорема Резаля

Теореме об изменении кинетического момента системы можно дать следующее кинематическое истолкование. Из кинематики точки известно, что скорость точки можно рассматривать как скорость конца радиуса-вектора, следящего за движущейся точкой, или как скорость изменения самого радиуса-вектора, если он проведен в движущуюся точку из какой-либо неподвижной точки (рис. 58). Траектория движущейся точки при этом является годографом радиуса-вектора $\bar{r}$, а скорость точки направлена по касательной к этому годографу и равна первой производной по времени от радиуса-вектора. Аналогично этому, и производную по времени от кинетического момента можно рассматривать как своеобразную скорость конца этого вектора при движении по годографу кинетического момента (рис. 59). Эта скорость не является обычной скоростью точки, так как кинетический момент имеет иную размерность, чем радиус-вектор. Это есть скорость изменения вектора кинетического момента.

Таким образом, если обозначить через $\bar{u}$ скорость конца кинетического момента, т. е. $\bar{u}=\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t$, то теорему об изменении кинетического момента системы (24) можно представить в новой форме — в виде так называемой теоремы Резаля:

$$\bar{u}=\bar{L}_O^{(e)}.$$

Теорему Резаля можно сформулировать так: *при движении механический системы скорость точки, совпадающей с концом вектора кинетического момента при движении по годографу этого вектора, равна по величине и параллельна по направлению главному моменту всех внешних сил системы*. Точка, относительно которой вычисляются кинетический момент системы и главный момент внешних сил, одна и та же.

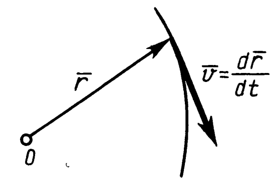


Рис. 58

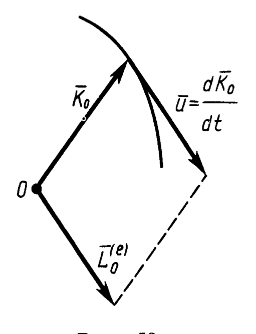


Рис. 59

В форме теоремы Резаля может быть сформулирована и теорема об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс.

Теорема Резаля особенно удобна для приближенного исследования движения быстровращающихся гироскопов.

Аналогично и теорему об изменении количества движения для системы можно сформулировать в форме теоремы Резаля для количества движения: *при движении механической системы скорость точки, совпадающей с концом вектора количества движения при движении по его годографу, равна по величине и параллельна по направлению главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.*

§ 5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Для рассмотрения теоремы об изменении кинетической энергии необходимо ввести новое понятие «работа силы» и рассмотреть некоторые простейшие способы ее вычисления.

Работа силы

Работа силы на каком-либо перемещении является одной из основных характеристик, оценивающих действие силы на этом перемещении. Рассмотрим элементарную работу, полную работу и мощность.

Элементарная работа силы. Элементарная работа $\mathrm{d}A$ силы $\bar{F}$ на элементарном (бесконечно малом) перемещении $\mathrm{d}s$ определяется следующим образом (рис. 60):

$$\mathrm{d}A = F_\tau \mathrm{d}s, \qquad (40)$$

где F_τ — проекция силы $\bar{F}$ на направление скорости точки приложения силы или на направление элементарного перемещения, которое считается направленным по скорости точки.

Элементарная работа является скалярной величиной. Ее знак определяется знаком проекции силы F_τ, так как перемещение $\mathrm{d}s$ принимаем положительным. При $F_\tau > 0$ элементарная работа $\mathrm{d}A > 0$, а при $F_\tau < 0$, наоборот, $\mathrm{d}A < 0$. Так как $F_\tau = F\cos\varphi$, где φ — угол между силой $\bar{F}$ и направлением скорости точки $\bar{v}$, то выражение (40) можно представить в виде

$$\mathrm{d}A = F\cos\varphi\,\mathrm{d}s. \qquad (41)$$

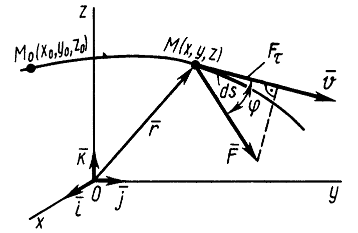


Рис. 60

В этой формуле величины F и $\mathrm{d}s$ положительны и знак $\mathrm{d}A$ определяется знаком $\cos\varphi$. Если φ — острый угол, то $\mathrm{d}A$ положительна; если φ тупой угол, то $\mathrm{d}A$ отрицательна.

Итак, *элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.* Отметим частные случаи, которые можно получить из (41):

$$\varphi=0^\circ, \quad dA=Fds;$$
$$\varphi=90^\circ, \quad dA=0;$$
$$\varphi=180^\circ, \quad dA=-Fds.$$

Таким образом, если сила перпендикулярна элементарному перемещению, то ее элементарная работа равна нулю. В частности, работа нормальной составляющей к скорости силы $\bar{F}_n$ всегда равна нулю.

Приведем другие формулы для вычисления элементарной работы силы. Из кинематики точки известно, что $\bar{v}=d\bar{r}/dt$; $v=|\bar{v}|=ds/dt$. Следовательно, $ds=|d\bar{r}|=v\,dt$.

После этого, согласно (41), элементарная работа

$$dA=F|d\bar{r}|\cos\varphi=\bar{F}\cdot d\bar{r}. \tag{42}$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на дифференциал радиуса-вектора точки приложения силы.

Так как $d\bar{r}=\bar{v}dt$, то, согласно (42),

$$dA=\bar{F}\cdot d\bar{r}=\bar{F}\cdot\bar{v}dt=\bar{F}dt\cdot\bar{v}. \tag{43}$$

Элементарная работа равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.

Если силу $\bar{F}$ и радиус-вектор $\bar{r}$ разложить по осям координат, то

$$\bar{F}=F_x\bar{i}+F_y\bar{j}+F_z\bar{k}; \quad \bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}.$$

Из последней формулы имеем

$$d\bar{r}=dx\bar{i}+dy\bar{j}+dz\bar{k}.$$

Подставляя в (42) значения $\bar{F}$ и $d\bar{r}$, получаем

$$dA=F_x dx+F_y dy+F_z dz. \tag{44}$$

Формулу (44) называют обычно аналитическим выражением элементарной работы. Хотя выражение для элементарной работы (44) по форме и напоминает полный дифференциал функции координат точки, в действительности в общем случае элементарная работа не является полным дифференциалом. Элементарная работа является полным дифференциалом функции координат точки только для специального класса сил — так называемых стационарных *потенциальных сил*, которые рассмотрены ниже.

Полная работа силы. Для определения полной работы силы $\bar{F}$ на перемещении от точки M_0 до точки M разобьем это перемещение на n перемещений, каждое из которых в пределе переходит в элементарное. Тогда работу A можно выразить формулой

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}A_k,$$

где $\mathrm{d}A_k$ — работа на k-м элементарном перемещении, на которые разбито полное перемещение.

Так как сумма в определении работы является интегральной суммой определения криволинейного интеграла на участке кривой M_0M, то, используя для элементарной работы формулу (40), получаем

$$A=\int_{M_0}^{M}F_\tau\mathrm{d}s. \quad (45)$$

Используя другие выражения для элементарной работы, полную работу силы можно представить также в виде

$$A=\int_{M_0}^{M}\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}=\int_{M_0}^{M}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z), \quad (46)$$

или

$$A=\int_{0}^{t}\bar{F}\cdot\bar{v}\mathrm{d}t, \quad (47)$$

где момент времени $t=0$ соответствует точке M_0, а момент времени t — точке M.

Формула (47) особенно удобная для вычисления работы силы, когда сила известна как функция времени. Отметим, что из определения элементарной и полной работы следует:

1) работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении;

2) работа силы на полном перемещении равна сумме работ этой же силы на составляющих перемещениях, на которые любым образом разбито все перемещение.

Первое свойство, очевидно, достаточно доказать только для элементарной работы равнодействующей силы.

Если сила $\bar{R}$ является равнодействующей силой системы сил $(\bar{F}_1, ..., \bar{F}_k)$, приложенных к рассматриваемой точке, то она выражается геометрической суммой этих сил. Тогда по определению элементарной работы силы имеем

$$\bar{R}\cdot\mathrm{d}\bar{r}=(\bar{F}_1+\bar{F}_2+\ ...\ +\bar{F}_k)\cdot\mathrm{d}\bar{r}=\bar{F}_1\cdot\mathrm{d}\bar{r}+\bar{F}_2\cdot\mathrm{d}\bar{r}+\ ...\ +\bar{F}_k\cdot\mathrm{d}\bar{r}.$$

Первое свойство доказано.

Второе из отмеченных свойств непосредственно следует из возможности разбиения любым образом полного промежутка интегрирования на составляющие, причем определенный интеграл по полному промежутку интегрирования равен сумме интегралов по составляющим. Единицей полной работы, так же как и элементарной, в СИ является джоуль: 1 Дж = 1 Н · м.

Если проекция силы на направление скорости F_τ является величиной постоянной, то из (45) получим

$$A = F_\tau s,$$

где s — путь, пройденный точкой.

Так как $F_\tau = F\cos\varphi$, то последнюю формулу можно представить в виде

$$A = Fs\cos\varphi.$$

Следует отметить, что в этой формуле как F, так и φ могут быть переменными, но $F\cos\varphi$ является постоянной величиной. Это выполняется, если F и φ постоянны. Если дополнительно угол $\varphi = 0$ или $180°$, то тогда

$$A = \pm Fs,$$

причем эта формула применима как для прямолинейного, так и для криволинейного движения. Для этого необходимо, чтобы сила $\bar{F}$ была постоянной по модулю и все время направленной по касательной к траектории точки. В случае прямолинейной траектории сила $\bar{F}$, следовательно, должна быть все время направлена по траектории в одну и ту же сторону.

Мощность. Мощность силы или работоспособность какого-либо источника силы часто оценивают той работой, которую он может совершить за единицу времени.

Итак, по определению, мощность

$$W = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t.$$

Учитывая (43) для элементарной работы, мощность W можно представить в виде

$$W = \bar{F} \cdot \bar{v} = Fv\cos\varphi. \qquad (48)$$

Таким образом, *мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки*. Из формулы (48) получаем, что чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности. Следовательно, если от источника силы с заданной мощностью нужно получить большую силу, то ее можно получить только при малой скорости. Так, например, когда железнодорожному локомотиву надо увеличить силу тяги, то для этого надо уменьшить скорость поезда.

В СИ единицей мощности является ватт: 1 Вт = 1 Дж/с.

Примеры вычисления работы силы

Работа силы в общем случае зависит от характера движения точки приложения силы. Следовательно, для вычисления работы надо знать движение этой точки. Но в природе имеются силы и примеры движения, для которых работу можно вычислить сравнительно просто, зная начальное и конечное положение точки.

Рассмотрим работу силы тяжести и линейной силы упругости, изменяющейся по закону Гука, и вычисление работы

силы, приложенной к какой-либо точке твердого тела в различных случаях его движения. В качестве простейших примеров движения укажем случаи, когда работа равна нулю. Так, работа любой силы равна нулю, если она приложена все время в неподвижной точке или в точках, скорость которых равна нулю, как, например, в случае, когда сила все время приложена в мгновенном центре скоростей при плоском движении тела или все время в точках, лежащих на мгновенной оси вращения, в случае вращения тела вокруг неподвижной точки. Эти случаи возможны в задачах, когда рассматривают работу силы трения в точке соприкосновения двух тел при отсутствии скольжения одного тела по другому. При этом работа силы трения равна нулю.

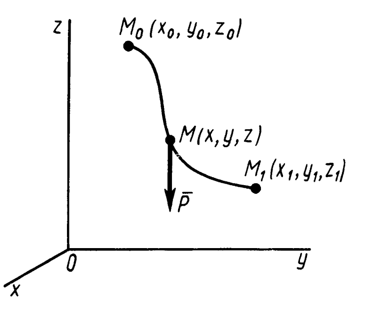


Рис. 61

Работа силы тяжести. Силу тяжести $\bar{P}$ материальной точки массой m вблизи поверхности Земли можно считать постоянной, равной mg, направленной по вертикали вниз. Если взять оси координат $Oxyz$, у которых ось Oz направлена по вертикали вверх (рис. 61), то

$$P_x = 0;\quad P_y = 0;\quad P_z = -mg.$$

Вычисляя работу A силы $\bar{P}$ на перемещении от точки M_0 до точки M_1 по формуле (46), имеем

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (P_x \mathrm{d}x + P_y \mathrm{d}y + P_z \mathrm{d}z) =$$

$$= -mg \int_{z_0}^{z_1} \mathrm{d}z = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1),$$

или

$$A = mgh, \tag{49}$$

где $h = z_0 - z_1$ — высота опускания точки.

При подъеме точки высота h является отрицательной. Следовательно, в общем случае работа силы тяжести $P = mg$ равна

$$A = \pm Ph. \tag{50}$$

Работа силы тяжести равна произведению этой силы на высоту опускания (работа положительна) или высоту подъема (работа отрицательна). Из формулы (50) следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории между точками M_0 и M_1, и если эти точки совпадают, то работа силы тяжести равна нулю (случай замкнутого пути). Она равна

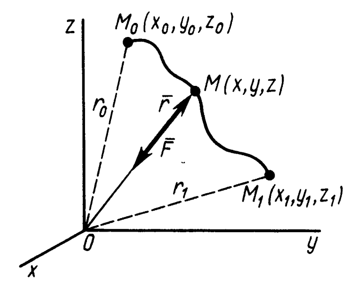


Рис. 62

нулю, если точки M_0 и M_1 лежат в одной и той же горизонтальной плоскости.

Если имеем систему N материальных точек, то для каждой точки с массой m_k будем иметь работу ее силы тяжести

$$A_k = m_k g (z_{0k} - z_{1k}),$$

где z_{0k} и z_{1k} — начальная и конечная координаты точки.

Работа всех сил тяжести системы материальных точек

$$A = \sum_{k=1}^{N} A_k = g\left(\sum_{k=1}^{N} m_k z_{0k} - \sum_{k=1}^{N} m_k z_{1k}\right) = Mg(z_{0C} - z_{1C}),$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N} m_k z_{0k} = M z_{0C}; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k z_{1k} = M z_{1C},$$

где M — масса системы точек; z_{0C} и z_{1C} — начальная и конечная координаты центра масс системы точек. Вводя обозначение для изменения высоты центра масс $z_{0C} - z_{1C} = \pm h_C$, имеем

$$A = \pm M g h_C. \tag{50'}$$

Из (50′) следует, что для перемещений точек системы, при которых $h_C = 0$, работа сил тяжести $A = 0$.

Работа линейной силы упругости. Линейной силой упругости (или линейной восстанавливающей силой) называют силу, действующую по закону Гука (рис. 62):

$$\bar{F} = -c\bar{r},$$

где $\bar{r}$ — расстояние от точки равновесия, где сила равна нулю, до рассматриваемой точки M; c — постоянный коэффициент жесткости.

Выберем начало координат в точке равновесия O, тогда

$$F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz.$$

После этого работу на перемещении от точки M_0 до точки M_1 определим по формуле

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z) = -c \int_{M_0}^{M_1} (x \mathrm{d}x + y \mathrm{d}y + z \mathrm{d}z) = -c \int_{r_0}^{r_1} r \mathrm{d}r,$$

так как

$$x \mathrm{d}x + y \mathrm{d}y + z \mathrm{d}z = r \mathrm{d}r,$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Выполняя интегрирование, получаем

$$A=-\frac{c}{2}\left(r_1^2-r_0^2\right). \tag{51}$$

По этой формуле вычисляют работу линейной силы упругости пружины при перемещении по любому пути из точки M_0, в которой ее удлинение (начальная деформация) равно $\lambda_0=r_0$, в точку M_1, где деформация соответственно равна $\lambda=r_1$. В новых обозначениях (51) принимает вид

$$A=-\frac{c}{2}\left(\lambda^2-\lambda_0^2\right) \tag{51'}$$

При перемещении из положения равновесия (пружина не деформирована), где $\lambda_0=0$, в любое положение с деформацией λ работа линейной силы упругости

$$A=-\frac{c}{2}\lambda^2. \tag{52}$$

Работа линейной силы упругости на перемещении из состояния равновесия всегда отрицательна и равна половине произведения коэффициента жесткости на квадрат деформации. Из формулы (51) или (52) следует, что работа линейной силы упругости не зависит от формы перемещения и работа по любому замкнутому перемещению равна нулю. Она также равна нулю, если точки M_0 и M_1 лежат на одной сфере, описанной из точки равновесия.

Работа силы, приложенной к твердому телу. Получим формулы для вычисления элементарной и полной работы силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, которое совершает то или иное движение. Сначала рассмотрим поступательное и вращательное движения тела, а затем общий случай движения твердого тела.

При поступательном движении твердого тела все точки тела имеют одинаковые по модулю и направлению скорости (рис. 63). Следовательно, если сила $\bar{F}$ приложена к точке M_k, то, так как $\bar{v}_k=\bar{v}$,

$$\mathrm{d}A=\bar{F}\cdot\bar{v}_k\mathrm{d}t=\bar{F}\cdot v\mathrm{d}t=\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}, \tag{53}$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор произвольной точки твердого тела.

На каком-либо перемещении полная работа

$$A=\int_{M_0}^{M}\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}, \tag{54}$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси скорость точки M можно вычислить по векторной формуле Эйлера (рис. 64):

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r};$$

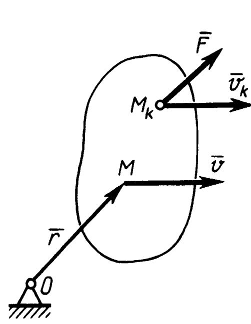


Рис. 63

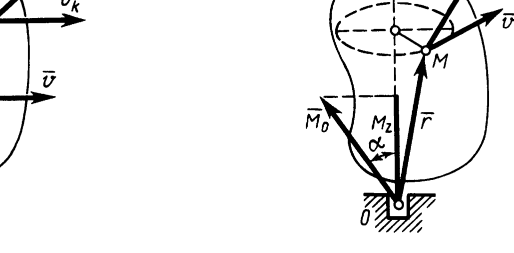


Рис. 64

тогда элементарную работу силы $\bar{F}$ определим по формуле

$$\mathrm{d}A = \bar{F} \cdot \bar{v}\,\mathrm{d}t = \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})\,\mathrm{d}t.$$

В смешанном векторном произведении, которое выражается в виде определителя, можно переставлять сомножители в круговом порядке:

$$\bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F})$$

и

$$\mathrm{d}A = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F})\,\mathrm{d}t = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0\,\mathrm{d}t = \omega\,\mathrm{d}t\,M_0 \cos\alpha,$$

так как

$$\bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{M}_0$$

является моментом силы относительно точки O.

Учитывая, что $M_0 \cos\alpha = M_z$ — момент силы относительно оси вращения Oz и $\omega\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi$, окончательно получаем

$$\mathrm{d}A = M_z\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (55)$$

Таким образом, *элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела.*

Полная работа

$$A = \int_0^{\varphi} M_z\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (56)$$

В частном случае, если момент силы относительно оси вращения является постоянным, т. е. $M_z(\bar{F}) = \mathrm{const}$, работу определяют по формуле

$$A = M_z \varphi, \qquad (57)$$

где φ — угол поворота тела, на котором вычисляют работу силы.

Так как $dA = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}) dt$, то мощность в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$W = dA/dt = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}) = \omega M_z(\bar{F}). \quad (58)$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся вокруг неподвижной оси твердому телу, равна произведению угловой скорости тела на момент силы относительно оси вращения тела.

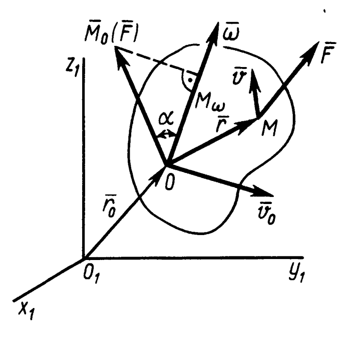


Рис. 65

Для свободного тела в общем случае движения скорость точки M, в которой приложена сила $\bar{F}$ (рис. 65),

$$\bar{v} = \bar{v}_0 - \bar{\omega} \times \bar{r};$$

следовательно,

$$dA = \bar{F} \cdot \bar{v} dt = \bar{F} \cdot \bar{v}_0 dt + \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt.$$

Учитывая, что

$$\bar{v}_0 dt = d\bar{r}_0 \quad \text{и} \quad \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F}) = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0,$$

имеем

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}) dt = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + \omega dt M_0 \cos\alpha.$$

Но так как $M_O \cos\alpha = M_\omega$ — момент силы относительно мгновенной оси относительного вращения вокруг точки O, $\omega dt = d\varphi$ — элементарный угол поворота вокруг этой оси, то окончательно получаем

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + M_\omega(\bar{F}) d\varphi. \quad (59)$$

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, в общем случае движения складывается из элементарной работы на элементарном поступательном перемещении вместе с какой-либо точкой тела и на элементарном вращательном перемещении вокруг этой точки.

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, выбрав эту точку за полюс O, по (59) для элементарной работы имеем

$$dA = M_\omega(\bar{F}) d\varphi. \quad (60)$$

Поворот на угол $d\varphi$ следует рассматривать в каждый момент времени вокруг своей мгновенной оси вращения.

Формулу (59) применяют и для плоского движения твердого тела, только в этом случае мгновенная ось относительного вращения перпендикулярна плоскости движения и проходит через произвольную точку тела.

При действии на твердое тело системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_N)$ для элементарной работы силы $\bar{F}_k$, согласно полученным формулам, имеем

$$dA_k = \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_0 + \bar{M}_0(\bar{F}_k)\bar{\omega}dt = \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_0 + M_\omega(\bar{F}_k)d\varphi.$$

Элементарная работа системы сил

$$dA = \sum_{k=1}^{N} dA_k = \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k\right) \cdot d\bar{r}_0 + \left[\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k)\right]\bar{\omega}dt = \bar{R} \cdot d\bar{r} + \bar{L}_0 \cdot \bar{\omega}dt = \\ = \bar{R} \cdot d\bar{r}_0 + L_\omega d\varphi,$$

где

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k; \quad \bar{L}_0 = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k); \quad L_\omega = \sum_{k=1}^{N} M_\omega(\bar{F}_k)$$

соответственно являются главным вектором и главными моментами системы сил относительно точки O и мгновенной оси относительного вращения, проходящей через точку полюс. Таким образом,

$$dA = \bar{R} \cdot d\bar{r}_0 + L_\omega d\varphi = \bar{R} \cdot d\bar{r}_0 + \bar{L}_0 \cdot \bar{\omega}dt, \qquad (59')$$

т. е. элементарная работа системы сил, приложенных к свободному твердому телу в общем случае его движения, складывается из элементарной работы главного вектора системы сил на элементарном поступательном перемещении вместе с какой-либо точкой тела и элементарной работы главного момента этих сил относительно выбранной точки на элементарном вращательном перемещении вокруг этой точки.

Работа внутренних сил твердого тела. Докажем, что для твердого тела сумма работ внутренних сил равна нулю при любом его перемещении. Очевидно, достаточно доказать, что сумма элементарных работ всех внутренних сил равна нулю. Рассмотрим две любые точки твердого тела: M_1 и M_2 (рис. 66). Так как внутренние силы есть силы взаимодействия точек тела, то для этих двух точек

$$\bar{F}_1^{(i)} = -\bar{F}_2^{(i)}; \quad F_1^{(i)} = F_2^{(i)}.$$

Введем единичный вектор $\bar{l}^0$, направленный по силе $\bar{F}_1^{(i)}$. Тогда

$$\bar{F}_1^{(i)} = \bar{l}^0 F_1^{(i)}; \quad \bar{F}_2^{(i)} = -\bar{l}^0 F_2^{(i)} = -\bar{l}^0 F_1^{(i)}.$$

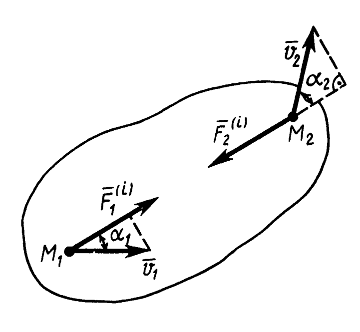


Рис. 66

Сумма элементарных работ сил $\bar{F}_1^{(i)}$ и $\bar{F}_2^{(i)}$

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = \bar{F}_1^{(i)} \cdot \bar{v}_1 dt + \bar{F}_2^{(i)} \cdot \bar{v}_2 dt = \\ = F_1^{(i)} dt(\bar{v}_1 \cdot \bar{l}^0 - \bar{v}_2 \cdot \bar{l}^0).$$

Раскрывая скалярные произведения векторов в скобках, получаем

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = \\ = F_1^{(i)} dt(v_1 \cos\alpha_1 - v_2 \cos\alpha_2) = 0,$$

так как в кинематике твердого тела доказано, что проекции скоростей

любых двух точек твердого тела на направление прямой линии, соединяющей эти точки, равны друг другу при любом движении твердого тела. В полученном выражении в скобках стоит разность этих проекций скоростей двух точек, т. е. величина, равная нулю.

Твердое тело можно считать состоящим из пар взаимодействующих точек, для каждой из которых сумма элементарных работ внутренних сил равна нулю.

Суммируя элементарные работы для всех пар точек, получаем $\sum dA_k^{(i)}=0$.

Как уже известно, главный вектор и главный момент всех внутренних сил для любой механической системы равны нулю. Сумма работ внутренних сил равна нулю только в случае твердого тела, а для любой механической системы в общем случае она не равна нулю.

В задачах в качестве механической системы часто рассматривают систему сочлененных твердых тел. При вычислении работы всех сил, приложенных к такой системе тел, очевидно, достаточно учесть работу внутренних сил в местах сочленения твердых тел. Если твердые тела сочленяются с помощью шарниров без трения, сумма работ таких двух внутренних сил равна нулю, так как внутренние силы в точке сочленения, как действие и противодействие, равны по модулю, но противоположны по направлению, а перемещение у точек приложения сил общее.

Таким образом, сочленение твердых тел с помощью шарниров без трения при вычислении работы внутренних сил не нарушает жесткости системы тел, так как сумма работ внутренних сил в этих шарнирах равна нулю при любых перемещениях системы сочлененных твердых тел. Систему сочлененных с помощью таких шарниров твердых тел при вычислении работы всех внутренних сил можно считать одним твердым телом. Это характерно и для случая сочленения системы твердых тел с помощью нерастяжимых нитей, канатов и т. п. В этом случае работа внутренних сил натяжений также равна нулю.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия точки и системы. *Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости*, т. е. $mv^2/2$ или $m\bar{v}^2/2$, так как скалярный квадрат любого вектора равен квадрату модуля этого вектора. Кинетическая энергия является скалярной положительной величиной. В СИ единицей кинетической энергии является джоуль: 1 Дж = 1 Н·м.

Кинетической энергией системы T называют сумму кинетических энергий всех точек механической системы, т. е.

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\sum\frac{m_k \bar{v}_k^2}{2}. \qquad (61)$$

Кинетическая энергия как точки, так и системы не зависит от направления скоростей точек. Кинетическая энергия может быть равна нулю для системы только при условии, если все точки системы находятся в покое.

Вычисление кинетической энергии системы (теорема Кёнига). Разложим движение механической системы на переносное поступательное вместе с центром масс системы и относительное по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс. Аналогично тому, как это производилось при выводе формулы для кинетического момента при таком разложении абсолютного движения, для каждой точки системы M_k (см. рис. 57) имеем

$$\bar{\rho}_k=\bar{\rho}_C+\bar{r}_k$$

и соответственно

$$\bar{v}_k=\bar{v}_C+\bar{v}_{kr},$$

где $\bar{v}_{kr}=\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t$ является относительной скоростью точки, так как подвижная система координат движется поступательно ($\bar{\omega}=0$) и, следовательно, полная производная по времени от $\bar{r}_k$ совпадает с локальной производной, равной относительной скорости точки.

Подставляя значение скорости $\bar{v}_k$ в выражение кинетической энергии абсолютного движения системы, т. е. ее движения относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, после очевидных преобразований получаем

$$T=\sum\frac{m_k\bar{v}_k^2}{2}=\frac{\bar{v}_C^2}{2}\sum m_k+\sum\frac{m_k\bar{v}_{kr}^2}{2}+\bar{v}_C\sum m_k\bar{v}_{kr}. \qquad (62)$$

Но

$$\bar{v}_C\sum m_k\bar{v}_{kr}=\bar{v}_C\sum m_k\frac{\mathrm{d}\bar{r}_k}{\mathrm{d}t}=\bar{v}_C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_k\bar{r}_k\right)=0,$$

так как

$$\sum m_k\bar{r}_k=\overrightarrow{\mathrm{const}}=0.$$

Учитывая, что $\sum m_k=M$ — масса системы, и обозначая $T_C^{(r)}$ второе слагаемое в (62), имеем

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+T_C^{(r)}, \qquad (63)$$

где

$$T_C^{(r)}=\sum\frac{m_k v_{kr}^2}{2}.$$

Величина $T_C^{(r)}$ является кинетической энергией относительного движения системы относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с ее центром масс, или кинетической энергией системы относительно центра масс.

Формула (63) выражает так называемую теорему Кёнига: *кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы относительно центра масс.*

Кинетическая энергия твердого тела. При поступательном движении твердого тела кинетическая энергия

$$T=\sum \frac{m_k v_k^2}{2}=\frac{v^2}{2}\sum m_k = M\frac{v^2}{2}, \quad (64)$$

так как при поступательном движении твердого тела скорости всех точек тела одинаковы, т. е. $\bar{v}_k=\bar{v}$, где $\bar{v}$ — общая скорость для всех точек тела.

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении вычисляется так же, как и для одной точки, у которой масса равна массе всего тела.

При вращении тела вокруг неподвижной оси кинетическую энергию можно вычислить, если учесть, что скорость какой-либо точки тела M_k можно выразить (см. рис. 50) как

$$v_k=\omega h_k,$$

где h_k — кратчайшее расстояние от точки M_k до оси вращения; ω — угловая скорость тела.

Тогда

$$T=\sum \frac{m_k v_k^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum m_k h_k^2=\frac{\omega^2}{2} J_z$$

или

$$T=J_z\frac{\omega^2}{2}, \quad (65)$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения Oz.

Следовательно, *кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

Из сравнения (64) и (65) следует, что эти формулы подобны, только при вращательном движении аналогом массы является момент инерции тела относительно оси вращения, а скорости — угловая скорость тела. Такая аналогия между поступательным и вращательным движениями твердого тела может наблюдаться во многих формулах, относящихся к этим двум движениям.

При плоском движении твердого тела кинетическую энергию можно вычислить по теореме Кёнига. Так как в этом случае относительное движение относительно центра масс (точнее, относительно системы координат, движущейся

поступательно вместе с центром масс) является вращением вокруг центра масс с угловой скоростью ω, то

$$T_C^{(r)}=J_{Cz}\frac{\omega^2}{2},$$

где J_{Cz} — момент инерции тела относительно оси Cz, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения. Следовательно, на основании (63) для плоского движения тела имеем

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+J_{Cz}\frac{\omega^2}{2}. \qquad (66)$$

Таким образом, *при плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.*

Учитывая, что $v_C=\omega\cdot CP$ (P — мгновенный центр скоростей), из (66), используя теорему Штейнера, получаем еще одну формулу для кинетической энергии твердого тела при плоском движении:

$$T=M\frac{v_C^2}{2}+J_{Cz}\frac{\omega^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\left[J_{Cz}+M(CP)^2\right]=J_{Pz}\frac{\omega^2}{2}, \qquad (66')$$

где J_{Pz} — момент инерции тела относительно оси Pz, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения,

Если механическая система состоит из нескольких твердых тел, то следует вычислить кинетическую энергию каждого тела, а затем полученные кинетические энергии сложить. Так определяется кинетическая энергия системы тел.

Теорема об изменении кинетической энергии точки

Для материальной точки массой m, движущейся под действием силы $\bar{F}$, основной закон динамики можно представить в виде

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}.$$

Умножая обе части этого соотношения скалярно на дифференциал радиуса-вектора точки $\mathrm{d}\bar{r}$, имеем

$$m\mathrm{d}\bar{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}$$

или

$$m\bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{v}=\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r},$$

где $\bar{v}=\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t$ — скорость точки.

Учитывая, что $\mathrm{d}A = \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{r}$ — элементарная работа, получаем

$$m\bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{v} = \mathrm{d}A.$$

Так как

$$m\bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{v} = \mathrm{d}\left(m\bar{v}^2/2\right) = \mathrm{d}\left(mv^2/2\right),$$

то окончательно

$$\mathrm{d}\left(mv^2/2\right) = \mathrm{d}A. \tag{67}$$

Формула (67) выражает теорему об изменении кинетической энергии для точки в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.*

Если обе части (67) разделить на $\mathrm{d}t$ и учесть, что $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = W$ — мощность, то теорему можно также выразить в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = W. \tag{67'}$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности, подводимой к этой точке.

Интегрируя обе части (67) от точки M_0 до точки M (см. рис. 60), получаем теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \tag{68}$$

т. е. *изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на том же перемещении.*

Пример 1. Тело, имеющее силу тяжести P, падает без начальной скорости на пружину с высоты h. Определить наибольшее обжатие пружины λ, если статическое сжатие ее под действием силы тяжести этого тела равно $\lambda_{\text{ст}}$. Массой пружины пренебречь (рис. 67).

Решение. Применим к движению тела теорему об изменении кинетической энергии точки

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A,$$

приняв за начальное положение тела начало его падения с высоты h, а за конечное — момент максимального обжатия пружины. Изменение кинетической энергии за этот промежуток времени равно нулю, так как $v_0 = 0$ и при наибольшем сжатии пружины $v = 0$. Следовательно, работа $A = 0$. На тело после его соприкосновения с пружиной действуют две силы: сила тяжести тела $\bar{P}$ и сила упругости пружины. Сила $\bar{P}$ совершает работу на перемещении $(h + \lambda)$, сила упругости — на перемещении λ. Следовательно,

$$A = P(h + \lambda) - \frac{c}{2}\lambda^2 = 0.$$

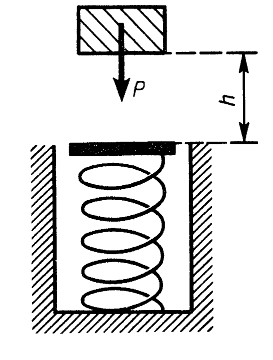


Рис. 67

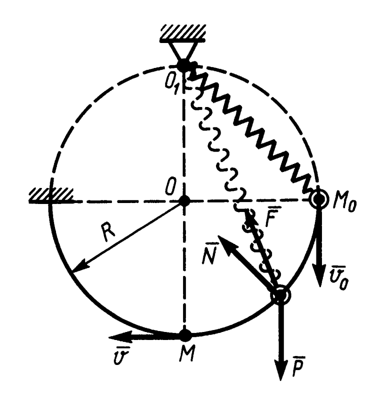


Рис. 68

Но так как в положении статического равновесия $P=c\lambda_{ст}$, то $c=P/\lambda_{ст}$. Поэтому $h+\lambda-\frac{1}{2\lambda_{ст}}\lambda^2=0$, или

$$\lambda^2-2\lambda_{ст}\lambda-2\lambda_{ст}h=0.$$

Решая это квадратное уравнение, имеем

$$\lambda=\lambda_{ст}+\sqrt{\lambda_{ст}^2+2\lambda_{ст}h}.$$

Знак плюс перед корнем выбран потому, что $\lambda>\lambda_{ст}$. При $h=0$ наибольшее обжатие пружины $\lambda=2\lambda_{ст}$, т. е. при динамическом действии груза на пружину ее наибольшее обжатие в два раза больше статического обжатия.

Пример 2. Грузу с силой тяжести P, подвешенному в точке O_1 на пружине, статическое удлинение которой под действием силы тяжести P равно $\lambda_{ст}$, сообщена начальная скорость $\bar{v}_0$ из положения M_0 вертикально вниз (рис. 68).

Определить скорость груза в положении M, если груз, принимаемый за точку, скользит по кольцу радиусом R без трения, $OO_1=R$ и естественная длина пружины равна R.

Решение. Применим к движению груза теорему об изменении кинетической энергии, приняв за начальное положение груза M_0 и конечное — M. Получим

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}-\frac{P}{g}\frac{v_0^2}{2}=A.$$

Работу совершают сила тяжести груза и сила упругости пружины. Нормальная реакция кольца $\bar{N}$ все время перпендикулярна перемещению, и ее работа равна нулю. Следовательно,

$$A=Ph-\frac{c}{2}(r_1^2-r_0^2)=Ph-\frac{P}{2\lambda_{ст}}(r_1^2-r_0^2).$$

В рассматриваемом случае

$$h=R;\quad r_0=R\sqrt{2}-R;\quad r_1=2R-R=R,$$

поэтому

$$A=PR-\frac{P}{2\lambda_{ст}}[R^2-R^2(\sqrt{2}-1)^2]=PR\left[1-\frac{R}{\lambda_{ст}}(\sqrt{2}-1)\right].$$

По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}-\frac{P}{g}\frac{v_0^2}{2}=PR\left[1-\frac{(\sqrt{2}-1)R}{\lambda_{ст}}\right]$$

и

$$v=\sqrt{v_0^2+2gR\left[1-\frac{(\sqrt{2}-1)R}{\lambda_{ст}}\right]}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Приложив к точкам системы все внешние и внутренние силы, для каждой точки системы можно выразить теорему об изменении кинетической энергии (67) в форме

$$\mathrm{d}(m_k v_k^2/2)=\bar{F}_k^{(e)}\cdot \mathrm{d}\bar{r}_k+\bar{F}_k^{(i)}\cdot \mathrm{d}\bar{r}_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Суммируя правые и левые части этих соотношений по всем точкам системы и вынося знак дифференциала за знак суммы, получаем

$$\mathrm{d}\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \bar{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\bar{r}_k,$$

или

$$\mathrm{d}T = \sum \mathrm{d}A_k^{(e)} + \sum \mathrm{d}A_k^{(i)}, \qquad (69)$$

где кинетическая энергия системы

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2};$$

элементарная работа внешних и внутренних сил соответственно будет

$$\mathrm{d}A_k^{(e)} = \bar{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\bar{r}_k, \quad \mathrm{d}A_k^{(i)} = \bar{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\bar{r}_k.$$

Формула (69) и выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: *дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.*

Если обе части (69) проинтегрировать между двумя положениями системы — начальным и конечным, в которых соответственно кинетическая энергия T_0 и T, то, изменяя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$T - T_0 = \sum \int_{M_{k0}}^{M_k} \mathrm{d}A_k^{(e)} + \sum \int_{M_{k0}}^{M_k} \mathrm{d}A_k^{(i)},$$

или

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}, \qquad (70)$$

где $A_k^{(e)} = \int_{M_{k0}}^{M_k} \mathrm{d}A_k^{(e)}$ — работа внешней силы для точки системы M_k при ее перемещении из начального положения M_{k0} в конечное положение M_k; $A_k^{(i)} = \int_{M_{k0}}^{M_k} \mathrm{d}A_k^{(i)}$ — соответственно работа внутренней силы, действующей на точку M_k.

Формула (70) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной или интегральной форме: *изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек системы при том же перемещении системы.*

Частный случай. Для абсолютно твердого тела сумма работ всех внутренних сил системы равна нулю:

$$\sum A_k^{(i)} = 0.$$

Следовательно, теорему об изменении кинетической энергии, например, в конечной форме можно представить в виде

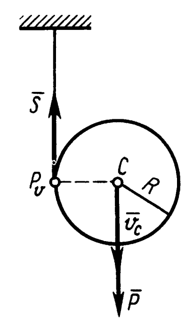


Рис. 69

$$T-T_0=\sum A_k^{(e)}. \tag{71}$$

Изменение кинетической энергии твердого тела при каком-либо перемещении равно сумме работ всех внешних сил, действующих на тело, на соответствующих перемещениях точек тела при том же перемещении твердого тела.

Таким образом, в отличие от рассмотренных других общих теорем динамики системы в теорему об изменении кинетической энергии могут входить внутренние силы. Они не входят в эту теорему в случае абсолютно твердого тела.

Пример 1. В маятнике Максвелла однородный цилиндр силой тяжести P и радиусом R падает вниз без начальной скорости, разматывая нить, намотанную на цилиндр в его среднем сечении.

Определить скорость оси цилиндра в зависимости от высоты ее опускания h (рис. 69).

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии цилиндра как твердого тела имеем

$$T_1-T_0=\sum A_k^{(e)}.$$

Так как в начальный момент времени цилиндр покоится, то $T_0=0$. Цилиндр совершает плоское движение. Его кинетическая энергия в момент достижения высоты h

$$T=\frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2}+J_{Cz}\frac{\omega^2}{2};\quad J_{Cz}=\frac{P}{g}\frac{R^2}{2};\quad v_C=R\omega.$$

Поэтому

$$T=\frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2}+\frac{P}{g}\frac{R^2}{2}\frac{v_C^2}{2R^2}=\frac{3}{4}\frac{P}{g}v_C^2.$$

Внешними силами являются сила тяжести $\bar{P}$ и сила натяжения нити $\bar{S}$. Сила $\bar{S}$ все время приложена в мгновенном центре скоростей цилиндра, имеющем скорость равную нулю. Работа силы тоже равна нулю. Следовательно,

$$\sum A_k^{(e)}=Ph.$$

Подставляя вычисленные величины в теорему об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{3}{4}\frac{P}{g}v_C^2=Ph;\quad v_C=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}.$$

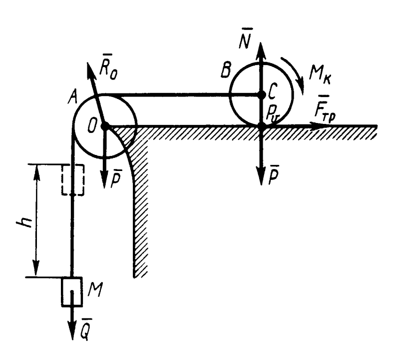


Рис. 70

Пример 2. Груз M, имеющий силу тяжести Q, с помощью нити, переброшенной через блок A, приводит в движение каток B, катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 70). Блок A и каток B — однородные диски радиусом R. Их силы тяжести равны P. Коэффициент трения качения катка k. Трением в осях катка и блока, а также массой нити пренебречь.

Определить скорость груза M в зависимости от его высоты опускания. В начальный момент система покоится.

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии системы, состоящей из груза, нити, блока и катка, имеем

$$T-T_0=\sum A_k^{(e)}+\sum A_k^{(i)},$$

где $T_0=0$, так как вначале система покоилась. Обозначив T_1, T_2 и T_3 кинетические энергии груза, блока и катка соответственно после опускания груза на высоту h, получаем

$$T_1=\frac{Q}{g}\frac{v^2}{2};\ \ T_2=J_{Oz}\frac{\omega_A^2}{2};\ \ T_3=\frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2}+J_{Cz}\frac{\omega_B^2}{2}.$$

Но

$$J_{Oz}=J_{Cz}=\frac{P}{g}\frac{R^2}{2};\ \ \omega_A=\frac{v}{R};\ \ v_C=v;\ \ \omega_B=\frac{v_C}{R}=\frac{v}{R}.$$

Следовательно,

$$T=T_1+T_2+T_3=\frac{v^2}{4g}(2Q+3P+P)=\frac{v^2}{2g}(Q+2P).$$

Так как работа внутренних сил натяжений нити равна нулю, то вообще $\sum A_k^{(i)}=0$ для всей системы твердых тел, соединенных нитью. Работа сил тяжести блока и реакции оси $\bar{R}_0$ равны нулю, так как эти силы приложены в неподвижной точке O. Сила тяжести катка $\bar{P}$ перпендикулярна перемещению, а силы $\bar{N}$ и $\bar{F}_{\text{тр}}$ приложены в мгновенном центре скоростей и, следовательно, работа их равна нулю. Работу производят сила $\bar{Q}$ и пара сил с моментом M_k, препятствующим качению катка по плоскости. Имеем

$$\sum A_k^{(e)}=Qh-M_k\varphi,$$

где φ — угол поворота катка при опускании груза M на h и $M_k=\text{const}$.

Так как

$$M_k=kN=kP=\text{const},\ \ \varphi=h/R,$$

то

$$\sum A_k^{(e)}=Qh-kP\frac{h}{R}.$$

Подставляя значения полученных величин в теорему об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{v^2}{2g}(Q+2P)=h\left(Q-\frac{k}{R}P\right);\ \ v=\sqrt{\frac{2gh\left(Q-\frac{k}{R}P\right)}{Q+2P}}.$$

Заметим, что груз имеет не только силу тяжести $\bar{Q}$, совершающую работу, но он еще обладает массой Q/g и, следовательно, имеет кинетическую энергию. И работа силы тяжести, и кинетическая энергия груза входят в теорему об изменении кинетической энергии.

Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Пусть точка M совершает переносное движение вместе с подвижной системой координат $Oxyz$ относительно основной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и относительное движение по отношению к системе координат $Oxyz$ (рис. 71). Абсолютным движением точки M является ее сложное движение

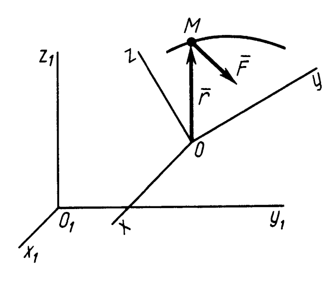


Рис. 71

относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Дифференциальное уравнение относительного движения точки M в векторной форме можно представить в виде

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_\text{к}, \qquad (72)$$

где $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ — сила инерции переносного движения точки; $\bar{\Phi}_\text{к} = -2m(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$ — сила инерции Кориолиса.

Вывод теоремы об изменении кинетической энергии для точки в относительном движении произведем так же, как и вывод аналогичной теоремы в абсолютном движении, умножив обе части (72) скалярно на вектор элементарного относительного перемещения $\tilde{d}\bar{r}$, и преобразуем левую часть полученного выражения. Значок $\sim$ над дифференциалом радиуса-вектора $\bar{r}$ и других векторов указывает, что при дифференцировании надо брать изменение соответствующего вектора относительно подвижной системы координат $Oxyz$. Таким образом,

$$m\bar{a}_r \cdot \tilde{d}\bar{r} = m\frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt} \cdot \tilde{d}\bar{r} = m\tilde{d}\bar{v}_r \cdot \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = m\tilde{d}\bar{v}_r \cdot \bar{v}_r = \tilde{d}\left(\frac{m\bar{v}_r^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right).$$

В правую часть входят элементарные работы сил $\bar{F}$, $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_\text{к}$ на относительном перемещении $\tilde{d}\bar{r}$. Оказывается, что элементарная работа силы инерции Кориолиса на относительном элементарном перемещении всегда равна нулю, так как эта сила перпендикулярна относительной скорости $\bar{v}_r$ и, следовательно, перпендикулярна относительному перемещению $\tilde{d}\bar{r} = \bar{v}_r dt$. В выражение силы инерции Кориолиса входит векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{v}_r$, а оно всегда перпендикулярно каждому из векторов сомножителей, в частности $\bar{v}_r$.

Итак, теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме имеет вид

$$d(mv_r^2/2) = \bar{F} \cdot \tilde{d}\bar{r} + \bar{\Phi}_e \cdot \tilde{d}\bar{r}. \qquad (73)$$

Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении точки выражается так же, как и в абсолютном движении, только к элементарной работе приложенной силы добавляют элементарную работу силы инерции переносного движения на относительном перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии системы. Для системы рассмотрим наиболее важный случай, когда в качестве переносного движения берется поступательное движение системы вместе с центром масс и, следовательно, кинетическую энергию системы в абсолютном движении можно вычислить на основании теоремы Кёнига (63): $T = Mv_C^2/2 + T_C^{(r)}$.

Теорему об изменении кинетической энергии системы для абсолютного движения (см. рис. 56) можно представить в виде

$$dT=\sum\bar{F}_k^{(e)}\cdot d\bar{\rho}_k+\sum\bar{F}_k^{(i)}\cdot d\bar{\rho}_k. \qquad (74)$$

Так как

$$\bar{\rho}_k=\bar{\rho}_C+\bar{r}_k$$

и, следовательно,

$$d\bar{\rho}_k=d\bar{\rho}_C+d\bar{r}_k,$$

то, заменяя в (74) $d\bar{\rho}_k$ и T их значениями, получаем

$$d\left(\frac{Mv_C^2}{2}\right)+dT_C^{(r)}=\left(\sum\bar{F}_k^{(e)}\right)\cdot d\bar{\rho}_C+\sum\bar{F}_k^{(e)}\cdot d\bar{r}_k+$$
$$+\sum\bar{F}_k^{(i)}\cdot d\bar{r}_k+\left(\sum\bar{F}_k^{(i)}\right)\cdot d\bar{\rho}_C. \qquad (75)$$

По свойству внутренних сил, $\sum\bar{F}_k^{(i)}=0$.

Если теорему об изменении кинетической энергии для центра масс выразить так же, как и для точки, у которой масса равна массе всей системы, и эта точка находится под действием всех внешних сил, действующих на систему, то

$$d\left(\frac{Mv_C^2}{2}\right)=\left(\sum\bar{F}_k^{(e)}\right)\cdot d\bar{\rho}_C.$$

Отбросив в (75) эти члены, получим следующую теорему об изменении кинетической энергии системы в относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс:

$$dT_C^{(r)}=\sum\bar{F}_k^{(e)}\cdot d\bar{r}_k+\sum\bar{F}_k^{(i)}\cdot d\bar{r}_k. \qquad (76)$$

Сравнивая (76) с (74), видим, *что теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы, формулируется так же, как и для абсолютного движения системы.*

§ 6. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Для вычисления работы силы на каком-либо перемещении в общем случае необходимо знать закон движения точки на этом перемещении. Есть класс сил, для которых работа не зависит от характера движения точки на рассматриваемом перемещении. Эти силы называют *потенциальными*, и они имеют важное значение в различных областях механики и физики.

Потенциальное силовое поле и силовая функция

Силовым полем называют часть пространства, в каждой точке которого на материальную точку действует определенная сила, зависящая от координат точки и времени. Силовое поле

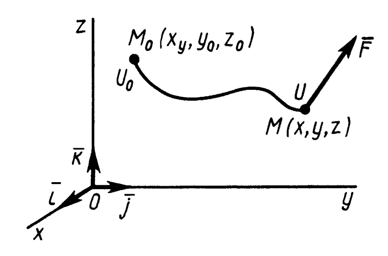


Рис. 72

считают *стационарным*, если действующие силы не зависят от времени. Если же силы зависят от времени, то силовое поле является нестационарным.

Силовое поле называют *потенциальным*, если имеется силовая функция U, зависящая от координат точки и времени для нестационарного силового поля. Через силовую функцию U проекции силы на координатные оси в каждой точке поля (рис. 72) определяются по формулам

$$F_x = \partial U/\partial x; \quad F_y = \partial U/\partial y; \quad F_z = \partial U/\partial z. \qquad (77)$$

Функцию $U(x, y, z, t)$ называют *силовой функцией*.

Рассмотрим основные свойства силовой функции стационарного силового поля. Из (77) следует, что силовая функция определяется с точностью до постоянной, так как для проекций силы на координатные оси требуются только частные производные по координатам от этой функции и добавление постоянной к функции U не влияет на значения F_x, F_y, F_z. Элементарная работа

$$\mathrm{d}A = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}U,$$

т. е.

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}U. \qquad (78)$$

Таким образом, *элементарная работа силы в потенциальном силовом поле равна полному дифференциалу от силовой функции.* Иногда это свойство силовой функции принимают за ее определение; тогда (77) получают из (78).

Полная работа силы $\bar{F}$ на участке от точки M_0 до точки M

$$A = \int_{M_0}^{M} \mathrm{d}A = \int_{M_0}^{M} \mathrm{d}U = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U - U_0,$$

т. е.

$$A = U - U_0, \qquad (79)$$

где $U_0 = U(x_0, y_0, z_0)$, $U = U(x, y, z)$

Следовательно, *полная работа силы на каком-либо перемещении точки равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения и не зависит от формы траектории, по которой оно совершается, если силовая функция является однозначной.*

Из (79) следует, что работа силы в потенциальном силовом поле по любому замкнутому пути равна нулю, так как значение силовой функции в начальной и конечной точках перемещения одинаково, если силовая функция не принимает других значений после возвращения в первоначальную точку.

Силовая функция может принимать другие значения после возвращения в первоначальную точку в зависимости от количества обходов, если область, ограниченная замкнутым путем обхода, содержит в себе специальные особые точки силовой функции.

Если применить понятие вектор-градиента от скалярной функции U

$$\operatorname{grad} U=\bar{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial U}{\partial z},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат, то силу $\bar{F}$ можно выразить как градиент силовой функции U: $\bar{F}=\operatorname{grad} U$

Определим условия, которые позволяют по силам силового поля устанавливать, будет ли силовое поле потенциальным.

Если силовая функция U существует, то

$$\partial F_x/\partial y=\partial^2 U/(\partial y\,\partial x);\quad \partial F_y/\partial x=\partial^2 U/(\partial x\,\partial y).$$

Так как

$$\partial^2 U/(\partial y\,\partial x)=\partial^2 U/(\partial x\,\partial y),$$

то

$$\partial F_x/\partial y=\partial F_y/\partial x \quad \text{или} \quad \partial F_x/\partial y-\partial F_y/\partial x=0.$$

Аналогично,

$$\partial F_z/\partial y-\partial F_y/\partial z=0;\quad \partial F_x/\partial z-\partial F_z/\partial x=0.$$

Таким образом, полученные условия имеют вид

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0. \tag{80}$$

В векторном исчислении доказывается, что условия (80) не только необходимы, но и достаточны для существования силовой функции. Если использовать вектор вихря $\operatorname{rot}\bar{F}$ от вектора силы $\bar{F}$

$$\operatorname{rot}\bar{F}=\bar{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\bar{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right),$$

то условия (80) можно выразить более кратко:

$$\operatorname{rot}\bar{F}=0. \tag{80'}$$

Таким образом, для того чтобы силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Непотенциальными силами являются силы сопротивления, зависящие от скорости, и силы трения. Силы сухого трения не будут потенциальными, так как хотя сила трения постоянна и не зависит от скорости, но направление силы трения от скорости зависит.

Поверхности уровня. Силовые линии

Если рассматривать точки потенциального силового поля, в которых силовая функция имеет одно и то же значение, например $U = C$, то все эти точки располагаются на поверхности, которую называют *поверхностью равного уровня* или *поверхностью уровня.*

Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$U(x, y, z) = C.$$

Отметим некоторые свойства поверхностей уровня.

1. Работа силы равна нулю, если начальная и конечная точки перемещения лежат на одной поверхности уровня. Действительно,

$$A = U - U_0.$$

Если начальная и конечная точки лежат на одной поверхности уровня, то $U = U_0$ и, следовательно, $A = 0$. Работа силы на перемещении между точками M_0 и M не зависит от положения этих точек на своих поверхностях уровня. На любом перемещении между двумя точками рассматриваемых поверхностей уровня она одинакова (рис. 73).

2. Сила в потенциальном силовом поле всегда перпендикулярна поверхности уровня или, точнее, касательной плоскости поверхности уровня. Действительно, пусть имеем поверхность уровня $U = C$. Возьмем на ней две бесконечно близкие точки M и M_1 и вычислим элементарную работу на перемещении ds_1 между этими точками:

$$dA = F ds_1 \cos(\bar{F}, \widehat{\ } \overline{MM_1}).$$

С другой стороны,

$$dA = U(M_1) - U(M) = C - C = 0.$$

Так как F и ds_1 не равны нулю, то $\cos(\bar{F}, \widehat{\ } \overline{MM_1}) = 0$ и, следовательно, угол между силой $\bar{F}$ и перемещением $\overline{MM_1}$, лежащим в касательной плоскости к поверхности уровня, является прямым.

3. Сила в потенциальном силовом поле всегда направлена в сторону возрастающих значений силовой функции. Для доказательства этого свойства силы возьмем точку M_2 на перпендикуляре к поверхности уровня, восставленном в точку M в направлении возрастающих значений силовой функции. Тогда элементарная работа на элементарном перемещении $\overline{MM_2}$, равном ds_2, вычисляется по формуле

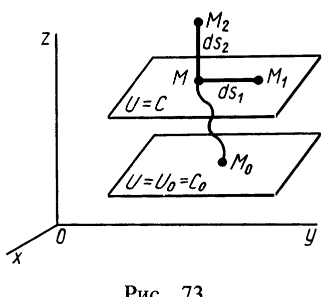


Рис. 73

$$F ds_2 \cos(\bar{F}, \widehat{\ } \overline{MM_2}) = C_2 - C > 0,$$

так как $C_2 > C$.

Следовательно, $\cos(\bar{F}, \wedge \overline{MM_2})>0$; поэтому угол, равный 180°, исключается и получается, что сила $\bar{F}$ направлена по $\overline{MM_2}$ в сторону возрастающих значений силовой функции.

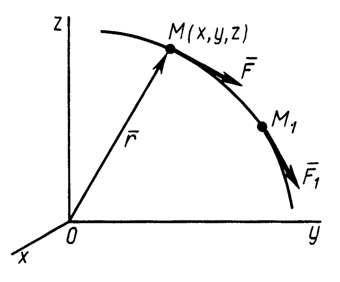


Рис. 74

4. Если все силовое поле разбить поверхностями уровня на n равных значений так, что для первой поверхности уровня $C_1=C/n$, для второй $C_2=2C/n$ и последней $C_n=nC/n=C$, то там, где соседние поверхности уровня ближе друг к другу, модуль силы $\bar{F}$ больше, чем в местах, где поверхности уровня дальше отстоят друг от друга. Это свойство можно проверить, если заметить, что работа между точками любых двух соседних поверхностей в этом случае одна и та же. Следовательно, там, где расстояние между поверхностями меньше, сила по числовому значению больше, и наоборот.

Наряду с поверхностями уровня в силовом поле вводят понятие *силовой линии*, т. е. такой линии, в каждой точке которой сила направлена по касательной к этой линии (рис. 74). Так как вектор $\mathrm{d}\bar{r}$ с проекциями на оси $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ всегда направлен по касательной к кривой, то из условия параллельности $\mathrm{d}\bar{r}$ и $\bar{F}$ следует, что

$$\mathrm{d}x/F_x=\mathrm{d}y/F_y=\mathrm{d}z/F_z. \qquad (81)$$

Эти дифференциальные уравнения относительно координат x, y, z являются дифференциальными уравнениями силовой линии.

Потенциальная энергия

В случае потенциального силового поля наряду с силовой функцией можно ввести другую функцию, характеризующую запас энергии в данной точке поля,— *потенциальную энергию в этой точке* (рис. 75), или потенциальную энергию материальной точки в рассматриваемой точке силового поля.

Потенциальной энергией П материальной точки в рассматриваемой точке силового поля M называют работу, которую совершают силы поля, действующие на материальную точку при перемещении ее из точки M в начальную точку M_0, т. е.

$$П=A_{MM_0},$$

или

$$П=A_{MM_0}=U_0-U=C_0-U. \qquad (82)$$

Рис. 75

Постоянная C_0 одна и та же для всех точек поля, зависящая от того, какая точка поля выбрана за начальную. Очевидно, что потенциальную энергию можно ввести только для потенциального силового поля, в котором работа не зависит от формы перемещения между точками M и M_0. Непотенциальное силовое поле не имеет потенциальной энергии, для него не существует и силовой функции.

На основании (77) и (82) имеем:

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x};\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y};\quad F_z=\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Из (78), (79) и (82) соответственно получаем

$$\mathrm{d}A=\mathrm{d}U=-\mathrm{d}\Pi;\quad A=U-U_0=\Pi_0-\Pi.$$

Из приведенных формул следует, что Π определяется с точностью до произвольной постоянной, которая зависит от выбора начальной точки, но эта произвольная постоянная не влияет на вычисляемые через потенциальную энергию силы и работу этих сил. Учитывая это, формулу (82) можно выразить так:

$$\Pi=-U+\mathrm{const}, \qquad (82')$$

или

$$\Pi=-U.$$

Потенциальную энергию в какой-либо точке поля с точностью до произвольной постоянной можно определить как значение силовой функции в этой же точке, взятое со знаком минус. По существу, достаточно одной из функций Π или U.

Понятие потенциальной энергии было введено раньше, чем силовая функция. Силовая функция более удобна, так как некоторые формулы, содеражщие эту функцию, не имеют знака минус.

Примеры вычисления силовых функций

Если вычислить силовую функцию, то на основании (82′) будет известна и потенциальная энергия. Вычислим силовые функции однородного поля силы тяжести, силового поля линейной силы упругости и силового поля силы притяжения, действующей по закону Ньютона.

Силовая функция однородного поля силы тяжести. Если ось Oz (рис. 76) направить вертикально вверх, то проекции силы тяжести на координатные оси будут равны

$$P_x=0;\quad P_y=0;\quad P_z=-mg.$$

Вычисляя элементарную работу силы $\bar{P}$, получаем

$$\mathrm{d}A=P_x\mathrm{d}x+P_y\mathrm{d}y+P_z\mathrm{d}z=-mg\mathrm{d}z=\mathrm{d}(-mgz).$$

Так как элементарная работа является полным дифференциалом, то силовое поле силы тяжести является потенциальным и силовая функция этого поля определяется по формуле

$$U=-mgz+\text{const}. \qquad (83)$$

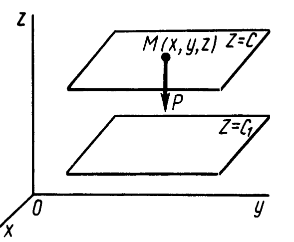


Рис. 76

По формуле (83) определяют силовую функцию однородного поля силы тяжести, т. е. поля, в котором сила тяжести постоянна по модулю и направлению. Уравнение поверхности уровня $U=C$ или $z=\text{const}$, т. е. поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости.

Силовая функция линейной силы упругости. Для линейной силы упругости (см. рис. 62) имеем:

$$\bar{F}=-c\bar{r};\quad F_x=-cx;\quad F_y=-cy;\quad F_z=-cz.$$

Следовательно

$$\mathrm{d}A=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=-c(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=$$
$$=-cr\mathrm{d}r=\mathrm{d}(-cr^2/2),$$

так как $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r$; $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Силовую функцию линейной силы упругости определяют по формуле

$$U=-\frac{cr^2}{2}+\text{const}=-\frac{c}{2}(x^2+y^2+z^2)+\text{const}. \qquad (84)$$

Поверхностями уровня $U=C$ являются сферы $r=\text{const}$.

Силовая функция силы притяжения по закону Ньютона. Вычислим силовую функцию поля земного притяжения. Если выбрать начало координат в центре Земли (рис. 77), то сила притяжения точки земным шаром $F=k/r^2$.

Сила $\bar{F}$ направлена к центру Земли; следовательно, вводя единичный вектор $\bar{r}^0$ по радиусу-вектору от этого центра в рассматриваемую точку M, имеем

$$\bar{r}^0=\frac{\bar{r}}{r};\quad \bar{F}=-\frac{k}{r^2}\bar{r}^0=-\frac{k}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}=-\frac{k}{r^3}\bar{r}.$$

Проецируя силу $\bar{F}$ на координатные оси, получаем:

$$F_x=-\frac{k}{r^3}x;\quad F_y=-\frac{k}{r^3}y;\quad F_z=-\frac{k}{r^3}z.$$

Тогда

$$\mathrm{d}A=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=-\frac{k}{r^3}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=$$
$$=-\frac{k}{r^3}r\mathrm{d}r=\mathrm{d}\left(\frac{k}{r}\right),$$

так как $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r$; $r^2=x^2+y^2+z^2$.

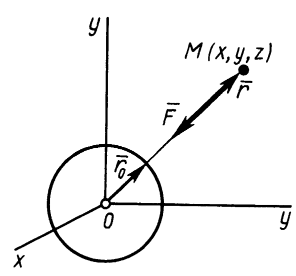


Рис. 77

Таким образом, силовая функция силы притяжения, по закону Ньютона,

$$U=\frac{k}{r}+\text{const}=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\text{const}. \quad (85)$$

Постоянную k для, случая Земли можно выразить так:

$$k=GmM=mgR^2,$$

где M — масса Земли; R — радиус Земли; g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли; m — масса точки; G — постоянная тяготения.

Если вместо Земли рассматривается другое небесное тело, изменяется только постоянная k.

Силовая функция и потенциальная энергия системы

Для механической системы в потенциальном силовом поле можно ввести силовую функцию как функцию, зависящую от координат всех точек системы, т. е. от положения системы в силовом поле. Если система состоит из N точек, то силовая функция $U(x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2;\ ...;\ x_N,\ y_N,\ z_N)$ зависит в общем случае от координат всех точек. Проекции силы, действующей на каждую точку системы,

$$F_{kx}=\frac{\partial U}{\partial x_k};\ F_{ky}=\frac{\partial U}{\partial y_k};\ F_{kz}=\frac{\partial U}{\partial z_k},\ k=1,\ 2,\ ...,\ N. \quad (86)$$

Сумма элементарных работ всех сил, действующих на точки системы, определяется по формуле

$$\sum \mathrm{d}A_k=\sum(F_{kx}\mathrm{d}x_k+F_{ky}\mathrm{d}y_k+F_{kz}\mathrm{d}z_k)=$$
$$=\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k+\frac{\partial U}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k+\frac{\partial U}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k\right)=\mathrm{d}U,$$

или

$$\sum \mathrm{d}A_k=\mathrm{d}U. \quad (87)$$

Таким образом, сумма элементарных работ сил поля, действующих на механическую систему, равна полному дифференциалу от силовой функции. Если вычислить сумму работ, которую совершат силы поля, действующие на механическую систему при перемещении системы из положения (M_0), в котором имеется силовая функция U_0, в положение (M), в котором есть силовая функция U, то

$$\sum A_k=\sum\int_{(M_0)}^{(M)}\mathrm{d}A_k=\int_{(M_0)}^{(M)}\mathrm{d}U=U-U_0,$$

или

$$\sum A_k=U-U_0. \quad (88)$$

Следовательно, сумма работ сил поля, действующих на систему при перемещении системы из одного начального положения в другое, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы.

Потенциальной энергией системы Π в рассматриваемом положении (M) потенциального силового поля называют сумму работ сил поля, действующих на систему, которую эти силы совершают при перемещении системы из рассматриваемого положения в начальное положение (M_1), т. е.

$$\Pi=\sum A_k=U_1-U=-U+\text{const}, \tag{89}$$

где U — значение силовой функции для системы сил в положении (M); U_1 — значение силовой функции в начальном положении.

Из (86) — (89) следует:

$$F_{kx}=\frac{\partial U}{\partial x_k}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_k};\ F_{ky}=\frac{\partial U}{\partial y_k}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y_k};\ F_{kz}=\frac{\partial U}{\partial z_k}=-\frac{\partial \Pi}{\partial z_k};\ \sum \mathrm{d}A_k=\mathrm{d}U=$$
$$=-\mathrm{d}\Pi;\ \sum A_k=U-U_0=\Pi_0-\Pi.$$

§ 7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Закон сохранения механической энергии точки

Для материальной точки теорему об изменении кинетической энергии можно выразить в следующем виде:

$$mv^2/2-mv_0^2/2=A.$$

Если материальная точка движется в стационарном потенциальном силовом поле, то

$$A=\Pi_0-\Pi.$$

Следовательно,

$$mv^2/2-mv_0^2/2=\Pi_0-\Pi, \quad \text{или} \quad mv^2/2+\Pi=mv_0^2/2+\Pi_0=h,$$

где h — постоянная величина.

Обозначая через E полную механическую энергию точки, состоящую из ее кинетической и потенциальной энергий, получаем

$$E=mv^2/2+\Pi=h.$$

Таким образом, *при движении точки в стационарном потенциальном силовом поле ее полная механическая энергия остается постоянной величиной*, что является законом сохранения механической энергии для точки, который и есть первый интеграл дифференциальных уравнений движения точки.

Закон сохранения механической энергии системы

Теорему об изменении кинетической энергии для системы можно представить в виде

$$T-T_0=\sum\left(A_k^{(e)}+A_k^{(i)}\right)=\sum A_k. \tag{90}$$

Если система движется в стационарном потенциальном силовом поле, то

$$\sum A_k = \Pi_0 - \Pi,$$

где Π — потенциальная энергия внутренних и внешних сил, действующих на систему. Следовательно,

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi \quad \text{или} \quad T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = h,$$

где h — постоянная величина.

Обозначая через E полную механическую энергию системы, имеем

$$E = T + \Pi = h. \tag{91}$$

Формула (91) выражает закон сохранения механической энергии для системы: *полная механическая энергия при движении системы в стационарном потенциальном силовом поле внешних и внутренних сил является постоянной величиной.*

В случае абсолютно твердого тела работа всех внутренних сил равна нулю и, следовательно, потенциальная энергия внутренних сил является постоянной величиной, которую можно считать равной нулю. Тогда в (91) за потенциальную энергию следует принять только потенциальную энергию внешних сил, которая вместе с кинетической энергией является постоянной величиной. При движении изменяемой механической системы сумма кинетической энергии системы и потенциальной энергии внешних сил не является постоянной. Она становится постоянной только вместе с потенциальной энергией внутренних сил. Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называют *консервативными.*

При движении точки или системы в непотенциальном силовом поле, встречающемся в действительности, когда непотенциальность связана с действием сил сопротивления, механическая энергия изменяется, причем она всегда уменьшается на работу сил сопротивления. Потерянная системой часть механической энергии обычно переходит в тепловую энергию. Полная энергия всех видов (механическая, тепловая, химическая и т. д.) не изменяется при движении точки или системы в любом силовом поле. При этом происходит только преобразование одного вида энергии в другой.

Рассмотрим теперь комплексный пример на основные виды движения твердого тела: поступательное, вращение вокруг неподвижной оси и плоское движение, а также вычисление количества движения, кинетического момента и кинетической энергии системы.

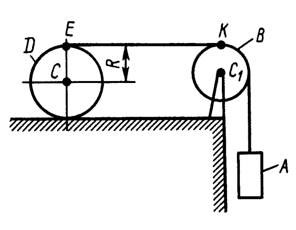


Рис. 78

Пример. Груз A силой тяжести $P_1 = 150$ Н опускается вниз, приводя в движение с помощью невесомой и нерастяжимой нити однородный диск D силой тяжести $P = 900$ Н (рис. 78). Нить намотана на диск D и переброшена через блок B силой тяжести $P_2 = 140$ Н. Нить по блоку не

скользит. Диск D имеет радиус $R=30$ см. Он движется по горизонтальному рельсу. Коэффициент трения скольжения между диском и рельсом $f=0{,}4$; коэффициент трения качения $\delta=0{,}15$ см. Блок считать однородным диском с радиусом r. Трением на оси блока пренебречь. Система начинает движение из состояния покоя.

Определить уравнения движения диска D, давления блока B на ось, количество движения и кинетическую энергию системы и кинетический момент катка D относительно его точки соприкосновения с рельсом через 1 с после начала движения.

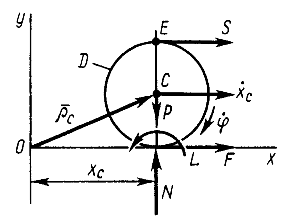


Рис. 79

Решение. Составим уравнения движения отдельных тел под действием приложенных к ним сил.

Каток D совершает плоское движение. К нему приложены внешние для него сила тяжести $\bar{P}$, натяжение нити $\bar{S}$ и реакция рельса, состоящая из нормальной реакции $\bar{N}$, силы трения $\bar{F}$ и пары сил, препятствующей качению с моментом L (рис. 79). Силу трения предполагаем направленной в положительную сторону оси Ox.

При составлении уравнений моменты сил и угловые характеристики тел считаем положительными, если они направлены против часовой стрелки.

Для катка D имеем следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{P}{g}\ddot{x}_C=\sum F_{kx}^{(e)}=S+F, \quad \frac{P}{g}\ddot{y}_C=\sum F_{ky}^{(e)}=N-P; \\ &J_{Cz}\ddot{\varphi}=\sum M_{Cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)=FR-SR+L, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

где J_{Cz} — момент инерции катка относительно оси Cz, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска. При сделанном выборе осей координат $y_C=R=\text{const}$ и, следовательно, $\dot{y}_C=\ddot{y}_C=0$.

Блок B вращается вокруг неподвижной оси C_1z, проходящей через его центр масс C_1 (рис. 80). На блок действуют внешние силы тяжести $\bar{P}_2$, реакция оси с составляющими $\bar{X}_1$, $\bar{Y}_1$ и силы натяжения нитей, числовые значения которых S и S_1. Дифференциальное уравнение вращения блока вокруг неподвижной оси

$$J_{C_1z}\ddot{\varphi}_1=\sum M_{C_1z}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)=Sr-S_1r \qquad \text{(б)}$$

где J_{C_1z} — момент инерции блока относительно оси вращения C_1z.

Груз A совершает прямолинейное движение по оси O_1z (рис. 81). К нему приложены внешние силы тяжести $\bar{P}_1$ и натяжения нити, числовое значение которой S_1. Уравнение движения груза

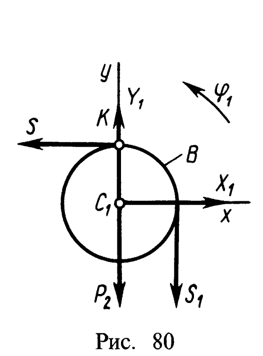


Рис. 80

Рис. 81

$$\frac{P_1}{g}\ddot{z}=\sum F_{kx}^{(e)}=P_1-S_1. \qquad (в)$$

Имеем систему пяти уравнений (а), (б), (в), в которую входят девять неизвестных: $\ddot{x}_C$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{z}$, N, F, L, S, S_1. Так как $\ddot{y}_C=0$, то его считаем известным.

К системе пяти уравнений движения следует добавить уравнения связи движений тел вследствие нерастяжимости нити и отсутствия ее скольжения по катку D и блоку B.

Если переменные величины отсчитывать от начальных положений тел, то для момента времени t для блока и груза (рис. 80, 81) получаем $z=-r\varphi_1$ и после дифференцирований по времени

$$\dot{z}=-r\dot{\varphi}_1 \text{ и } \ddot{z}=-r\ddot{\varphi}_1. \qquad (г)$$

Знак минус здесь и дальше ставится для того, чтобы при отрицательном значении φ_1 (вращение блока происходит по часовой стрелке) получить положительное значение z (груз движется вниз в положительную сторону оси O_1z).

Так как нить не скользит по катку D и блоку B, то скорости и касательные ускорения точек E катка и K блока (рис. 80, 81) одинаковы, т. е. $\dot{x}_E=\dot{x}_K$ и $\ddot{x}_E=\ddot{x}_K$. Но для точки K блока $\dot{x}_K=-r\dot{\varphi}_1$ и $\ddot{x}_K=-r\ddot{\varphi}_1$. Для точки E катка, приняв за полюс точку C, по формуле связи скоростей двух точек тела при плоском движении для произвольного момента времени с учетом знаков величин, имеем

$$\dot{x}_E=\dot{x}_C-R\dot{\varphi}.$$

После дифференцирования по времени

$$\ddot{x}_E=\ddot{x}_C-R\ddot{\varphi}.$$

Таким образом, получаем дополнительное уравнение связи движений

$$\ddot{x}_C-R\ddot{\varphi}=-r\ddot{\varphi}_1. \qquad (д)$$

Кроме того, считаем, что при движении груза A вниз каток D катится по рельсу. Условие его качения для момента пары, препятствующей качению, выразится в форме

$$L=L_{\max}=\delta N.$$

В тех случаях, когда направление качения катка заранее не известно, следует задаться направлением L и решить задачу. Если вращение катка получится при этом против принятого направления для L, то предположение о направлении L правильно. Если вращение катка получится по направлению L, то следует изменить направление для L на обратное и заново решать систему уравнений.

Качение катка может быть как со скольжением, так и без скольжения. Поэтому сила трения остается неизвестной и по модулю, и по направлению.

Добавились два уравнения (г) и (д) и одно неизвестное L выразилось через другое N. Для полной определенности задачи необходимо иметь еще одно уравнение и, кроме того, следует еще установить характер движения катка, т. е. будет ли он катиться со скольжением или без скольжения.

Предположим, что каток катится без скольжения, т. е. его мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения катка с рельсом. Тогда скорость $\dot{x}_C$ точки C, предполагаемой положительной, выражается через угловую скорость $\dot{\varphi}$ зависимостью $\dot{x}_C=-R\dot{\varphi}$, так как $\dot{\varphi}$ при этом отрицательно. Эта зависимость справедлива для любого момента времени. Путем дифференцирования ее по времени получим дополнительное условие

$$\ddot{x}_C=-R\ddot{\varphi}. \qquad (е)$$

После этого уравнение (д) примет вид

$$2R\ddot{\varphi}=r\ddot{\varphi}_1. \qquad (д')$$

Уравнение (е) справедливо только при отсутствии скольжения катка в отличие от других уравнений, которые не зависят от характера движения катка.

Итак, имеем систему семи линейных уравнений с семью неизвестными, считая, что L исключено из уравнений благодаря зависимости $L=\delta N$.

Характер движения катка можно установить, если из полученной системы уравнений определить силу трения $\bar{F}$ и сравнить ее числовое значение с предельной силой трения $F_{max}=fN$. Если окажется $|F|<F_{max}$, то система уравнений не приводит к противоречию с динамическим условием отсутствия скольжения. Предположение об отсутствии скольжения катка правильно. Если же $|F|>F_{max}$, то предположение об отсутствии скольжения неверно, так как требует такой силы трения, которая возникнуть не может. В этом случае каток катится со скольжением и условие (е) не выполняется. Но при качении со скольжением $|F|=F_{max}=fN$, т. е. имеем дополнительное уравнение для одной из неизвестных вместо отбрасываемого уравнения (е). Число неизвестных оказывается равным числу неизвестных и задачу можно решить. Силу трения F_{max} следует подставить в уравнения вместо F с тем же знаком, с которым получилась из уравнений сила трения F, не соответствующая по модулю.

Для определения силы трения F с учетом условия (е) целесообразно свести систему семи линейных уравнений последовательным исключением неизвестных к двум линейным уравнениям для F и, например, $\ddot{\varphi}$, чтобы затем использовать правило Крамера.

Так как $\ddot{y}_C=0$, то из второго уравнения системы (а) следует $N=P$ и потому $F_{max}=fP=0{,}36$ кН, $L=\delta N=\delta P$. Определим предварительно силы натяжения S и S_1, в общем случае не используя (е). Из уравнения (в) с учетом (г) и (д) имеем

$$S_1=P_1-\frac{P_1}{g}\ddot{z}=P_1+\frac{P_1}{g}r\ddot{\varphi}_1=P_1-\frac{P_1}{g}(\ddot{x}_C-R\ddot{\varphi}). \qquad \text{(ж)}$$

При отсутствии скольжения, т. е. при выполнении условия (е), из (ж) получаем

$$S_1=P_1+\frac{2P_1}{g}R\ddot{\varphi}. \qquad \text{(ж')}$$

Из уравнения (б) с учетом (ж) и значения момента инерции $J_{C_1z}=\dfrac{P_2}{g}\dfrac{r^2}{2}$ определяем силу натяжения:

$$S=S_1+\frac{J_{C_1z}}{r}\ddot{\varphi}_1=P_1-(\ddot{x}_C-R\ddot{\varphi})\left(\frac{P_1}{g}+\frac{J_{C_1z}}{r^2}\right)=P_1-(\ddot{x}_C-R\ddot{\varphi})\left(\frac{2P_1+P_2}{2g}\right). \qquad \text{(з)}$$

Таким образом, при выполнении условия (е), имеем

$$S=P_1+\frac{R\ddot{\varphi}}{g}(2P_1+P_2). \qquad \text{(з')}$$

Определим силу трения, предположив отсутствие скольжения, т. е. когда для сил натяжения выполняются условия (ж') и (з'). Подставляя эти значения S_1 и S в оставшиеся два уравнения системы (а) с учетом (е), после несложных преобразований получаем следующую систему двух линейных уравнений:

$$\ddot{\varphi}(P+2P_1+P_2)\frac{R}{g}+F=-P_1;$$

$$\ddot{\varphi}\left(\frac{P}{2}+2P_1+P_2\right)\frac{R}{g}-F=-P_1+\frac{\delta}{R}P,$$

так как момент инерции катка $J_{Cz}=\dfrac{P}{g}\dfrac{R^2}{2}$. Эту систему уравнений кратко можно выразить в форме

$$a_1\ddot{\varphi}+F=-P_1;\quad a_2\ddot{\varphi}-F=b, \qquad \text{(и)}$$

где $a_1=(P+2P_1+P_2)\dfrac{R}{g}=\dfrac{1340\cdot 0{,}3}{9{,}8}=41{,}1;\quad a_2=\left(\dfrac{P}{2}+2P_1+P_2\right)\dfrac{R}{g}=\dfrac{890\cdot 0{,}8}{9{,}8}=27{,}3;$
$b=-P_1+\dfrac{\delta}{R}P=-145{,}5.$

Из системы уравнений (и) определяем силу трения:

$$F=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -P_1 \\ a_2 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{a_1 b+a_2 P_1}{-(a_1+a_2)}=27{,}5\ \text{Н}. \qquad \text{(к)}$$

Сила трения из уравнений получается со знаком плюс; следовательно, предположение о ее направлении в положительную сторону оси Ox оказалось правильным.

Сравнивая числовое значение полученной силы трения F с предельной силой трения $F_{max}=fP=0{,}36$ кН $=360$ Н, имеем $|F|<F_{max}$. Предположение об отсутствии скольжения не привело к противоречию. Каток действительно катится без скольжения и $\ddot{x}_C$ и $\ddot{\varphi}$ удовлетворяют уравнению (е).

Подставляя значение полученной силы трения из (к) в первое уравнение (и), получаем

$$\ddot{\varphi}=\frac{-(P_1+F)}{P+2P_1+P_2}\frac{g}{R}=-\frac{177{,}5\cdot 9{,}8}{1340\cdot 0{,}3}=-4{,}34\ \text{с}^{-2}.$$

Так как $\ddot{\varphi}=\text{const}$, то $\varphi=\ddot{\varphi}\dfrac{t^2}{2}+C_1t+C_2$. В начальный момент $t=0$, $\varphi=0$ и $\dot{\varphi}=0$. Поэтому $C_1=C_2=0$.

Итак,

$$\varphi=\ddot{\varphi}\frac{t^2}{2}=-2{,}17t^2\ \text{рад}.$$

Из (е) находим

$$\ddot{x}_C=-R\ddot{\varphi}=1{,}30\ \text{м/с}^2.$$

Так как $\ddot{x}_C=\text{const}$, то $x_C=\ddot{x}_C\dfrac{t^2}{2}+C_3t+C_4$. Из начальных условий $t=0$, $x_C=0$, $\dot{x}_C=0$ получаем $C_3=C_4=0$. Следовательно,

$$x_C=\ddot{x}_C\frac{t^2}{2}=0{,}65t^2\ \text{м}.$$

Получены следующие уравнения движения катка D:

$$x_C=0{,}65t^2\ \text{м};\quad y_C=R=0{,}3\ \text{м};\quad \varphi=-2{,}17t^2\ \text{рад}. \qquad \text{(л)}$$

По известным значениям $\ddot{x}_C$ и $\ddot{\varphi}$, используя (д′), (г) и условие (е), получаем

$$z=-r\ddot{\varphi}_1=-2R\ddot{\varphi}=2\ddot{x}_C;\quad \dot{z}=2\dot{x}_C=2\ddot{x}_C t. \qquad \text{(м)}$$

Реакцию оси блока определяем из условия, что центр масс блока C_1 неподвижен, и потому на основании теоремы о движении центра масс суммы проекций внешних для блока сил на оси координат C_1x и C_1y равны нулю. Имеем

$$X_1-S=0;\quad Y_1-P_2-S_1=0,$$

или

$$X_1=S;\quad Y_1=P_1+S_1.$$

Определяем силы натяжения нитей S и S_1 из (ж′) и (з′):

$$S_1=P_1+\frac{2P_1}{g}R\ddot{\varphi}=111\ \text{Н};\quad S=P_1+\frac{2P_1+P_2}{g}R\ddot{\varphi}=93\ \text{Н}.$$

После этого для силы реакции оси блока имеем

$$X_1=93\ \text{Н};\quad Y_1=251\ \text{Н};\quad R_1=\sqrt{X_1^2+Y_1^2}=145\ \text{Н}.$$

Давление блока на ось по числовой величине равно реакции оси блока R_1.

Количество движения, кинетическую энергию и кинетический момент определим из общих теорем динамики.

По теореме об изменении количества движения системы,

$$\frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_{kx}^{(e)};\quad \frac{\mathrm{d}Q_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_{ky}^{(e)}.$$

Система не движется в направлении оси Oz, поэтому $Q_z=0$.

Внешними силами системы являются силы тяжести $\bar{P}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, составляющие реакции оси блока $\bar{X}_1$, $\bar{Y}_1$ и силы реакции рельса $\bar{N}$, $\bar{F}$, и пара сил с моментом L. Все силы натяжения нити для всей системы являются внутренними силами. Для проекций внешних сил на оси координат имеем

$$\sum F_{kx}^{(e)}=F+X_1=27{,}5+93=120{,}5\ \text{Н};$$

$$\sum F_{ky}^{(e)}=N+Y_1-P-P_1-P_2=900+251-1190=-39\ \text{Н}.$$

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}t}=120{,}5;\quad \frac{\mathrm{d}Q_y}{\mathrm{d}t}=-39,$$

или

$$\mathrm{d}Q_x=120{,}5\mathrm{d}t;\quad \mathrm{d}Q_y=-39\mathrm{d}t.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $t=0$ до $t=1$ с и учитывая, что при $t=0$, $Q_x=Q_y=0$, получаем

$$Q_x=120{,}5\ \text{Н}\cdot\text{с};\quad Q_y=-39\ \text{Н}\cdot\text{с};\quad Q=\sqrt{Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2}=126{,}5\ \text{Н}\cdot\text{с}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии системы для промежутка времени от $t=0$ до $t=1$ с имеем

$$T-T_0=\sum A_k^{(e)}+\sum A_k^{(i)}.$$

Здесь $T_0=0$. Кроме того, $\sum A_k^{(i)}=0$, так как силы натяжения нитей дают работу, равную нулю.

Работа внешних сил системы за рассматриваемый промежуток времени

$$\sum A_k^{(e)}=P_1z+F(x_C+R\varphi)+L\varphi=150\cdot 1{,}3-1{,}35\cdot 2{,}2\approx 192\ \text{Н}\cdot\text{м},$$

так как

$$z=\ddot{x}_Ct^2=1{,}3;\quad \varphi=-2{,}2;\quad L=\delta P=0{,}0015\cdot 900=1{,}35\ \text{Н}\cdot\text{м}$$

и путь точки соприкосновения катка D с рельсом $x_C+R\varphi=0$ при качении катка без скольжения. Другие внешние силы $\bar{P}$, $\bar{N}$, $\bar{P}_2$, $\bar{X}_1$, $\bar{Y}_1$ не совершают работы, так как перпендикулярны перемещениям или приложены в неподвижных точках.

Таким образом,

$$T=\sum A_k^{(e)}=192\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

По теореме об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси Oz для катка D,

$$\frac{\mathrm{d}K_{Oz}}{\mathrm{d}t}=\sum M_{Oz}(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Внешними силами катка D являются силы $\bar{P}$, $\bar{S}$, $\bar{N}$, $\bar{F}$ и пара сил с моментом L. Имеем

$$\sum M_{Oz}(\bar{F}_k^{(e)})=-S\cdot 2R-Px_C+Nx_C+L=-93\cdot 0{,}6+1{,}35=-54{,}4\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Так как $N=P$, то

$$-Px_C+Nx_C=0.$$

После этого

$$\mathrm{d}K_{Oz}=-54{,}4\mathrm{d}t.$$

Интегрируя это соотношение от начального момента времени до момента, соответствующего $t=1$ с, получаем

$$K_{Oz}=-54{,}4 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}.$$

Проверим полученные значения количества движения, кинетической энергии и кинетического момента, вычислив их по формулам.

Количество движения системы $\bar{Q}$ состоит из векторной суммы количеств движения отдельных тел:

$$\bar{Q}=\bar{Q}_A+\bar{Q}_B+\bar{Q}_D. \qquad \text{(н)}$$

Так как центр масс блока B неподвижен, то $\bar{Q}_B=0$. Для катка D

$$\bar{Q}_D=\frac{P}{g}\bar{v}_C;\ Q_{Dx}=\frac{P}{g}\dot{x}_C;\ Q_{Dy}=0.$$

Груз A движется в положительную сторону оси O_1z (вниз); следовательно, $O_{Az}=\dfrac{P_1}{g}\dot{z}$.

Проецируя (н) на оси координат, причем Ox направлена по горизонтали вправо, а Oy — по вертикали вверх и используя (м), получаем

$$Q_x=Q_{Dx}=\frac{P}{g}\dot{x}_C=\frac{P}{g}\ddot{x}_Ct;\ Q_y=-Q_{Az}=-\frac{P_1}{g}\dot{z}=-\frac{P_1}{g}2\ddot{x}_Ct.$$

При $t=1$ с

$$Q_x=900\cdot 1{,}3/9{,}8=119;\ Q_y=-150\cdot 2{,}6/9{,}8=-40;$$

$$Q=\sqrt{Q_x^2+Q_y^2}\approx 127 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

Кинетическая энергия системы T состоит из кинетических энергий отдельных тел:

$$T=T_D+T_B+T_A.$$

Каток совершает плоское движение. Его кинетическая энергия при $t=1$ с

$$T_D=\frac{P}{g}\dot{x}_C^2+J_{Cz}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{3}{4}\frac{P}{g}\dot{x}_C^2=\frac{3}{4}\frac{P}{g}(\ddot{x}_Ct)^2=\frac{3\cdot 900\cdot 1{,}3^2}{4\cdot 9{,}8}\approx 117 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Блок вращается вокруг неподвижной оси; следовательно, при $t=1$ с

$$T_B=J_{C_1z}\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}=\frac{P_2}{4g}r^2\dot{\varphi}_1^2=\frac{P_2}{g}(\ddot{x}_Ct)^2=\frac{140\cdot 1{,}3^2}{9{,}8}\approx 24 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Груз движется поступательно, а потому при $t=1$ с

$$T_A=\frac{P_1}{g}\frac{\dot{z}^2}{2}=\frac{P_1}{g}\frac{(2\ddot{x}_Ct)^2}{2}=\frac{2P_1}{g}(\ddot{x}_Ct)^2=\frac{300\cdot 1{,}3^2}{9{,}8}\approx 52 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Кинетическая энергия системы через 1 с после начала движения системы

$$T=T_D+T_B+T_A=117+24+52\approx 193 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Кинетический момент катка D относительно неподвижной точки O рельса вычисляем по формуле

$$\bar{K}_O=\bar{\rho}_C\times M\bar{v}_C+\bar{K}_C^{(r)},$$

где

$$K_C^{(r)}=|K_{Cz}^{(r)}|=J_{Cz}|\dot{\varphi}|.$$

Для проекции $\bar{K}_O$ на ось Oz, учитывая, что кинетический момент в направлении часовой стрелки следует считать отрицательным, имеем

$$K_{Oz} = -RM\dot{x}_C + J_{Cz}\dot{\varphi}.$$

Так как плечо вектора $M\bar{v}_C$, приложенного в точке C относительно точки O, не зависит от ее выбора на рельсе, то и K_{Oz} не зависит от положения точки O. Точкой O может быть точка соприкосновения катка с рельсом. В рассматриваемом случае $K_{Ox} = K_{Oy} = 0$, поэтому при $t = 1$ с

$$K_O = |K_{Oz}| = \left| -\frac{P}{g} R\dot{x}_C + \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}\dot{\varphi} \right| = \frac{PR}{2g}|-2\dot{x}_C + R\dot{\varphi}| = \frac{PR}{2g}|-3\dot{x}_C| =$$

$$= \frac{3PR}{2g}|-\ddot{x}_C t| = \frac{3 \cdot 900 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}3}{2 \cdot 9{,}8} \approx 54 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Полученные двумя способами величины Q, T и K_O почти совпадают. Небольшие расхождения связаны с округлениями величин при вычислениях.

ГЛАВА 5

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

§ 1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Принцип Даламбера для материальной точки

Законы Ньютона содержат в себе все необходимое для рассмотрения движения любых механических систем. Но первоначально они применялись только для рассмотрения движения свободной материальной точки и свободного твердого тела до тех пор, пока не была дополнительно сформулирована аксиома связей. Для рассмотрения движения несвободных систем Даламбер предложил специальный принцип, получивший название принципа Даламбера. Этот принцип был сформулирован в терминах «потерянных» движений.

В настоящее время, когда считается справедливой аксиома связей, уравнения движения несвободной материальной точки являются такими же, как и для свободной, только к действующим на точку активным или заданным силам добавляют силы реакций связей.

Современное выражение принципа Даламбера не отличается по содержанию от уравнений движения материальной точки, но для многих задач оно более удобно. Принцип Даламбера для свободной материальной точки эквивалентен основному закону динамики. Для несвободной точки он эквивалентен основному закону вместе с аксиомой связей.

Уравнение движения материальной точки массой m относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и реакций связей имеет вид

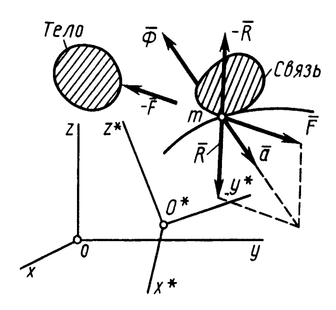


Рис. 82

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}. \quad (1)$$

Сила $\bar{F}$ является равнодействующей активных сил, $\bar{R}$ — равнодействующей реакций связей, $\bar{a}$ — ускорением точки относительно инерциальной системы отсчета. Назовем *силой инерции* материальной точки произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком, т. е. $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$. Если использовать понятие силы инерции точки и перенести все слагаемые (1) в правую часть уравнения, то получим

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (2)$$

Так как силы $\bar{F}$, $\bar{R}$ и $\bar{\Phi}$ (рис. 82) образуют систему сходящихся сил и удовлетворяют условию (2), то они являются системой сил, эквивалентной нулю, т. е.

$$\{\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}\} \backsim 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) или эквивалентное ему условие (3) выражает принцип Даламбера для точки: *при движении материальной точки активные силы и реакции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил.*

Из (2) в проекциях на координатные оси получаем три условия равновесия сил:

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0; \quad F_y + R_y + \Phi_y = 0; \quad F_z + R_z + \Phi_z = 0. \quad (4)$$

Ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета можно разложить на составляющие по осям декартовой системы координат, а также на касательное и нормальное ускорения и на переносное, относительное ускорения и ускорение Кориолиса, если движение точки считать сложным, состоящим из переносного и относительного. Соответственно силу инерции $\bar{\Phi}$ можно разложить на такие же составляющие:

$$\bar{\Phi} = \Phi_x \bar{i} + \Phi_y \bar{j} + \Phi_z \bar{k} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n = \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_к. \quad (5)$$

Касательная сила инерции

$$\bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau,$$

где $\bar{a}_\tau$ — касательное ускорение; нормальная, или центробежная, сила инерции

$$\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n,$$

где $\bar{a}_n$ — нормальное ускорение. Переносная и относительная силы инерции, а также сила инерции Кориолиса через ускорения выражаются соответственно так:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e; \quad \bar{\Phi}_r = -m\bar{a}_r; \quad \bar{\Phi}_к = -m\bar{a}_к.$$

Аналогично выражаются через проекции ускорения на прямоугольные оси координат проекции силы инерции Φ_x, Φ_y, Φ_z. На силы инерции существует несколько точек зрения. Согласно первой точке зрения, сила инерции условно прикладывается к точке, чтобы уравнению движения (1) придать более удобную форму условия равновесия (2). Поэтому силу инерции $\bar{\Phi}$ называют фиктивной, даламберовой, условной и т. д. С этой точки зрения силы инерции в принципе Даламбера не являются настоящими, реальными силами и отличаются не только от обычных сил, создаваемых действием тел, но даже и от сил инерции в относительном движении.

Согласно другой, наиболее распространенной точке зрения, сила инерции считается приложенной по частям к «ускоряющим» телам. Для обоснования приводят следующие рассуждения. Материальная точка движется с ускорением $\bar{a}$ потому, что на нее действуют какие-то тела с силой, равной $(\bar{F}+\bar{R})$ (см. рис. 83). По закону о равенстве сил действия и противодействия материальная точка должна оказывать противодействие этим телам с такой же по модулю, но противоположной по направлению силой $-(\bar{F}+\bar{R})$, которая, согласно (2), равна силе инерции $\bar{\Phi}$, т. е. $\bar{\Phi}=-(\bar{F}+\bar{R})$.

Это соотношение дает основание считать, что сила инерции приложена к «ускоряющим» телам, т. е. телам, которые сообщают точке ускорение.

Действительно, сила инерции $\bar{\Phi}$ является векторной суммой сил действия точки на «ускоряющие» ее тела. Она служит суммарной оценкой этого действия. Однако при рассмотрении относительного движения точки вводятся переносная $\bar{\Phi}_e$ и кориолисова силы инерции $\bar{\Phi}_к$. Для подвижного наблюдателя их следует считать приложенными к движущейся материальной точке, но для них невозможно указать материальные тела, действием которых на точку можно объяснить эти силы.

Переносная и кориолисова силы инерции являются частью полной силы инерции $\bar{\Phi}$. Если для части силы невозможно указать тела, которые ее создают, то это же справедливо и для всей силы инерции $\bar{\Phi}$. Однако в рассматриваемом случае указывается материальный объект, который действует с силой инерции $\bar{\Phi}$ на ускоряющие тела. Этим объектом является движущаяся с ускорением материальная точка.

Согласно третьей точке зрения, силу инерции считают приложенной к движущейся материальной точке, по крайней мере это справедливо для наблюдателя, который находится в собственной системе отсчета этой точки. *Собственной системой отсчета материальной точки* называют такую систему отсчета, относительно которой точка находится в покое, т. е. относительно которой ее относительные скорость и ускорение равны нулю. В этой системе отсчета справедливо условие относительного равновесия для сил

$$\bar{F}+\bar{R}+\bar{\Phi}_e^*=0,$$

где $\bar{\Phi}_e^*=-m\bar{a}_e^*$ — переносная сила инерции в собственной системе отсчета. Но в собственной системе отсчета $\bar{v}_r^*=0$, $\bar{a}_r^*=0$ и кориолисово ускорение $\bar{a}_к^*=0$, а тогда $\bar{a}=\bar{a}_e^*$ и, следовательно, $\bar{\Phi}=\bar{\Phi}_e^*$.

Таким образом, *принцип Даламбера есть условие относительного равновесия для сил в собственной системе отсчета.* Относительно собственного наблюдателя сила инерции $\bar{\Phi}_e^*$ приложена к движущейся точке, а следовательно, к ней приложена и совпадающая с переносной силой инерции в собственной системе отсчета $\bar{\Phi}_e^*$ сила инерции абсолютного движения $\bar{\Phi}$. Силу $\bar{\Phi}$ в этом случае считают дополнительным действием на точку поля Вселенной. Такая точка зрения на силы инерции требует изменения понятия приложенной силы и изменения некоторых основных аксиом динамики (см. Приложение).

Принцип Даламбера для системы материальных точек

Рассмотрим систему N материальных точек. К каждой точке системы в общем случае приложены равнодействующая активных сил и равнодействующая реакций связей. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получим

$$\bar{F}_k+\bar{R}_k+\bar{\Phi}_k=0, \quad k=1, 2, ..., N, \tag{6}$$

где $\bar{\Phi}_k=-m_k\bar{a}_k$ — сила инерции для k-й точки (рис. 83).

Условия (6) можно представить в эквивалентной форме:

$$\{\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k\}\backsim 0, \quad k=1, 2, ..., N; \tag{7}$$

N векторных условий (6) или (7) выражают принцип Даламбера для системы: *при движении механической системы активная сила и реакция связей вместе с силой инерции составляют равновесную систему сил для каждой точки системы.*

Принцип Даламбера для системы по своему содержанию не отличается от уравнений движения точек системы.

Представим равнодействующую силу, приложенную к каждой точке системы, разложенной не на активную силу и реакцию связей, а на внутреннюю и внешнюю силы по отношению ко всей системе:

$$\bar{F}_k+\bar{R}_k=\bar{F}_k^{(e)}+\bar{F}_k^{(i)}.$$

Тогда принцип Даламбера для системы можно представить в другой форме:

$$\bar{F}_k^{(e)}+\bar{F}_k^{(i)}+\bar{\Phi}_k=0, \quad k=1, 2, ..., N. \tag{8}$$

Из принципа Даламбера для системы в форме (6) или (8) можно получить следствия в виде шести

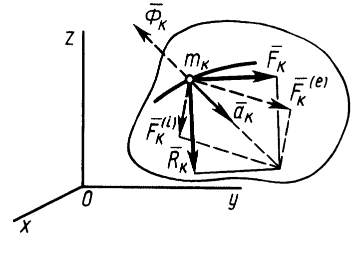


Рис. 83

условий равновесия для сил, действующих на точки системы, и сил инерции.

Если просуммировать левые части (6) по всем точкам системы, то

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k = 0. \tag{9}$$

Умножая векторно каждое из соотношений (6) слева на радиус-вектор точки $\bar{r}_k$ и опять суммируя по точкам системы, получаем

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{N} (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) + \sum_{k=1}^{N} (\bar{r}_k \times \bar{R}_k) + \sum_{k=1}^{N} (\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) = 0, \\ \text{или} \\ \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Следствие из принципа Даламбера (10) справедливо как для неподвижной в рассматриваемой инерциальной системе отсчета точки, так и движущейся, так как начало радиусов-векторов $\bar{r}_k$ можно выбирать в любой точке.

Условия (9) и (10), если выразить их через проекции на координатные оси, дадут шесть условий равновесия, аналогичных условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, в статике.

Если использовать принцип Даламбера в форме (8), то получим следствия в форме

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k = 0; \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0, \tag{12}$$

так как внутренние силы системы по свойству этих сил удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(i)} = 0; \quad \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)}) = 0.$$

Если спроецировать (11) и (12) на координатные оси, то опять получим шесть условий равновесия для сил. Особенностью условий равновесия сил в форме (11) и (12) является отсутствие в них внутренних сил, что делает их особенно удобными при решении многих задач динамики системы.

В действительности условие (11) представляет собой теорему об изменении количества движения, а (12) — теорему об

изменении кинетического момента для системы, если их представить в форме

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)} - \frac{d\bar{Q}}{dt} = 0; \qquad (11')$$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) - \frac{d\bar{K}_0}{dt} = 0. \qquad (12')$$

Сравнивая (11) с (11′) и (12) с (12′), получаем формулы для вычисления главных вектора и момента сил инерции системы через количество движения и кинетический момент:

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k = -\frac{d\bar{Q}}{dt}; \qquad (13)$$

$$\bar{L}_O^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0\left(\bar{\Phi}_k\right) = -\frac{d\bar{K}_0}{dt}. \qquad (14)$$

В (12′) точка O неподвижна в выбранной инерциальной системе отсчета. Следовательно, по формуле (14) можно вычислить главный момент сил инерции только для неподвижной точки O. Для движущейся точки вместо (12′) следует использовать ранее доказанную теорему об изменении кинетического момента для движущейся точки A:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_A\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) - \frac{d\bar{K}_A}{dt} + M\bar{v}_C \times \bar{v}_A = 0. \qquad (12'')$$

После замены в (12) точки O на A и сравнения с (12″) получим формулу для вычисления главного момента сил инерции относительно движущейся точки А:

$$\bar{L}_A^{(\Phi)} = -\frac{d\bar{K}_A}{dt} + M\bar{v}_C \times \bar{v}_A = -\left(\frac{d\bar{K}_A}{dt} + \bar{v}_A \times M\bar{v}_C\right). \qquad (14')$$

В формуле (14′) $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_C$ — соответственно скорости точки A и центра масс C относительно рассматриваемой инерциальной системы отсчета; M — масса системы.

Так как $\bar{Q} = M\bar{v}_C$, то для главного вектора сил инерции получаем формулу

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k = -\frac{d\bar{Q}}{dt} = -M\bar{a}_C. \qquad (15)$$

Здесь M — масса системы, $\bar{v}_C$ и $\bar{a}_C$ — скорость и ускорение центра масс соответственно.

В тех случаях движения твердого тела, когда силы инерции приводятся к равнодействующей, последняя совпадает по модулю и направлению с главным вектором этих сил. Но равнодействующая сил инерции необязательно проходит через центр масс тела, хотя ее модуль и направление всегда определяются по формуле (15).

Проецируя векторы из (14) на ось Oz, получаем

$$L_z^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N} M_z(\bar{\Phi}_k)=-\frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t}. \qquad (14'')$$

Аналогичные формулы можно получить и для других координатных осей. В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz, как известно,

$$K_z=J_z\omega.$$

Подставляя это значение K_z в (14″), имеем

$$\sum_{k=1}^{N} M_z(\bar{\Phi}_k)=-\frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t}=-J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-J_z\varepsilon,$$

или

$$L_z^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N} M_z(\bar{\Phi}_k)=-J_z\varepsilon. \qquad (16)$$

По формуле (16) вычисляют момент сил инерции относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси. Этот момент создают касательные силы инерции, так как нормальные силы инерции для каждой точки тела пересекают ось вращения и, следовательно, момента не создают.

Из принципа Даламбера для системы можно получить еще одно следствие—теорему об изменении кинетической энергии. Для этого умножаем (8) скалярно на $\mathrm{d}\bar{r}_k$ и суммируем полученные соотношения по всем точкам. Получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k+\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(i)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k+\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k=0,$$

или в других обозначениях

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{d}A_{\bar{F}_k^{(e)}}+\sum_{k=1}^{N} \mathrm{d}A_{\bar{F}_k^{(i)}}+\sum_{k=1}^{N} \mathrm{d}A_{\bar{\Phi}_k}=0. \qquad (17)$$

Сравнивая (17) с теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{d}A_{\bar{F}_k^{(e)}}+\sum_{k=1}^{N} \mathrm{d}A_{\bar{F}_k^{(i)}}-\mathrm{d}T=0,$$

получаем выражение для суммы элементарных работ сил инерции через кинетическую энергию системы T:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k=\sum_{k=1}^{N} \mathrm{d}A_{\bar{\Phi}_k}=-\mathrm{d}T. \qquad (18)$$

Интегрируя (18), получаем

$$\sum_{k=1}^{N} A_{\bar{\Phi}_k}=-(T-T_0). \qquad (19)$$

Таким образом, *сумма работ сил инерции на каком-либо перемещении системы равна изменению кинетической энергии на этом перемещении, взятому с обратным знаком.*

Методы решения задач динамики с использованием сил инерции называют *кинетостатическими.*

Силы инерции твердого тела в частных случаях его движения

При поступательном движении. Если твердое тело движется поступательно, то ускорения его точек одинаковы. Силы инерции этих точек составляют систему параллельных сил, направленных в одну сторону. Такая система сил приводится к равнодействующей силе $\bar{\Phi}^*$, которая равна главному вектору, т. е.

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} = -M\bar{a}_C.$$

Линия действия равнодействующей силы инерции в этом случае проходит через центр масс, так как главный момент сил инерции точек тела относительно центра масс

$$\bar{L}_C^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_C(\bar{\Phi}_k) = 0.$$

Действительно, согласно следствию из принципа Даламбера (12) для центра масс, имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)}) + \bar{L}_C^{(\Phi)} = 0.$$

При поступательном движении тело не совершает вращения вокруг центра масс и поэтому $\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$. Следовательно, и $\bar{L}_C^{(\Phi)} = 0$.

При вращении вокруг неподвижной оси. Если выбрать за центр приведения сил инерции точку O на оси вращения Oz, то в этой точке получим главный вектор и главный момент сил инерции:

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C; \quad \bar{L}_O^{(\Phi)} = -\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t.$$

Если центр масс находится на оси вращения, то $\bar{\Phi} = 0$. Проекции главного момента сил инерции на неподвижные оси координат в общем случае можно вычислить по формулам

$$L_x^{(\Phi)} = -\mathrm{d}K_x/\mathrm{d}t \neq 0; \quad L_y^{(\Phi)} = -\mathrm{d}K_y/\mathrm{d}t \neq 0; \quad L_z^{(\Phi)} = -\mathrm{d}K_z/\mathrm{d}t = -J_z\varepsilon.$$

Моменты сил инерции $L_x^{(\Phi)}$ и $L_y^{(\Phi)}$ вычисляются в следующем параграфе. Они равны нулю, если ось Oz является главной осью инерции для точки O.

При плоском движении. Выбрав за центр приведения сил инерции центр масс, получим в этой точке главный вектор и главный момент сил инерции. Для главного вектора сил инерции имеем

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C.$$

Для главного момента сил инерции относительно центра масс C, который является движущейся точкой при плоском движении тела, получим формулы, аналогичные формуле (14), выведенной для неподвижной точки O.

Согласно следствию из принципа Даламбера (12), главный момент сил инерции относительно центра масс удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_C\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) + \bar{L}_C^{(\Phi)} = 0.$$

С другой стороны, из теорем об изменении кинетического момента относительно центра масс для абсолютного и относительного движений имеем

$$\mathrm{d}\bar{K}_C/\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_C\left(\bar{F}_k^{(e)}\right); \quad \mathrm{d}\bar{K}_C^{(r)}/\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_C\left(\bar{F}_k^{(e)}\right).$$

Из этих соотношений следует

$$\bar{L}_C^{(\Phi)} = -\mathrm{d}\bar{K}_C/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\bar{K}_C^{(r)}/\mathrm{d}t.$$

Проекции $L_{Cx}^{(\Phi)}$, $L_{Cy}^{(\Phi)}$ на оси координат с началом в центре масс и движущиеся поступательно вместе с центром масс соответственно

$$L_{Cx}^{(\Phi)} = -\mathrm{d}K_{Cx}^{(r)} \neq 0; \quad L_{Cy}^{(\Phi)} = -\mathrm{d}K_{Cy}^{(\Phi)}/\mathrm{d}t \neq 0;$$

$$L_{Cz}^{(\Phi)} = -\mathrm{d}K_{Cz}^{(r)}/\mathrm{d}t = -J_{Cz}\varepsilon,$$

где ось Cz перпендикулярна плоскости, параллельно которой совершают движение точки тела.

Моменты сил инерции $L_{Cx}^{(\Phi)}$ и $L_{Cy}^{(\Phi)}$ вычисляются так же, как и при вращении тела вокруг неподвижной оси. Они равны нулю, если ось Cz является главной осью инерции для точки C. Это, в частности выполняется, если тело имеет плоскость симметрии, проходящую через центр масс и параллельную плоскости движения тела.

Пример 1. Груз A силой тяжести P_1 опускается вниз по грани призмы с силой тяжести P, приводя в движение груз B, имеющий силу тяжести P_2, с помощью нити, перекинутой через невесомый блок C.

Считая пол, грани призмы и грузов гладкими, определить давление призмы на пол и выступ, препятствующий перемещению призмы, а также силу натяжения нити. Углы наклона боковых граней призмы α и β (рис. 84, *а, б*).

Решение. Применим к системе, состоящей из призмы, грузов, нити и блока, следствия из принципа Даламбера, составив условия равновесия внешних сил и сил инерции системы.

Предположим, что ускорение груза A направлено вниз и равно a. Для абсолютных значений сил инерции грузов A и B соответственно имеем

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{g}a; \quad \Phi_2 = \frac{P_2}{g}a.$$

Направления сил инерции $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ указаны на рисунке.

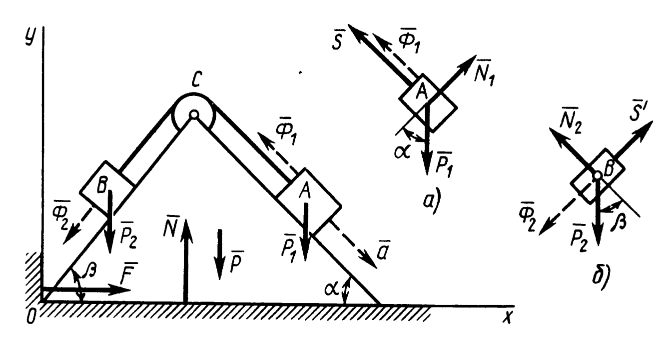


Рис. 84

Составляя условия равновесия внешних сил системы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}$, $\bar{N}$, $\bar{F}$ и сил инерции $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ в проекциях на координатные оси Ox, Oy получим:
для Ox

$$F-\frac{P_1}{g}a\cos\alpha-\frac{P_2}{g}a\cos\beta=0;$$

для Oy

$$N-P_1-P_2-P+\frac{P_1}{g}a\sin\alpha-\frac{P_2}{g}a\sin\beta=0.$$

Из этих уравнений имеем

$$\left.\begin{aligned} F&=\frac{a}{g}(P_1\cos\alpha+P_2\cos\beta);\\ N&=P_1+P_2+P-\frac{a}{g}(P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta).\end{aligned}\right\} \quad \text{(а)}$$

Для определения силы натяжения нити S и ускорения грузов применим принцип Даламбера к каждому грузу в отдельности, составив условия равновесия внешних сил грузов и сил инерции на направление нити. Получим:
для груза A (рис. 84, a)

$$S+\frac{P_1}{g}a-P_1\sin\alpha=0; \quad \text{(б)}$$

для груза B (рис. 85, $б$)

$$S-\frac{P_2}{g}a-P_2\sin\beta=0, \quad \text{(б')}$$

так как $S'=S$ для случая невесомого блока.

Из (б) и (б′), исключая S, определяем a:

$$a=g\frac{P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta}{P_1+P_2}. \quad \text{(в)}$$

Для того чтобы груз двигался вниз, должно выполняться условие $a>0$ или

$$P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta>0.$$

Подставляя полученное значение a в (а), получаем

$$F=\frac{(P_1\cos\alpha+P_2\cos\beta)(P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta)}{P_1+P_2};$$

$$N=P_1+P_2+P-\frac{(P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta)^2}{P_1+P_2}.$$

Давление призмы на выступ, согласно закону о равенстве сил действия и противодействия, будет $\bar{F}'=-\bar{F}$; давление призмы на пол $\bar{N}'=-\bar{N}$.

Для определения натяжения нити S следует подставить значение ускорения a в одно из уравнений (б) или (б′). Тогда

$$S=P_2\sin\beta+\frac{P_2}{g}a=\frac{P_1P_2(\sin\alpha+\sin\beta)}{P_1+P_2}.$$

Пример 2. Однородный тонкий стержень AB силой тяжести P и длиной l жестко скреплен с вертикальным валом OO_1 под углом α (рис. 85, *а*). Вал OO_1 вместе со стержнем AB вращается с постоянной угловой скоростью ω. Определить реакции стержня в заделке A.

Решение. Применим к внешним силам и силам инерции стержня AB следствия из принципа Даламбера в форме условий равновесия сил. Неизвестные реакцию $\bar{R}_A$ и векторный момент в заделке $\bar{M}_A$ разложим по осям координат.

Если разбить весь стержень на элементарные участки одинаковой длины, то ускорения середин этих участов распределятся вдоль стержня по линейному закону (рис. 85, *б*), так как ускорение каждой точки стержня $a_k=r_k\omega^2$, где r_k — расстояние k-й точки до оси вращения. Силы инерции элементарных участков стержня, принимаемых за точки, распределятся тоже по линейному закону, образуя треугольник. Распределенные так параллельные силы имеют равнодействующую силу, линия действия которой отстоит от основания треугольника на расстоянии $^1/_3 l$ по стержню и $^2/_3 l$ от вершины треугольника. Равнодействующая сила $\bar{\Phi}^*$ всегда равна главному вектору $\bar{\Phi}$ распределенных по треугольнику сил. Для главного вектора сил инерции имеем

$$\bar{\Phi}=-M\bar{a}_C,$$

где $\bar{a}_C$ — ускорение центра масс стержня, т. е. его средней точки. Таким образом,

$$\Phi^*=\Phi=\frac{P}{g}a_C=\frac{P}{g}\omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha.$$

Составим шесть условий равновесия сил, приняв, что стержень в рассматриваемый момент времени находится в координатной плоскости Ayz. Тогда для проекций сил и моментов их относительно осей координат Ax, Ay, Az имеем:

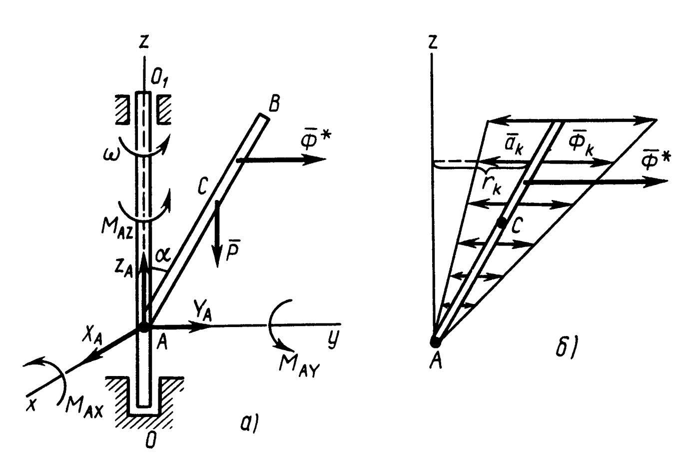


Рис. 85

$$X_A=0;\quad Y_A+\Phi^*=0;\quad Z_A-P=0;$$
$$M_{Ax}-P\frac{l}{2}\sin\alpha-\Phi^*\frac{2}{3}l\cos\alpha=0;$$
$$M_{Ay}=0;\quad M_{Az}=0.$$

Подставляя в эти уравнения значение Φ^*· и решая их относительно неизвестных, получаем:

$$X_A=0;\quad Y_A=-\frac{P}{g}\omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha;\quad Z_A=P;$$
$$M_{Ax}=\frac{Pl}{2}\left(\sin\alpha+\frac{l\omega^2}{3g}\sin2\alpha\right);$$
$$M_{Ay}=0;\quad M_{Az}=0.$$

Для силы реакции и момента в заделке имеем

$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=P\sqrt{1+\frac{l^2\omega^4}{4g^2}\sin^2\alpha};$$
$$M_A=\sqrt{M_{Ax}^2+M_{Ay}^2+M_{Az}^2}=\frac{Pl}{2}\left(\sin\alpha+\frac{l\omega^2}{3g}\sin2\alpha\right).$$

§ 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Формулы для реакций

Твердое тело, имеющее две закрепленные точки A и B, вращается вокруг неподвижной оси Oz, проходящей через эти точки, под действием внешних приложенных сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_N$ (рис. 86). Освободив тело от связей в точках A и B, приложим к телу силы реакций связей $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$, проекции которых на оси координат обозначим соответственно X_A, Y_A, Z_A и X_B, Y_B, Z_B. Эти силы тоже являются внешними силами для тела.

Приложив к точкам тела силы инерции, применим к телу следствия из принципа Даламбера для системы, считая, что тело разбито на N частиц (малых), принимаемых за точки. Для этого следует приравнять нулю главный вектор и главный момент всех внешних сил и сил инерции точек тела. Имеем

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k+\bar{R}_A+\bar{R}_B+\bar{\Phi}=0;\\&\sum_{k=1}^{N}\bar{M}_O(\bar{F}_k)+\bar{M}_O(\bar{R}_A)+\bar{M}_O(\bar{R}_B)+\bar{L}_O^{(\Phi)}=0.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

Для определения из (20) сил реакций $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ необходимо выразить главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}$ и главный момент этих сил $\bar{L}_O^{(\Phi)}$ через величины, характеризующие само тело и его вращение. Для главного вектора сил инерции используем выражение

$$\bar{\Phi}=\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k=\sum_{k=1}^{N}(-m_k\bar{a}_k)=-M\bar{a}_C,\tag{21}$$

где M — масса тела; $\bar{a}_C$ — ускорение центра масс.

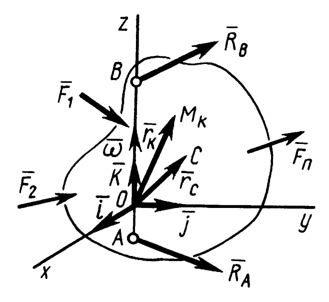


Рис. 86

При вращении тела вокруг неподвижной оси ускорение любой точки тела вычисляется по формуле

$$\bar{a}_k = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_k + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k), \qquad (22)$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор рассматриваемой точки; $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\omega}$ — соответственно векторы углового ускорения и угловой скорости тела, направленные по оси вращения. Для центра масс в (22) вектор $\bar{r}_k$ следует заменить радиусом-вектором центра масс $\bar{r}_C$.

Векторное произведение двух векторов выражается определителем, в первой строке которого расположены единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, направленные вдоль осей координат, а в двух других строках — проекции на оси координат векторов сомножителей. Определитель можно разложить по элементам первой строки. Получим

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \bar{i}(-\omega y_C) + \bar{j}\omega x_C + \bar{k}0,$$

так как $\omega_x = \omega_y = 0$ и $\omega_z = \omega$. Здесь x_C, y_C, z_C — координаты центра масс. Используя полученные величины для ускорения центра масс $\bar{a}_C$, имеем

$$\bar{a}_C = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_C & \omega x_C & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-\varepsilon y_C - \omega^2 x_C) + \bar{j}(\varepsilon x_C - \omega^2 y_C) + \bar{k}0, \qquad (22')$$

так как $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Из (21) с учетом (22′) для проекций главного вектора сил инерции на оси координат получаем выражения

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= -M a_{Cx} = M y_C \varepsilon + M x_C \omega^2; \\ \Phi_y &= -M a_{Cy} = -M x_C \varepsilon + M y_C \omega^2; \\ \Phi_z &= -M a_{Cz} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Формулы (23) можно применять не только для главного вектора сил инерции, но и для силы инерции отдельной точки тела. Для этого следует массу тела M в них заменить массой точки m_k, а координаты x_C, y_C, z_C центра масс — координатами x_k, y_k, z_k точки. Так, для силы инерции k-й точки $\bar{\Phi}_k$, согласно (23), имеем

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{kx}&=-m_k a_{kx}=m_k y_k \varepsilon+m_k x_k \omega^2;\\ \Phi_{ky}&=-m_k a_{ky}=-m_k x_k \varepsilon+m_k y_k \omega^2;\\ \Phi_{kz}&=-m_k a_{kz}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (23')$$

Проекции главного момента сил инерции относительно точки на оси вращения $\bar{L}_O^{(\Phi)}$ на оси координат вычисляем по формулам для моментов сил относительно этих осей. Используя (23′) и вынося ω и ε за знаки сумм, получаем:

$$L_x^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N}\left(y_k\Phi_{kz}-z_k\Phi_{ky}\right)=\varepsilon\sum_{k=1}^{N}m_k x_k z_k-$$

$$-\omega^2\sum_{k=1}^{N}m_k y_k z_k=\varepsilon J_{xz}-\omega^2 J_{yz};$$

$$L_y^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N}\left(z_k\Phi_{kx}-x_k\Phi_{kz}\right)=\varepsilon\sum_{k=1}^{N}m_k y_k z_k+$$

$$+\omega^2\sum_{k=1}^{N}m_k x_k z_k=\varepsilon J_{yz}+\omega^2 J_{xz};$$

$$L_z^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N}\left(x_k\Phi_{ky}-y_k\Phi_{kx}\right)=-\varepsilon\sum_{k=1}^{N}m_k\left(x_k^2+y_k^2\right)=-\varepsilon J_z,$$

где $J_{xz}=\sum_{k=1}^{N}m_k x_k z_k$; $J_{yz}=\sum_{k=1}^{N}m_k y_k z_k$; $J_z=\sum_{k=1}^{N}m_k\left(x_k^2+y_k^2\right)$ — центробежные и осевой моменты инерции. Получены формулы для вычисления проекций главного момента сил инерции $\bar{L}_O^{(\Phi)}$ на координатные оси:

$$L_x^{(\Phi)}=\varepsilon J_{xz}-\omega^2 J_{yz};\quad L_y^{(\Phi)}=\varepsilon J_{yz}+\omega^2 J_{xz};\quad L_z^{(\Phi)}=-\varepsilon J_z. \qquad (24)$$

При выводе формул (23) и (24) для проекций главного вектора и главного момента сил инерции на оси координат не делалось никаких предположений относительно этих осей. Они могут быть как неподвижными осями, относительно которых рассматривается вращение тела, так и подвижными осями, скрепленными с вращающимся телом. Поэтому эти формулы можно применять как для неподвижных осей координат, так и для осей координат, вращающихся вместе с телом.

Из (20) в проекциях на координатные оси с учетом (23) и (24) получаем следующую систему уравнений для определения проекций полных реакций X_A, Y_A, Z_A и X_B, Y_B, Z_B:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} F_{kx}+X_A+X_B+My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} F_{ky}+Y_A+Y_B-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} F_{kz}+Z_A+Z_B=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} M_x(\bar{F}_k)+Y_Ah_A-Y_Bh_B+\varepsilon J_{xz}-\omega^2 J_{yz}=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} M_y(\bar{F}_k)-X_Ah_A+X_Bh_B+\varepsilon J_{yz}+\omega^2 J_{xz}=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} M_z(\bar{F}_k)-\varepsilon J_z=0,
\end{aligned}\right\} \quad (25)
$$

так как

$$
M_x(\bar{R}_A)+M_x(\bar{R}_B)=Y_Ah_A-Y_Bh_B;
$$
$$
M_y(\bar{R}_A)+M_y(\bar{R}_B)=-X_Ah_A+X_Bh_B.
$$

В последнее уравнение системы (25) не входят силы реакций закрепленных точек. Это уравнение является уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz. Из него по заданным силам определяется угловое ускорение ε, если известен момент инерции тела относительно оси вращения. По угловому ускорению интегрированием определяется угловая скорость, если известно ее значение в начальный момент. Для определения шести неизвестных проекций сил реакций остается пять уравнений. Система уравнений (25) не позволяет определить каждую из неизвестных Z_A и Z_B. Из третьего уравнения системы можно определить только сумму этих неизвестных. Для того чтобы из этой системы можно было определить все неизвестные, необходимо закрепить тело в точках A и B так, чтобы неизвестных проекций сил реакций в них было не более пяти. Этого можно достигнуть, например, поместив в точке A подпятник, а в точке B — подшипник (рис. 87). Для таких опор оси тела $Z_B=0$ и все оставшиеся неизвестные могут быть определены из системы уравнений (25).

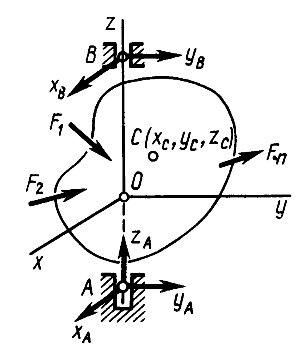


Рис. 87

Разложим полные реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ на статические и динамические составляющие:

$$
\bar{R}_A=\bar{R}_A^{\text{ст}}+\bar{R}_A^{\text{д}};\quad \bar{R}_B=\bar{R}_B^{\text{ст}}+\bar{R}_B^{\text{д}}.
$$

Статическими реакциями $\bar{R}_A^{\text{ст}}$ и $\bar{R}_B^{\text{ст}}$ называют части полных реакций, которые

статически уравновешивают приложенные внешние силы. Уравнение для их определения получим из первых пяти уравнений системы (25), положив в них $\varepsilon=0$ и $\omega=0$. Имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} F_{kx}+X_A^{\text{ст}}+X_B^{\text{ст}}=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} F_{ky}+Y_A^{\text{ст}}+Y_B^{\text{ст}}=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} F_{kz}+Z_A^{\text{ст}}=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} M_x(\bar{F}_k)+Y_A^{\text{ст}}h_A-Y_B^{\text{ст}}h_B=0;\\
&\sum_{k=1}^{N} M_y(\bar{F}_k)-X_A^{\text{ст}}h_A+X_B^{\text{ст}}h_B=0.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

В векторной форме (26) принимают вид

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k+\bar{R}_A^{\text{ст}}+\bar{R}_B^{\text{ст}}=0;$$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k)+\bar{M}_0(\bar{R}_A^{\text{ст}})+\bar{M}_0(\bar{R}_B^{\text{ст}})=0. \tag{26$'$}$$

Это известные из статики уравнения равновесия для сил, приложенных к твердому телу, имеющему неподвижную ось вращения. Но под действием приложенных внешних сил тело может вращаться вокруг неподвижной оси Oz. От вращения у точек тела возникнут силы инерции. Части полных реакций $\bar{R}_A^{\text{д}}$ и $\bar{R}_B^{\text{д}}$, которые уравновешивают силы инерции точек тела, называют *динамическими реакциями.*

Уравнения для определения динамических реакций получим из первых пяти уравнений системы (25), если учтем, что приложенные внешние силы уравновешены статическими реакциями. Получим

$$\left.\begin{aligned}
&X_A^{\text{д}}+X_B^{\text{д}}+My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2=0;\\
&Y_A^{\text{д}}+Y_B^{\text{д}}-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2=0;\\
&Y_A^{\text{д}}h_A-Y_B^{\text{д}}h_B+\varepsilon J_{xz}-\omega^2 J_{yz}=0;\\
&-X_A^{\text{д}}h_A+X_B^{\text{д}}h_B+\varepsilon J_{yz}+\omega^2 J_{xz}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

В векторной форме (27) принимают вид

$$\bar{R}_A^{\text{д}}+\bar{R}_B^{\text{д}}+\bar{\Phi}=0;\quad \bar{M}_O(\bar{R}_A^{\text{д}})+\bar{M}_O(\bar{R}_B^{\text{д}})+\bar{L}_O^{(\Phi)}=0. \tag{27$'$}$$

Составляющих динамических реакций опор в направлении оси вращения Oz не возникает, так как у точек тела нет составляющих сил инерции в этом направлении. В неподвижных точках тела имеются только поперечные по отношению к оси

вращения составляющие динамических реакций. Это справедливо при любом закреплении точек A и B, позволяющем телу вращаться вокруг оси, проходящей через эти точки. Из системы уравнений (27) определяются все проекции динамических реакций на оси координат.

Статическая уравновешенность

Тело, имеющее неподвижную ось вращения, называют *статически уравновешенным*, если центр масс этого тела находится на оси вращения. Для статически уравновешенного тела с осью вращения Oz координаты центра масс тела $x_C = y_C = 0$. Из первых двух уравнений системы (27) в этом случае следует:

$$X_A^д + X_B^д = 0; \quad Y_A^д + Y_B^д = 0 \tag{28}$$

или

$$\bar{R}_A^д = -\bar{R}_B^д. \tag{28'}$$

Динамические реакции для статически уравновешенного тела образуют пару сил. Пара сил может уравновешиваться только парой сил. Следовательно, силы инерции точек тела, уравновешивающие динамические реакции, в этом случае тоже приводятся к одной паре сил.

Используя (28), из двух последних уравнений системы (27) получим:

$$X_A^д = -X_B^д = \frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{xz}}{h_A + h_B}; \quad -Y_A^д = Y_B^д = \frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h_A + h_B}$$

и

$$R_A^д = R_B^д = \frac{1}{h_A + h_B}\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)}, \tag{29}$$

где

$$R_A^д = \sqrt{(X_A^д)^2 + (Y_A^д)^2}; \quad R_B^д = \sqrt{(X_B^д)^2 + (Y_B^д)^2}.$$

Из (29) следует, что динамические реакции зависят не только от углового ускорения, но и от угловой скорости, т. е. они возникают даже при вращении тела по инерции с постоянной угловой скоростью. Динамические реакции пропорциональны квадрату угловой скорости как в частном случае статической уравновешенности, так и в общем случае и при вращении тела с большой угловой скоростью могут достигать довольно значительных величин.

Формулы (23) и (24) справедливы как для неподвижных, так и подвижных осей координат. Этим же свойством обладают и формулы (27). Поэтому динамические реакции как в частном случае статически уравновешенного тела, так и в общем случае, когда центр масс не находится на оси вращения, можно считать вращающимися вместе с подвижными осями

координат, если угловая скорость постоянна. Опоры оси вращения тела будут испытывать действие циклически изменяющихся динамических давлений, что может привести к их усталостному разрушению или разрушению от вибраций, если собственная круговая частота мест их закрепления совпадает или близка к угловой скорости вращения тела.

Динамическая уравновешенность

Динамической уравновешенностью называется случай обращения в нуль динамических реакций. Динамические реакции обратятся в нуль, как следует из (29), если равны нулю центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz}, т. е. дополнительно к статической уравновешенности ось вращения Oz должна быть главной осью инерции для любой точки O этой оси. Так как центр масс в этом случае расположен на этой оси, то *ось вращения при динамической уравновешенности является главной центральной осью инерции.* При вращении тела вокруг главной центральной оси инерции динамические реакции обращаются в нуль. Следовательно, силы инерции точек тела, создающие динамические реакции, в этом случае образуют равновесную систему сил. Главный вектор и момент сил инерции $L_x^{(\Phi)}$ и $L_y^{(\Phi)}$ равны нулю. Момент сил инерции $L_z^{(\Phi)}$ при этом может быть отличным от нуля.

Главную центральную ось инерции называют *свободной осью* вращения — свободной от динамических реакций опор. При вращении тела вокруг свободной оси вращения могут возникнуть только статические реакции. Если тяжелое тело вращается по инерции с постоянной угловой скоростью вокруг свободной оси вращения, то статические реакции должны уравновесить только силу тяготения тела. При специальном дополнительном движении тела кроме вращения его вокруг оси с постоянной угловой скоростью может возникнуть положение, при котором силы инерции точек тела приведутся к равнодействующей силе, уравновешивающей силу тяготения. В этом случае статические реакции тоже обратятся в нуль и подшипник и подпятник для крепления оси вращения окажутся ненужными. Такое положение имеет место при вращении земного шара вокруг оси и его дополнительном движении по орбите вокруг Солнца. То же имеет место для других планет Солнечной системы, а также при движении Луны вокруг Земли и при движении естественных и искусственных спутников планет.

Для того чтобы сделать ось вращения тела свободной осью вращения, в технике осуществляют его балансировку на специальных балансировочных установках. При этом прибегают иногда к высверливанию в теле отверстий и при необходимости заполняют их более тяжелым металлом, например свинцом.

Основные виды неуравновешенностей. Неуравновешенности тоже можно разделить на статические и динамические.

Если ось вращения является главной осью инерции хотя бы для одной точки на оси $J_{xz}=J_{yz}=0$, а центр масс не находится на оси вращения, то из (27′) следует, что динамические реакции взаимно параллельны. Этот случай можно назвать статической неуравновешенностью.

Если центр масс находится на оси вращения, а ось вращения не является главной ни для одной точки этой оси, то имеем случай статической уравновешенности. Его также можно назвать динамической неуравновешенностью. Динамические реакции в этом случае образуют пару сил.

Общий случай неуравновешенности, когда и центр масс не находится на оси вращения, и нет точки на этой оси, для которой она была бы главной осью инерции, можно считать наложением двух неуравновешенностей: статической и динамической. Динамические реакции получаются при этом сложением реакций от двух указанных неуравновешенностей.

Пример 1. Однородная прямоугольная пластина длиной l, шириной h и силой тяжести P может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси Ox, пересекающей вертикальную ось вращения Oz в точке O (рис. 88). Пластина наклонена к оси вращения Oz на угол α и удерживается под этим углом пружиной, которая перпендикулярна оси вращения и имеет жесткость c. Пружина не деформирована при $\alpha=\alpha_0$.

Определить угол α, считая его малым, и полные реакции подпятника A и подшипника B при вращении пластины вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, если $AB=l=2$ м, $h=1$ м, $P=10$ кН, $c=175$ кН/м, $\omega=20$ с$^{-1}$, $\alpha_0=2°$, $OA={}^1/_3\,AB$.

Решение. Применим к пластине следствие из принципа Даламбера, приравняв нулю сумму моментов внешних сил и сил инерции относительно оси Ox. Действие пружины на пластину заменим силой упругости $\bar{F}$, а действие подшипника в точке O — силами реакций $\bar{Y}_O$ и $\bar{Z}_O$ (рис. 89). В точке O приложим также главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}$, параллельный оси Oy (ускорение центра масс $\bar{a}_C$ параллельно этой оси), и главный момент этих сил $\bar{L}_O^{(\Phi)}$. Имеем

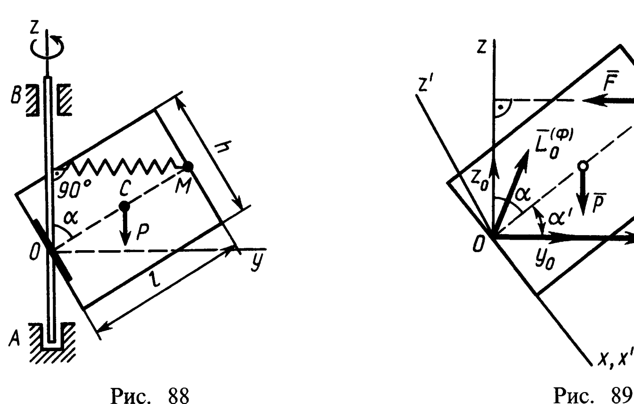


Рис. 88 Рис. 89

$$Fl\cos\alpha - P\frac{l}{2}\sin\alpha + L_x^{(\Phi)} = 0;$$

$$F = c\lambda = cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0) = cl(\alpha - \alpha_0); \tag{а}$$

$$L_x^{(\Phi)} = J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = -J_{yz}\omega^2, \tag{б}$$

так как

$$\varepsilon = \left|\frac{d\omega}{dt}\right| = 0, \ \ \sin\alpha \approx \alpha, \ \ \sin\alpha_0 \approx \alpha_0$$

для малых углов α и α_0. Подставляя эти значения в (а), получим следующее уравнение для определения α:

$$cl^2(\alpha - \alpha_0) - \frac{Pl}{2}\alpha - J_{yz}\omega^2 = 0. \tag{а'}$$

Центробежный момент инерции J_{yz} вычислим по формуле (35′) (см. § 9 гл. 3). Имеем

$$J_{yz} = \frac{J_{z'} - J_{y'}}{2}\sin 2\alpha \approx (J_{z'} - J_{y'})\alpha, \tag{в}$$

так как $\sin 2\alpha' = \sin 2\alpha \approx 2\alpha$, где $J_{y'}$ и $J_{z'}$ — моменты инерции относительно главных осей инерции Oy' и Oz'. Ось Oy' является осью симметрии пластины, и поэтому она является главной осью инерции для всех точек этой оси. Ось Oz' перпендикулярна пластине, плоскость которой служит для нее плоскостью симметрии. Такая ось тоже является главной осью инерции для точки O, расположенной в этой плоскости.

Для главных моментов инерции пластины, согласно формуле (13) (см. § 4 гл. 3), соответственно имеем

$$J_{y'} = \frac{P}{g}\frac{h^2}{12}; \ \ J_{z'} = \frac{P}{g}\left(\frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{12}\right).$$

Подставляя эти величины в (в), получим

$$J_{yz} = (J_{z'} - J_{y'})\alpha = \frac{P}{g}\frac{l^2}{3}\alpha.$$

После этого для α из (а′) имеем

$$cl^2(\alpha - \alpha_0) - \frac{Pl}{2}\alpha - \frac{P}{g}\frac{l^2}{3}\alpha\omega^2 = 0,$$

или

$$\alpha = \frac{cl\alpha_0}{cl - \frac{P}{2} - \frac{Pl}{3g}\omega^2} = \frac{350}{78}\alpha_0 = 4{,}5\alpha_0 = 9° \approx 0{,}16.$$

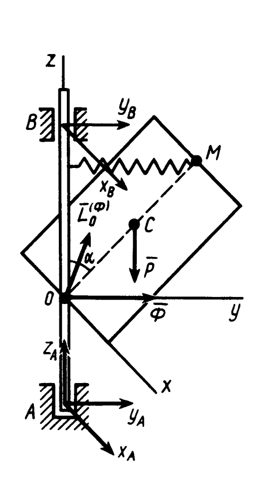


Рис. 90

Для определения полных реакций подпятника A и подшипника B рассмотрим систему тел, состоящую из пластины, пружины и стержня AB, заменив действия подпятника и подшипника силами реакций, разложенными на составляющие, параллельные осям координат (рис. 90).

По формулам (25) имеем

$$\left.\begin{aligned} &X_A + X_B + \Phi_x = 0; \\ &Y_A + Y_B + \Phi_y = 0; \\ &Z_A - P = 0; \\ &Y_A \cdot OA - Y_B \cdot OB + L_x^{(\Phi)} = 0; \\ &-X_A \cdot OA + X_B \cdot OB + L_y^{(\Phi)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{г}$$

Проекции главного вектора и главного момента сил инерции вычисляем по формулам (23) и (24); учитывая, что $\varepsilon=0$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x&=\frac{P}{g}y_C\varepsilon+\frac{P}{g}x_C\omega^2=\frac{P}{g}x_C\omega^2;\\ \Phi_y&=-\frac{P}{g}x_C\varepsilon+\frac{P}{g}y_C\omega^2=\frac{P}{g}y_C\omega^2;\\ L_x^{(\Phi)}&=J_{xz}\varepsilon-J_{yz}\omega^2=-J_{yz}\omega^2;\\ L_y^{(\Phi)}&=J_{yz}\varepsilon+J_{xz}\omega^2=-J_{xz}\omega^2. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{д})$$

Ось Ox перпендикулярна плоскости симметрии пластины, проходящей через OM перпендикулярно пластине. Следовательно, она является главной осью инерции для точки O, поэтому $J_{xz}=0$. Кроме того, в рассматриваемом случае

$$x_C=0;\quad y_C=\frac{l}{2}\sin\alpha\approx\frac{l}{2}\alpha.$$

С учетом этого из (г) получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &X_A+X_B=0;\\ &Y_A+Y_B+\frac{Pl}{2g}\omega^2\alpha=0;\\ &Z_A-P=0;\\ &Y_A\cdot OA-Y_B\cdot OB-J_{yz}\omega^2=0;\\ &-X_A\cdot OA+X_B\cdot OB=0. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{г}')$$

Из первого и последнего уравнений этой системы следует

$$X_A=X_B=0.$$

Третье уравнение дает

$$Z_A=P.$$

Из второго и четвертого уравнений (г) получаем

$$Y_A=\frac{1}{AB}\left(J_{yz}\omega^2-\frac{Pl}{2g}\alpha\omega^2\cdot OB\right)\approx\frac{P\omega^2\alpha}{g}\left(\frac{l}{3}-OB\right)=-\frac{128}{3}=-42{,}7\ \text{кН};$$

$$Y_B=-\frac{1}{AB}\left(J_{yz}\omega^2+\frac{Pl}{2g}\alpha\omega^2\cdot OA\right)\approx\frac{-P\omega^2\alpha}{g}\left(\frac{l}{3}+OA\right)=-\frac{256}{3}=-85{,}3\ \text{кН}.$$

Пример 2. Однородный круглый цилиндр силой тяжести $P=200$ Н, радиусом $R=20$ см, длиной $l=80$ см с помощью вала AB вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega=20\ \text{с}^{-1}$ (рис. 91). Ось вращения касается поверхности цилиндра посередине образующей в точке O так, что отрезок OC, соединяющий точку касания с центром масс цилиндра, перпендикулярен оси вращения. Продольная ось цилиндра наклонена к вертикали на угол $\alpha=45°$.

Определить динамические реакции подшипника A и подпятника B, если $AB=100$ см, $OA=60$ см. Массой вала AB пренебречь.

Решение. Выберем правую систему осей координат $Oxyz$, скрепленных с движущимся цилиндром и началом координат в точке O. Ось Oz направим по оси вращения; ось Ox — по линии, соединяющей точку O с центром масс C, ось Oy направим перпендикулярно Ox и Oz.

Динамические реакции вместе с силами инерции системы образуют равновесную систему сил, т. е. удовлетворяют условиям равновесия для сил

$$\bar{R}_A+\bar{R}_B+\bar{\Phi}=0;\quad \bar{M}_O(\bar{R}_A)+\bar{M}_O(\bar{R}_B)+\bar{L}_O^{(\Phi)}=0, \qquad (\text{а})$$

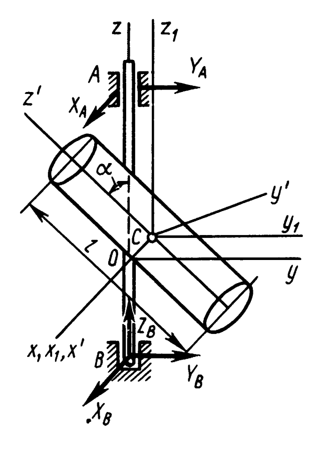


Рис. 91

где $\bar{\Phi}$ — главный вектор сил инерции; $\bar{L}_O^{(\Phi)}$ — главный момент сил инерции относительно точки O, выбранной за центр приведения сил инерции. Главный вектор сил инерции при вращении цилиндра вокруг неподвижной оси вычисляется по формулам

$$\bar{\Phi}=\sum\bar{\Phi}_k=-M\bar{a}_C \quad \begin{cases} \Phi_x=-Ma_{Cx}=My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2; \\ \Phi_y=-Ma_{Cy}=-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2; \\ \Phi_z=-Ma_{Cz}=0. \end{cases}$$

Для главного момента сил инерции относительно точки на оси вращения справедливы формулы

$$\bar{L}_O^{(\Phi)}=\sum\bar{M}_O(\bar{\Phi}_k)=-\frac{\mathrm{d}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t} \quad \begin{cases} L_x^{(\Phi)}=-\dfrac{\mathrm{d}K_x}{\mathrm{d}t}=J_{xz}\varepsilon-J_{yz}\omega^2; \\ L_y^{(\Phi)}=-\dfrac{\mathrm{d}K_y}{\mathrm{d}t}=J_{yz}\varepsilon+J_{xz}\omega^2; \\ L_z^{(\Phi)}=-\dfrac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t}=-J_z\varepsilon, \end{cases}$$

здесь M — масса цилиндра; x_C, y_C, z_C — координаты центра масс. При сделанном выборе осей координат $x_C=-R$, $y_C=0$, $z_C=0$. Кроме того, так как $\omega=\mathrm{const}$, то угловое ускорение $\varepsilon=0$. Еще одно упрощение связано с тем, что ось Ox является главной осью инерции для точки O, так как эта точка находится на главной центральной оси инерции Cx'. Поэтому $J_{xz}=0$.

С учетом упрощений спроецируем векторные уравнения (а) на оси координат. Получим следующие пять уравнений для определения динамических реакций:

$$X_A+X_B-\frac{P}{g}\omega^2 R=0; \quad Y_A+Y_B=0; \quad Z_B=0;$$

$$-Y_A\cdot OA+Y_B\cdot OB-J_{yz}\omega^2=0; \quad X_A\cdot OA-X_B\cdot OB=0.$$

Из второго и четвертого уравнений этой системы определяем проекции динамических реакций Y_A и Y_B. Имеем

$$Y_A=-Y_B=-J_{yz}\omega^2/AB.$$

Из первого и пятого уравнений соответственно получаем

$$X_A=\frac{PR\omega^2\cdot OB}{g\cdot AB}\approx 653\ \text{Н}; \quad X_B=\frac{PR\omega^2\cdot OA}{g\cdot AB}\approx 980\ \text{Н}.$$

Для полного решения задачи необходимо вычислить центробежный момент инерции J_{yz}.

Центробежные моменты инерции обычно вычисляются через главные центральные осевые моменты инерции. Получим необходимую формулу.

Выберем в точке C систему координат $Cx_1y_1z_1$, оси которой параллельны осям системы координат $Oxyz$. Координаты любой точки цилиндра относительно этих двух систем осей координат связаны между собой формулами параллельного переноса в направлении оси Cx_1 на величину $CO=R$; поэтому

$$x_k=x_{1k}-R; \quad y_k=y_{1k}; \quad z_k=z_{1k}.$$

Так как

$$J_{yz}=\sum m_k y_k z_k; \quad J_{y_1z_1}=\sum m_k y_{1k}z_{1k},$$

то

$$J_{yz}=J_{y_1z_1}.$$

Для вычисления центробежного момента инерции $J_{y_1z_1}$ в качестве вспомогательных осей координат возьмем главные центральные оси инерции цилиндра $Cx'y'z'$ (оси его симметрии). Систему осей координат $Cx'y'z'$ можно получить

из системы $Cx_1y_1z_1$, поворачивая ее на угол α вокруг оси Cx'. Формулы преобразования координат любой точки тела при повороте осей (рис. 92) можно выразить в форме

$$y_{1k} = r_k \cos(\alpha + \varphi_k) =$$
$$= r_k \cos\varphi_k \cos\alpha - r_k \sin\varphi_k \sin\alpha = y'_k \cos\alpha - z'_k \sin\alpha;$$
$$z_{1k} = r_k \sin(\alpha + \varphi_k) =$$
$$= r_k \cos\varphi_k \sin\alpha + r_k \sin\varphi_k \cos\alpha = y'_k \sin\alpha + z'_k \cos\alpha,$$

так как

$$r_k \cos\varphi_k = y'_k; \quad r_k \sin\varphi_k = z'_k.$$

Рис. 92

Используя эти формулы, имеем

$$J_{y_1z_1} = \sum m_k y_{1k} z_{1k} = \left(\sum m_k y'_k z'_k\right)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sum m_k \left(y'^2_k - z'^2_k\right)\cos\alpha \sin\alpha.$$

В рассматриваемом случае

$$\sum m_k y'_k z'_k = J_{y'z'} = 0$$

как центробежный момент инерции относительно главных осей инерции Cy', Cz'.

Прибавляя в выражении для $J_{y_1z_1}$ величину

$$\left(\sum m_k x'^2_k - \sum m_k x'^2_k\right)\cos\alpha \sin\alpha = 0,$$

получаем

$$J_{y_1z_1} = \left[\sum m_k \left(x'^2_k + y'^2_k\right) - \sum m_k \left(x'^2_k + z'^2_k\right)\right]\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{J_{z'} - J_{y'}}{2}\sin 2\alpha,$$

где $J_{z'}$ и $J_{y'}$ — моменты инерции относительно главных центральных осей инерции Cz' и Cy' соответственно. Они для цилиндра определяются по формулам

$$J_{z'} = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}; \quad J_{y'} = \frac{P}{g}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{l^2}{12}\right).$$

Итак, для искомого центробежного момента инерции имеем

$$J_{yz} = J_{y_1z_1} = \frac{J_{z'} - J_{y'}}{2}\sin 2\alpha = \frac{P}{2g}\left(\frac{R^2}{4} - \frac{l^2}{12}\right)\sin 2\alpha = -\frac{PR^2}{24g}\left(\frac{l^2}{R^2} - 3\right)\sin 2\alpha =$$
$$= -\frac{200 \cdot 400}{24 \cdot 980}\left(\frac{6400}{400} - 3\right)1 = -44{,}2 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

После этого

$$Y_A = -Y_B = -\frac{J_{yz}\omega^2}{AB} = \frac{44{,}2 \cdot 400}{100} = 177 \text{ Н}.$$

Таким образом определены проекции динамических реакций на оси координат, т. е. поставленная задача решена.

ГЛАВА 6

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В аналитической механике изучаются равновесие и движение механических систем. При этом широко используется понятие в о з м о ж н о г о п е р е м е щ е н и я точки и системы. Наиболее

удобная для применения форма условий равновесия и уравнений движения системы получается при применении **обобщенных координат и обобщенных сил.**

§ 1. СВЯЗИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

В аналитической механике необходимо более подробно рассмотреть связи, налагаемые на точки механической системы. *Механической системой*, как известно, называют любую совокупность материальных точек. *Условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы, называются связями.* Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени различных порядков. Для одной точки уравнение связи в общем случае можно выразить в форме

$$f(x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z};\ \ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z};\ \ldots;\ t)=0. \tag{1}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением связей, в уравнения которых могут входить производные по времени от координат не выше первого порядка.

Для механической системы, состоящей из N точек, l уравнений связей представятся системой уравнений

$$f_s(x_k,\ y_k,\ z_k;\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k;\ t)=0,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ l. \tag{2}$$

Считается, что индекс k принимает все или часть значений от 1 до N как для координат, так и для их производных.

Если в уравнения связей (2) входят только координаты точек и не входят производные от координат, то связи называются *геометрическими*. Уравнение геометрической связи для системы имеет форму

$$f(x_k,\ y_k,\ z_k,\ t)=0.$$

Если в уравнения связей кроме координат входят еще и их производные по времени (проекции скоростей точек на оси координат) или только одни производные, кроме времени, то связи называются *кинематическими*. В этом случае уравнения связей являются дифференциальными уравнениями для координат точек. Из геометрических связей дифференцированием можно получить связи кинематические. Из кинематических связей геометрические получаются не всегда, так как дифференциальные уравнения не всегда могут быть проинтегрированы. Иногда дифференциальное уравнение связи можно представить как производную по времени от некоторой функции координат и, возможно, времени:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x_k,\ y_k,\ z_k,\ t)=0.$$

После интегрирования такая кинематическая связь становится геометрической.

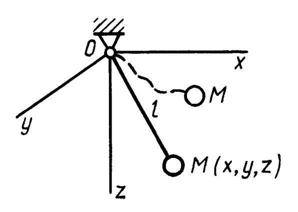


Рис. 93

Все геометрические и интегрируемые кинематические связи называются *голономными*. Неинтегрируемые кинематические связи, которые нельзя свести к геометрическим, являются *неголономными*. Важный класс механических систем с неголономными связями (неголономных систем) интенсивно исследуется в настоящее время, и эти исследования еще далеки от завершения. В дальнейшем изложении систематически системы с такими связями не рассматриваются.

При движении механической системы координаты точек и их производные по времени, входящие в уравнения связей, могут зависеть от времени. Кроме того, в уравнения связей время может входить явно, помимо координат и их производных. Связи, в уравнения которых время явно не входит, называются *стационарными* или *склерономными*. Если время входит явно в уравнение связи, то связь называется *нестационарной* и *реономной*. Нестационарные связи обычно реализуются посредством движущихся или деформирующихся тел. В простейшем случае одной точки нестационарная геометрическая связь в форме движущейся или деформируемой поверхности имеет уравнение

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0.$$

Связи называют *неосвобождающими* или *двусторонними*, если они выражаются математически уравнениями, и *освобождающими* или *односторонними*, если они выражаются неравенствами. Для одной точки M, скрепленной с концом жесткого стержня, другой конец которого закреплен в неподвижной точке O, связь (жесткий стержень) является геометрической, неосвобождающей (рис. 93). Ее уравнение

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0,$$

где l—длина стержня. Если стержень заменить нитью такой же длины, то связь (нить) будет освобождающей. Она математически выражается неравенством $x^2+y^2+z^2-l^2\leqslant 0$.

Если при движении точка M окажется от точки O на расстоянии, меньшем длины нити, то нить уже не стесняет свободу перемещения точки. Связь освобождает точку от своего действия (пунктир на рис. 93). В дальнейшем освобождающие связи рассматривать не будем.

Все связи можно разделить на р е а л ь н ы е и и д е а л ь н ы е. К идеальным связям относятся все связи без трения. Некоторые связи с трением тоже относятся к идеальным. Понятие идеальных связей дается после введения понятия возможного перемещения системы.

§ 2. ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Для формулирования принципа возможных перемещений, определяющего условия равновесия механической системы, требуется ввести понятие возможного, или виртуального, перемещения. *Для одной точки возможным перемещением называется такое бесконечно малое (элементарное) мысленное перемещение, которое допускается в рассматриваемый момент времени наложенными на точку связями.* Для возможного перемещения не требуется времени на его совершение. Это мысленное перемещение, которое могла бы совершить точка при наложенных на нее связях в рассматриваемый момент времени. В отличие от элементарного (бесконечно малого) действительного перемещения точки $d\bar{r}$, которое совершает точка за время dt под действием приложенных сил при заданных начальных условиях и наложенных связях, возможное перемещение $\delta\bar{r}$ определяется только связями в данный момент. Проекции возможного перемещения $\delta\bar{r}$ на оси координат, или вариации координат, обозначают δx, δy, δz, а проекции элементарного действительного перемещения на оси координат, или дифференциалы координат при изменении времени на dt, обозначают dx, dy, dz.

Если связью для точки является, например, движущаяся поверхность, уравнение которой $f(x, y, z, t)=0$, то действительное перемещение точки $d\bar{r}$ за время dt является в общем случае векторной суммой перемещений по поверхности и вместе с поверхностью. Все возможные перемещения точки $\delta\bar{r}$ в данный момент времени t расположатся на поверхности в положении, которое она занимает в рассматриваемый момент времени. Действительное перемещение при заданных начальных условиях и силах, которое точка может совершить от момента времени t до момента $t+dt$, только одно. Возможных перемещений у точки в момент времени t бесконечно много. Все они допускаются связью (поверхностью) и как отрезки бесконечно малой длины расположатся в касательной плоскости к поверхности в точке, в которой находится рассматриваемая точка в данный момент времени.

Возможное перемещение $\delta\bar{r}$, как и действительное $d\bar{r}$, является вектором и потому всегда изображается направленным прямолинейным отрезком. Очевидно, *что элементарное действительное перемещение точки принадлежит к числу возможных, если связь стационарна*, т. е. действительное перемещение не содержит перемещения вместе со связью.

Возможное перемещение точки $\delta\bar{r}$ считают *изохронной вариацией* радиуса-вектора, т. е. его полным дифференциалом, но при фиксированном времени, когда изменяются (варьируются) только координаты точки. Соответственно δx, δy, δz — изохронные вариации координат точки, допускаемые свя-

зями. Действительное перемещение $d\bar{r}$ является полным дифференциалом радиуса-вектора, который определяется по изменению координат точки в зависимости от изменения времени; dx, dy, dz — полные дифференциалы координат точки при изменении независимого переменного t на величину dt.

Возможным перемещением системы называют любую совокупность возможных перемещений точек системы. В общем случае система может иметь несколько и даже бесконечно много возможных перемещений. Вследствие уравнений связей, наложенных на систему, не все возможные перемещения являются независимыми. *Число независимых возможных перемещений называют числом степеней свободы системы.*

Свободная точка имеет три степени свободы. В этом случае возможные перемещения (вариации) δx, δy, δz (или выраженные через вариации каких-либо других координат) являются независимыми. Если точка движется по поверхности $f(x, y, z, t)=0$, то δx, δy, δz связаны соотношением

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0, \qquad (3)$$

которое получают разложением в степенной ряд функции $f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t)=0$ при пренебрежении слагаемыми второго и более высокого порядка по отношению к δx, δy, δz. Независимых вариаций координат, а следовательно, и степеней свободы будет две. Время при этом не варьируется, оно фиксировано. Связь между вариациями координат не зависит от того, входит время явно в уравнения связей или нет. Проекции на оси координат действительного перемещения точки dx, dy, dz, если связь выражается уравнением $f(x, y, z, t)=0$, в отличие от возможных определяется зависимостью

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0, \qquad (4)$$

которая тоже получается разложением в степенной ряд функции $f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)=0$ и отбрасыванием слагаемых второй и более высоких степеней величин dx, dy, dz, dt. Если точка движется по кривой линии, то степеней свободы у нее будет только одна, так как кривую линию можно представить как пересечение двух поверхностей.

§ 3. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РАБОТА СИЛЫ НА ВОЗМОЖНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ. ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

Элементарную работу силы на возможном перемещении ее точки приложения вычисляют по обычным формулам для элементарной работы, например $\delta A=\bar{F}\cdot\delta\bar{r}=F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z$, и другим формулам для элементарной работы. Для механической

системы, состоящей из N точек, к которым приложены силы, элементарная работа этих сил на каком-либо возможном перемещении системы соответственно выразится так:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k. \tag{5}$$

Элементарная работа сил при этом зависит от выбора возможного перемещения системы.

Обозначим силы реакций связей для точек системы $\bar{R}_k$. Тогда *связи системы называются идеальными, если для любого возможного перемещения системы выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \tag{6}$$

Условие (6) является определением идеальных связей. Важно отметить, что это условие должно выполняться для всех возможных перемещений системы. При этом вся совокупность связей является идеальной. Может быть идеальной каждая из связей в отдельности. Приведем примеры идеальных связей.

1. В абсолютно твердом теле точки связаны идеальными связями. Силами реакций связей в этом случае являются внутренние силы, для которых было доказано, что сумма элементарных работ этих сил на любых элементарных перемещениях точек тела равна нулю.

2. Абсолютно гладкая поверхность, или абсолютно гладкая линия, является идеальной связью для точки. Возможные перемещения точки с такими связями направлены по касательным к поверхности или линии. Силы реакции в этих случаях направлены по нормалям к ним, т. е. перпендикулярны силам. Так, например, все шарниры (поверхности) без трения, подвижные и неподвижные, являются связями, идеальными для тел, соединенных такими связями. Шарниры без трения, как связи идеальные, эквивалентны связям между точками в твердом теле.

3. Гибкие нерастяжимые связи типа нитей, канатов, тросов и т. п., соединяющих точки системы, являются связями идеальными. В каждом сечении такой связи силы реакций (силы натяжения) равны по модулю и противоположны по направлению, а возможные перемещения у их точек приложения одни и те же. Сумма элементарных работ сил натяжений для всех мыслимых сечений таких связей равна нулю.

4. Закрепленные точки системы по отдельности являются связями идеальными, так как их возможные перемещения равны нулю.

5. Шероховатая поверхность для катков, катящихся по ней без скольжения, при отсутствии трения качения и, следовательно, соприкосновения в одной точке или по одной

линии, скорости точек которых равны нулю, является связью идеальной. Возможные перемещения в точке или в точках линии соприкосновения равны нулю в каждый момент времени, так как равны нулю скорости в точках соприкосновения, как и для закрепленных точек.

§ 4. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Принцип возможных перемещений, или принцип Лагранжа, содержит необходимые и достаточные условия равновесия некоторых механических систем. Он формулируется следующим образом: *для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени равны нулю,* т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \qquad (7)$$

где $\bar{F}_k$ — активная сила, приложенная к k-й точке системы; $\bar{r}_k$ — радиус-вектор этой точки (рис. 94).

Докажем необходимость условия (7) для равновесия системы, т. е. докажем, *что если система находится в равновесии, то активные силы удовлетворяют условию* (7). Действительно, если механическая система находится в рановесии, то для каждой ее точки активная сила $\bar{F}_k$ и сила реакции связей $\bar{R}_k$ удовлетворяют условию равновесия статики для сил, приложенных к точке:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на возможное перемещение точки $\delta \bar{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

По условию идеальности связей, $\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ и для активных сил получаем условие (7).

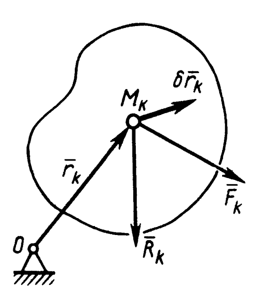


Рис. 94

Докажем достаточность условия (7) для равновесия системы, т. е. что *если это условие выполняется для активных сил, действующих на точки системы, то система находится в равновесии при*

выполнении других условий принципа возможных перемещений. Теорема о достаточности условия (7) для равновесия системы доказывается методом от противного. Предполагается, что условие (7) и все остальные условия теоремы выполняются, а система вышла из равновесия. Если теорема о достаточности справедлива, то должно возникнуть противоречие с условиями теоремы. Итак, пусть все условия теоремы выполняются, а система вышла из равновесия. При этом, по крайней мере для одной точки системы, не будет выполняться условие равновесия для сил, т. е.

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k \neq 0. \tag{8}$$

Дадим системе возможное перемещение. Так как связи стационарные, то элементарное действительное перемещение для каждой точки системы под действием не равной нулю равнодействующей силы принадлежит к числу возможных перемещений и их совокупность можно выбрать в качестве возможного перемещения системы. Скорости точек системы в рассматриваемый момент времени по условию равны нулю; следовательно, элементарные действительные перемещения будут направлены по ускорениям точек, т. е. по равнодействующим силам. Умножая (8) скалярно на $\delta \bar{r}_k = \mathrm{d}\bar{r}_k$, получим

$$(\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k > 0 \tag{9}$$

по крайней мере для одной точки системы, вышедшей из равновесия. Суммируя (9) по всем точкам системы, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k > 0. \tag{9'}$$

Для идеальных связей

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Поэтому из (9′) получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k > 0,$$

что находится в противоречии с условием (7). Следовательно, система не может выйти из равновесия при выполнении условий принципа возможных перемещений. Принцип полностью доказан.

Без дополнительного условия о равенстве нулю скоростей точек системы в рассматриваемый момент принцип возможных перемещений утверждает только то, что равны нулю ускорения точек системы. Вместе с равенством нулю скоростей точек это дает равновесие системы в тот момент, в который выполняется для активных сил условие (7). При длительном

выполнении этого условия система соответственно будет находиться в равновесии тоже длительно, т. е. скорости и ускорения точек равны нулю, если скорости точек системы равны нулю в начале интервала длительности.

В принцип возможных перемещений не входят силы реакций связей. Но его можно применять также и для определения неизвестных сил реакций связей. Для этого связь, силы реакции которой необходимо определить, отбрасывают (освобождают систему от этой связи), заменяя ее силами реакции. Эти силы добавляют к активным силам. Оставшиеся связи системы должны быть идеальными. Иногда неидеальную связь заменяют идеальной, компенсируя неидеальность соответствующими силами. Так, если связью для тела является шероховатая поверхность, то ее можно заменить гладкой поверхностью, добавляя к активным силам силу трения скольжения и в более общем случае — еще и пару сил, препятствующую качению. Связь в виде заделки для твердого тела можно заменить неподвижным шарниром, плоским или шаровым соответственно, добавляя момент заделки, векторный или алгебраический. Таким образом, в принцип возможных перемещений входят в действительности не активные силы, а все приложенные к точкам системы силы, кроме сил реакций идеальных связей, которые по условиям задач не требуется определять.

Пример 1. В механизме (рис. 95) допускается поворот кривошипа OA вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. По стержню OA может перемещаться ползун B, шарнирно соединенный со стержнем BC, который может скользить вдоль вертикальных направляющих. К кривошипу OA приложена пара сил с моментом M; $OD=l$.

Определить вертикальную силу $\bar{F}$, приложенную к стержню BC в зависимости от угла φ, при равновесии механизма. Силами тяжести звеньев механизма и силами трения пренебречь.

Решение. Связи в механизме неосвобождающие и стационарные. Они не создают сил трения, а потому идеальные. Применим к механизму принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Активными силами являются $\bar{F}$ и пара сил с моментом M.

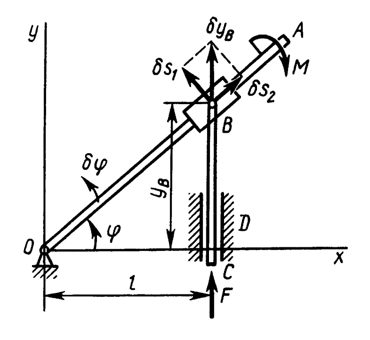


Рис. 95

Дадим системе возможное перемещение, допускаемое наложенными связями, повернув мысленно стержень OA на элементарный угол $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ. Тогда, согласно принципу возможных перемещений,

$$-M\delta\varphi + F\delta y_C = 0, \qquad \text{(a)}$$

где δy_C — возможное перемещение точки C. Стержень BC твердый, поэтому перемещения его концов B и C при наложенных связях равны, т. е. $\delta y_C = \delta y_B$.

У механизма только одна степень свободы, поэтому $\delta\varphi$ и δy_B зависят друг от друга. Установим предварительно зависимость y_B от

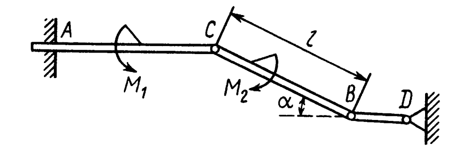


Рис. 96

φ. Имеем $y_B = l\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Путем варьирования этого уравнения связи, аналогичного вычислению полных дифференциалов от обеих частей равенства, получим

$$\delta y_B = l\frac{1}{\cos^2\varphi}\delta\varphi.$$

Подставляя полученное значение δy_B в (а) и вынося $\delta\varphi$ за скобки, имеем

$$\delta\varphi\left(-M + \frac{Fl}{\cos^2\varphi}\right) = 0.$$

Величину $\delta\varphi$ можно выбрать отличной от нуля, а потому равно нулю выражение в скобках, т. е.

$$-M + \frac{Fl}{\cos^2\varphi} = 0; \quad F = M\cos^2\varphi/l.$$

Дополнительно установим зависимость $\delta\varphi$ и δy_B непосредственно, не используя процесс варьирования уравнения связи. При повороте стержня OA на угол $\delta\varphi$ точка B переместится вместе с соответствующей точкой стержня перпендикулярно стержню на $\delta s_1 = OB\delta\varphi$ и, кроме того, ползун B передвинется вдоль стержня на δs_2, для того чтобы точка B переместилась только параллельно направляющим на δy_B, так как другие направления перемещения точки B не разрешаются направляющими стержня BC. Вектор возможного перемещения точки B изобразится диагональю прямоугольника, построенного на составляющих перемещениях. Из прямоугольника для его диагонали имеем

$$\delta y_B = \delta s_1/\cos\varphi, \quad \text{или} \quad \delta y_B = \frac{OB}{\cos\varphi}\delta\varphi = \frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi,$$

так как

$$OB = l/\cos\varphi.$$

Пример 2. Стержневая система (рис. 96), расположенная в вертикальной плоскости, находится в равновесии под действием двух пар сил с моментами M_1 и M_2. Стержни AC и BD параллельны. Стержень BC составляет с ними угол α.

Пренебрегая силами тяжести стержней и трением в шарнирах, определить реакции в заделке и усилие в стержне BD.

Решение. Освободим систему стержней от заделки, приложив силы X_A, Y_A и момент в заделке M_A (рис. 97, *а*). Оставшиеся связи являются идеальными, если в них не возникает сил трения.

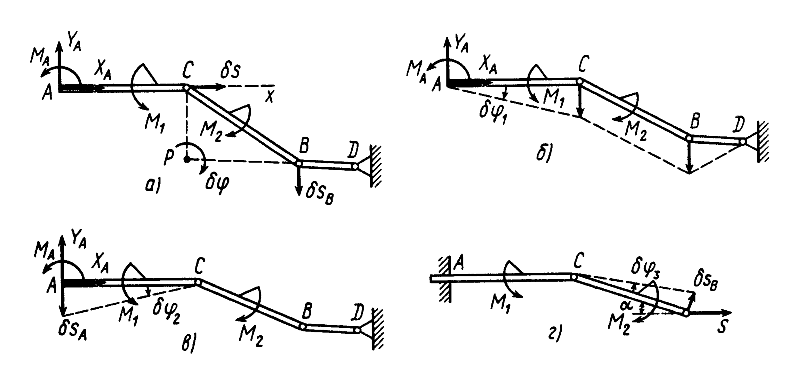


Рис. 97

Дадим стержню AC возможное перемещение δs, допускаемое оставшимися связями, в направлении оси Ax. Точка B может иметь перемещение δs_B, перпендикулярное только BD.

Для возможных перемещений точек твердого тела, аналогично мгновенному центру скоростей при плоском движении, можно построить мгновенный центр перемещений. Для установления связи между возможными перемещениями точек твердого тела можно использовать и другие положения о связи скоростей точек твердого тела при плоском движении и в других случаях движения.

Мгновенный центр перемещений стержня BC находится на перпендикулярах к возможным перемещениям точек B и C. Вокруг P стержень BC повернется на угол $\delta\varphi$, который определяется отношением перемещения δs к расстоянию CP, т. е.

$$\delta\varphi = \frac{\delta S}{CP} = \frac{\delta s}{l_2 \sin\alpha}. \qquad \text{(а)}$$

Из принципа возможных перемещений имеем

$$X_A \delta s + M_2 \delta\varphi = 0. \qquad \text{(б)}$$

Моменты пары сил M_2 и угол $\delta\varphi$ имеют одинаковые направления — по часовой стрелке, поэтому элементарная работа пары сил является положительной.

Подставляя (а) и (б), получаем

$$X_A = -\frac{M_2}{l_2 \sin\alpha}.$$

Для определения M_A дадим системе возможное перемещение, повернув стержень AC вокруг точки A на угол $\delta\varphi_1$ (рис. 97, *б*). Из принципа возможных перемещений в этом случае имеем

$$M_A \delta\varphi_1 + M_1 \delta\varphi_1 = 0.$$

Следовательно, $M_A = -M_1$.

Чтобы определить Y_A (рис. 97, *в*), дадим стержню AC возможное перемещение, повернув его на угол $\delta\varphi_2$ вокруг точки C. Получим

$$M_1 \delta\varphi_2 + M_A \delta\varphi_2 - Y_A l_1 \delta\varphi_2 = 0;$$

$$Y_A = 0.$$

Для определения усилия в стрежне BD отбросим этот стрежень, заменив его действие силой $\bar{S}$, направленной по стержню, сохранив заделку (рис. 97, *г*). В этом случае связи допускают поворот стрежня BC на угол $\delta\varphi_3$. Точка B при этом переместится на δs_B. Проекция перемещения на направление силы $\bar{S}$ при этом равна $\delta s_B \sin\alpha = l_2 \delta\varphi_3 \sin\alpha$. Составляя сумму элементарных работ на этом возможном перемещении и приравнивая ее нулю, согласно принципу возможных перемещений, имеем

$$M_2 \delta\varphi_3 + S\delta s_B \sin\alpha = 0,$$

откуда получаем

$$S = \frac{M_2}{l_2 \sin\alpha}.$$

Освобождать от связей систему можно не полностью. Так, например, заделка эквивалентна шарниру вместе с моментом заделки.

§ 5. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ СИСТЕМЫ

Пусть система состоит из N точек и, следовательно, ее положение в пространстве в каждый момент времени определяется $3N$ координатами точек системы, например декартовыми

x_k, y_k, z_k. Предположим, что на систему наложены голономные связи, уравнения которых в общем случае могут содержать и производные от координат точек, но после их интегрирования они свелись к геометрическим и имеют форму

$$f_s(x_k, y_k, z_k, t)=0, \qquad s=1, 2, ..., l. \tag{10}$$

Освобождающие связи, выражающиеся неравенствами, не рассматриваются. Таким образом, $3N$ координат связаны l уравнениями и независимых координат будет $n=3N-l$.

Любые n декартовых координат можно задать независимо друг от друга. Остальные координаты определятся из уравнений связей. Вместо n независимых декартовых координат можно выбрать любые другие независимые параметры $q_1, q_2, ..., q_n$, зависящие от всех или части декартовых координат точек системы. Эти *независимые параметры, определяющие положение системы в пространстве, называются обобщенными координатами системы.* В общем случае они могут зависеть от всех декартовых координат точек системы, т. е.

$$q_i=q_i(x_k, y_k, z_k), \tag{11}$$

где k изменяется от 1 до N. Задание обобщенных координат полностью определяет положение точек системы относительно выбранной системы отсчета, например декартовых осей координат.

У свободной точки три обобщенные координаты. Если точка должна двигаться по заданной поверхности, то обобщенных координат только две и т. д. Используя уравнения связей (10) и выражения обобщенных координат через декартовы (11), можно при выполнении условий разрешимости этой системы уравнений выразить декартовы координаты через обобщенные, т. е. получить

$$x_k=x_k(q_1, q_2, ..., q_n, t); \quad y_k=y_k(q_1, q_2, ..., q_n, t);$$
$$z_k=z_k(q_1, q_2, ..., q_n, t).$$

Соответственно для радиуса-вектора каждой точки системы $\bar{r}_k=x_k\bar{i}+y_k\bar{j}+z_k\bar{k}$ получим

$$\bar{r}_k=\bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n, t). \tag{12}$$

В случае стационарных связей время явно не входит в уравнения связей. Поэтому и в (12) оно войдет только неявно, через обобщенные координаты, если система движется. Для голономных систем вектор возможного перемещения точки $\delta\bar{r}_k$ в соответствии с (12) можно выразить в форме

$$\delta\bar{r}_k=\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2+...+\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{13}$$

Система, имеющая n независимых обобщенных координат, характеризуется также n независимыми возможными переме-

щениями или вариациями $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$, если связи голономны. Для голономных систем число независимых возможных перемещений совпадает с числом независимых обобщенных координат. Следовательно, *число степеней свободы голономной системы равно числу независимых обобщенных координат этой системы*, т. е. $n=3N-l$.

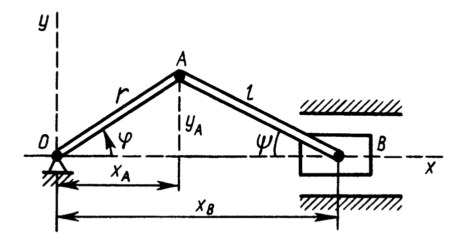


Рис. 98

Для неголономных систем в уравнения связей (10) могут входить производные от декартовых координат точек и даже могут быть такие уравнения связей, в которые входят только одни производные. Такие уравнения связей наложат ограничения на вариации $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$ и, следовательно, уменьшат число независимых вариаций, не связывая функциональной зависимостью сами обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_n$. Для неголономных систем в общем случае число независимых вариаций (возможных перемещений) меньше числа обобщенных координат. *Число степеней свободы неголономной системы, равное числу независимых возможных перемещений, тоже меньше числа обобщенных координат системы.*

В дальнейшем рассматриваются только голономные системы, т. е. системы с голономными связями. Рассмотрим вопрос обобщенных координат на примере простого механизма.

Пусть имеем кривошипно-шатунный механизм (рис. 98). Его положение на плоскости вполне определяется заданием положения трех его точек O, A и B с координатами соответственно $(0, 0)$, (x_A, y_A), $(x_B, 0)$. Координат, не равных нулю, только 3, т. е. $3N=3$. Можно составить два уравнения связей, учитывая постоянство длин $OA=r$ и $AB=l$. Имеем

$$x_A^2+y_A^2=r^2; \quad (x_B-x_A)^2+y_A^2=l^2. \tag{a}$$

Число степеней свободы

$$n=3-2=1.$$

Из трех не равных нулю координат только одну можно задать независимо. Две другие выразятся через нее как решения уравнений связей. В качестве независимой координаты можно выбрать любую из трех координат x_A, y_A, x_B или любую комбинацию этих координат. Нужно только, чтобы она однозначно определяла положение механизма относительно осей координат Oxy. Координаты x_A и x_B следует исключить. Они неоднозначно определяют положение механизма. Удобно в качестве независимой обобщенной координаты q выбрать угол φ, т. е.

$$q=\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y_A}{x_A}. \qquad (б)$$

Из уравнений (а) и (б) координаты x_A, y_A, x_B можно выразить через угол φ. Для этого следует решить эту систему уравнений относительно координат. Удобно, не решая системы уравнений, выразить координаты через угол φ, используя рис. 97. Получим

$$x_A=r\cos\varphi, \quad y_A=r\sin\varphi, \quad x_B=r\cos\varphi+l\cos\psi.$$

Но

$$y_A=r\sin\varphi=l\sin\psi; \quad \sin\psi=\frac{r}{l}\sin\varphi;$$

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\frac{1}{l}\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

С учетом этого искомые выражения для координат принимают форму

$$x_A=r\cos\varphi; \quad y_A=r\sin\varphi; \quad x_A=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

Нетрудно проверить, что эти значения декартовых координат удовлетворяют системе уравнений (а) и (б).

§ 6. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

Определение обобщенных сил. Имеем сумму элементарных работ сил, действующих на точки системы, на возможном перемещении системы:

$$\delta A=\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k. \qquad (14)$$

Пусть голономная система имеет n степеней свободы и, следовательно, ее положение в пространстве определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Тогда для $\delta\bar{r}_k$, согласно (13), имеем

$$\delta\bar{r}_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i. \qquad (13')$$

Подставляя (13′) в (14) и изменяя порядок суммирования по индексам k и i, получим

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i, \qquad (14')$$

где скалярная величина

$$Q_i=\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}$$

называется *обобщенной силой, отнесенной к обобщенной координате* q_i. Используя известное выражение для скалярного

произведения двух векторов, обобщенную силу можно также представить в виде

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \qquad (15)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} — проекции силы на оси координат; x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения силы $\bar{F}_k$.

Размерность обобщенных сил. Размерность обобщенной силы в соответствии с (14′) следующим образом зависит от размерности δq_i, совпадающей с размерностью q_i:

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]} = \frac{[A]}{[q_i]}, \qquad (16)$$

т. е. размерность обобщенной силы равна размерности работы силы (энергии) или момента силы, деленной на размерность обобщенной координаты, к которой отнесена обобщенная сила. Если $[q_i]$ — длина, то

$$[Q_i] = \frac{\text{работа}}{\text{длина}} = \frac{\text{сила} \cdot \text{длина}}{\text{длина}} = \text{сила},$$

т. е. обобщенная сила имеет размерность силы. В том случае, когда $[q_i] = 1$, как это имеет место, если в качестве обобщенной координаты выбран угол, $[Q_i]$ — момент силы.

Этот случай часто встречается при решении практических задач.

Вычисление обобщенных сил. 1. Обобщенную силу можно вычислить по формуле (15), ее определяющей, т. е.

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{zk} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

2. Обобщенные силы можно вычислять как коэффициенты при соответствующих вариациях обобщенных координат в выражении для элементарной работы (14′), т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n. \qquad (15')$$

3. Наиболее целесообразен способ вычисления обобщенных сил, который получается из (15′), если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна обобщенная координата, а другие при этом не изменяются. Так, если $\delta q_1 \neq 0$, а остальные $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$, то из (15′) имеем

$$Q_1 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \right)_{q_1}}{\delta q_1}.$$

Индекс q_1 указывает, что сумма элементарных работ вычисляется на возможном перемещении, при котором изменяется

(варьируется) только координата q_1. Если изменяющейся координатой является q_i, то

$$Q_i = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_{q_i}}{\delta q_i}. \tag{17}$$

4. Для потенциальных сил по их определению имеем:

$$F_{kx} = \partial U / \partial x_k; \quad F_{ky} = \partial U / \partial y_k; \quad F_{kz} = \partial U / \partial z_k, \tag{18}$$

где U — силовая функция, зависящая от координат точек системы и, следовательно, через них — от обобщенных координат, т. е.

$$U = U(x_k, y_k, z_k) = U(q_1, q_2, ..., q_n). \tag{19}$$

В случае нестационарных силовых полей, которые дальше не рассматриваются, силовая функция может еще явно зависеть от времени.

Для обобщенной силы, согласно ее определению, с учетом (18) и (19) имеем

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Таким образом, в случае существования силовой функции

$$Q_i = \partial U / \partial q_i = -\partial \Pi / \partial q_i, \tag{20}$$

так как потенциальная энергия системы Π связана с силовой функцией U соотношением

$$\Pi = -U + \text{const}.$$

Итак, *обобщенная сила равна частной производной от силовой функции по соответствующей обобщенной координате.*

§ 7. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ

Условия равновесия системы выводятся из принципа возможных перемещений. Они применимы к системам, для которых этот принцип справедлив. Согласно принципу возможных перемещений, условие

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$$

является необходимым и достаточным для равновесия системы. Но в соответствии с (15′)

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_n \delta q_n.$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием равновесия является равенство

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n = 0. \tag{21}$$

Так как обобщенные координаты независимы, то их вариации δq_1, δq_2, ..., δq_n являются тоже независимыми, произвольными, бесконечно малыми величинами. Можно принять $\delta q_1 \neq 0$, а все остальные $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$. Тогда из (21) получим $Q_1 = 0$. Аналогично, приняв $\delta q_2 \neq 0$, а $\delta q_1 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$, будем иметь $Q_2 = 0$ и т. д. Таким образом, из (21) получаем следующие условия равновесия системы:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ \ldots, \ Q_n = 0, \tag{22}$$

т. е. *для равновесия механической системы, подчиненной голономным, стационарным, идеальным и неосвобождающим связям, в момент, когда скорости всех точек системы равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю.*

О голономности связей условились при введении обобщенных координат и обобщенных сил, а также при определении числа степеней свободы. Другие условия для связей входят в формулировку самого принципа возможных перемещений.

В статике для равновесия свободного твердого тела, имеющего шесть степеней свободы, было получено шесть условий равновесия для приложенных к телу сил. Эти условия можно получить также приравняв нулю каждую из шести обобщенных сил. Для этого следует выбрать в качестве обобщенных координат декартовы координаты x, y, z какой-либо точки тела и углы поворота тела вокруг осей координат, проходящих через эту точку. Обобщенные силы, отнесенные к координатам x, y, z, превратятся соответственно в суммы проекций приложенных сил на эти оси, а обобщенные силы, отнесенные к углам поворота вокруг осей координат,— в суммы моментов сил относительно этих осей.

Условия равновесия (22) для системы, находящейся под действием потенциальных сил, вместе с (20) дадут следующие условия для силовой функции:

$$Q_1 = \partial U / \partial q_1 = 0, \quad Q_2 = \partial U / \partial q_2 = 0, \ \ldots, \ Q_n = \partial U / \partial q_n = 0, \tag{22'}$$

т. е. все частные производные от силовой функции по обобщенным координатам равны нулю. Это является необходимым условием существования экстремума силовой функции. Таким образом, при равновесии механической системы, находящейся под действием потенциальных сил, силовая функция и потенциальная энергия могут достигать экстремума.

Пример. Дифференциальный планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из двух шестерен радиусами r_1 и r_2 и кривошипа OA (рис. 99). К кривошипу приложена пара сил с моментом

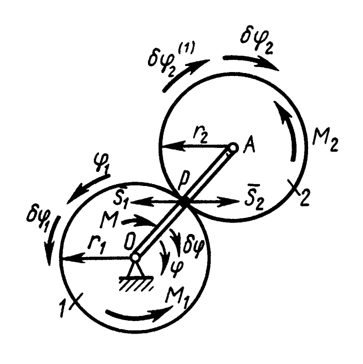


Рис. 99

M, а к шестерням 1 и 2 — пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить моменты пар сил M и M_1, которые следует приложить к шестерне 1 и кривошипу OA для равновесия механизма. Трением в шарнирах пренебречь.

Решение. Связи системы, осуществляемые твердыми телами и подвижным A и неподвижным O шарнирами без трения, являются идеальными, голономными, стационарными и неосвобождающими. Система имеет две степени свободы. Действительно, можно закрепить шестерню 1, тогда кривошип OA и шестерня 2 сохранят еще возможность вполне определенного движения. Если дополнительно закрепить еще и кривошип OA, то движение каких-либо звеньев механизма невозможно.

Выберем в качестве обобщенных координат углы поворота шестерни 1 (φ_1) и кривошипа OA (φ), отсчитываемые от каких-либо фиксированных положений этих тел. По условиям равновесия системы обобщенные силы, отнесенные к этим координатам, равны нулю, т. е. $Q_{\varphi_1}=0$; $Q_\varphi=0$.

Вычислим обобщенные силы по формулам

$$Q_{\varphi_1}=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_{\varphi_1}}{\delta\varphi_1};\quad Q_\varphi=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_{\varphi}}{\delta\varphi}. \tag{а}$$

Индексы у скобок указывают, что суммы элементарных работ должны вычисляться при изменении той обобщенной координаты, которая указана в индексе. Другая обобщенная координата при этом не должна изменяться.

К числу активных сил следует отнести пары сил с моментами M, M_1, M_2, силы тяжести шестерен и кривошипа и внутренние силы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ действия шестерен друг на друга в точке P. Эти силы, как силы действия и противодействия, удовлетворяют условию $\bar{S}_1=-\bar{S}_2$.

Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то элементарные работы сил тяжести его звеньев равны нулю. Возможные перемещения точек приложения этих сил располагаются в горизонтальной плоскости, перпендикулярной силам тяжести.

Дадим шестерне 1 возможное перемещение $\delta\varphi_1$, например в сторону возрастания угла φ_1, приняв при этом $\varphi=\text{const}$. Имеем

$$Q_{\varphi_1}=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_{\varphi_1}}{\delta\varphi_1}=\frac{M_1\delta\varphi_1-M_2\delta\varphi_2^{(1)}}{\delta\varphi_1}. \tag{б}$$

Элементарная работа пары сил с моментом M_2 отрицательна, так как M_2 и $\delta\varphi_2^{(1)}$ направлены в противоположные стороны. Сумма элементарных работ сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ равна нулю, так как у них общая точка приложения и одно и то же возможное перемещение, а сами силы равны по модулю и противоположны по направлению.

При $\varphi=\text{const}$ углы поворота шестерен $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2^{(1)}$ направлены в противоположные стороны. Перемещения точки соприкосновения шестерен одинаковы. Следовательно,

$$r_1\delta\varphi_1=r_2\delta\varphi_2^{(1)};\qquad \delta\varphi_2^{(1)}=\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1.$$

Подставляя это значение $\delta\varphi_2^{(1)}$ в (б) и сокращая на $\delta\varphi_1$, получаем

$$Q_{\varphi_1}=M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}. \tag{б′}$$

Сообщим теперь кривошипу OA возможное перемещение $\delta\varphi$, например в направлении момента пары сил M, считая при этом угол φ_1 постоянным. Тогда

$$Q_\varphi=\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_\varphi}{\delta\varphi}=\frac{M\delta\varphi-M_2\delta\varphi_2}{\delta\varphi}. \tag{в}$$

В этом случае угол $\delta\varphi_2$ и момент M_2 опять противоположны. Точка соприкосновения шестерен P является теперь мгновенным центром скоростей для шестерни 2. Элементарная работа сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ в этом случае равна нулю для каждой силы.

Вычислим возможное перемещение точки A как точки кривошипа OA и шестерни 2, имеющей мгновенный центр скоростей в точке P. Имеем соответственно

$$\delta s_A=(r_1+r_2)\delta\varphi=r_2\delta\varphi_2.$$

Отсюда получаем

$$\delta\varphi_2=\frac{r_1+r_2}{r_2}\delta\varphi.$$

Подставляя эти значения в (в) и сокращая на $\delta\varphi$, получаем

$$Q_\varphi=M-M_2\frac{r_1+r_2}{r_2}. \tag{в$'$}$$

По условиям равновесия,

$$Q_{\varphi_1}=0;\qquad Q_\varphi=0.$$

Учитывая (б$'$) и (в$'$), получаем

$$M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}=0;\qquad M-M_2\frac{r_1+r_2}{r_2}=0$$

или

$$M_1=M_2\frac{r_1}{r_2};\qquad M=M_2\frac{r_1+r_2}{r_2}.$$

§ 8. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

В соответствии с принципом Даламбера для любой механической системы активные силы, силы реакций связей вместе с силами инерции удовлетворяют условию равновесия сил для каждой точки системы, т. е.

$$\bar{F}_k+\bar{R}_k+\bar{\Phi}_k=0,\qquad k=1, 2, ..., N, \tag{23}$$

где $\bar{F}_k$ — активная сила; $\bar{R}_k$ — сила реакции связей; $\bar{\Phi}_k$ — сила инерции точки. Умножая скалярно каждое из этих соотношений на возможное перемещение точки $\delta\bar{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k+\sum_{k=1}^{N}\bar{R}_k\cdot\delta\bar{r}_k+\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k\cdot\delta\bar{r}_k=0. \tag{24}$$

Это и есть *общее уравнение динамики для системы с любыми связями*. Обычно его применяют для систем с идеальными связями, для которых выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

В этом случае (24) принимает одну из форм

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k - m_k \ddot{\bar{r}}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \tag{25}$$

так как сила инерции через ускорение $\bar{a}_k$ относительно инерциальной системы отсчета выражается в форме

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k,$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор точки.

Таким образом, согласно общему уравнению динамики, *в любой момент движения системы с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции точек системы равна нулю на любом возможном перемещении системы, допускаемом связями.* Общее уравнение динамики (24) часто называют объединенным принципом Даламбера—Лагранжа. Его можно назвать также общим уравнением механики. Оно в случае равновесия системы при обращении в нуль всех сил инерции точек системы переходит в принцип возможных перемещений статики, только пока без доказательства его достаточности для равновесия системы.

Общему уравнению динамики можно придать другие, эквивалентные формы. Раскрывая скалярное произведение векторов, его можно выразить в виде

$$\sum_{k=1}^{N} \left[(F_{kx} + \Phi_{kx})\delta x_k + (F_{ky} + \Phi_{ky})\delta y_k + (F_{kz} + \Phi_{kz})\delta z_k\right] = 0,$$

где x_k, y_k, z_k — координаты k-й точки системы. Учитывая, что проекции сил инерции на оси координат через проекции ускорений на эти оси выражаются соотношениями

$$\Phi_{kx} = -m_k a_{kx} = -m_k \ddot{x}_k; \quad \Phi_{ky} = -m_k a_{ky} = -m_k \ddot{y}_k;$$
$$\Phi_{kz} = -m_k a_{kz} = -m_k \ddot{z}_k,$$

общему уравнению динамики можно придать форму

$$\sum_{k=1}^{N} \left[(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k\right] = 0. \tag{25'}$$

В этом виде его называют общим уравнением динамики в аналитической форме.

Общее уравнение динамики для систем, подчиненных голономным, идеальным, неосвобождающим связям, дает полную информацию о движении таких систем, т. е. из него аналогично

тому, как из принципа возможных перемещений получались условия равновесия системы, можно получить полную систему дифференциальных уравнений. Для вывода этих уравнений следует использовать понятия обобщенных координат и обобщенных сил.

Пусть имеется система, подчиненная голономным, идеальным, неосвобождающим связям. Предположим, что она имеет n степеней свободы и, следовательно, ее положение в пространстве определяется обобщенными координатами q_1, q_2, ..., q_n. Радиус-вектор каждой точки системы в общем случае нестационарных связей зависит от обобщенных координат и времени, т. е. $\bar{r}_k=\bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n, t)$. Для возможного перемещения $\delta\bar{r}_k$ имеем

$$\delta\bar{r}_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i, \tag{26}$$

так как время при этом считается неизменным. Подставляя (26) в общее уравнение динамики (25), после перемены порядка суммирования по k и i получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0. \tag{27}$$

Используя обобщенные силы активных сил Q_i и сил инерции $Q_i^{(\Phi)}$, т. е.

$$Q_i=\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i};\qquad Q_i^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}, \tag{28}$$

из (27) получим общее уравнение динамики в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i+Q_i^{(\Phi)}\right)\delta q_i=0. \tag{29}$$

Обобщенные координаты системы независимы, вариации этих координат не только независимы, но и произвольны. Последовательно принимая только одну из вариаций обобщенных координат не равной нулю, а все остальные — равными нулю, из (29) получаем следующую систему условий:

$$Q_i+Q_i^{(\Phi)}=0,\quad i=1,\ 2,\ ...,\ n. \tag{30}$$

Условия (30) можно назвать **принципом Даламбера для системы, выраженным через обобщенные силы**. Из (30) следуют условия равновесия системы $Q_i=0$, $i=1$, 2, ..., n, если силы инерции точек системы, а следовательно, и обобщенные силы инерции равны нулю.

При использовании общего уравнения динамики необходимо уметь вычислять элементарную работу сил инерции системы на возможных перемещениях. Для этого применяются соответствующие формулы для элементарной работы, полученные

для обычных сил. Рассмотрим их применение для сил инерции твердого тела в частных случаях его движения.

При поступательном движении. В этом случае тело имеет три степени свободы и вследствие наложенных связей может совершать только поступательное движение. Возможные перемещения тела, которые допускают связи, тоже являются поступательными.

Силы инерции при поступательном движении приводятся к равнодействующей $\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C = -M\bar{a}$. Для суммы элементарных работ сил инерции на поступательном возможном перемещении тела получим

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta\bar{r}_k = \bar{\Phi}^* \cdot \delta\bar{r}_C = \bar{\Phi}^* \cdot \delta\bar{r} = -M\bar{a} \cdot \delta\bar{r},$$

где $\delta\bar{r}_C = \delta\bar{r}$ — возможное перемещение центра масс и любой точки тела, так как поступательное возможное перемещение у всех точек тела одинаково; одинаковы и ускорения, т. е. $\bar{a}_C = \bar{a}$.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Тело в этом случае имеет одну степень свободы. Оно может вращаться вокруг неподвижной оси Oz. Возможное перемещение, которое допускается наложенными связями, является тоже поворотом тела на элементарный угол $\delta\varphi$ вокруг неподвижной оси.

Силы инерции, приведенные к точке O на оси вращения, сводятся к главному вектору $\bar{\Phi}$ и главному моменту $\bar{L}_O^{(\Phi)}$. Главный вектор сил инерции приложен к неподвижной точке, и его элементарная работа на возможном перемещении равна нулю. У главного момента сил инерции не равную нулю элементарную работу совершит только его проекция на ось вращения $L_z^{(\Phi)} = -J_z\varepsilon$. Таким образом, для суммы работ сил инерции на рассматриваемом возможном перемещении имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta\bar{r}_k = L_z^{(\Phi)}\delta\varphi = -J_z\varepsilon\delta\varphi,$$

если угол $\delta\varphi$ сообщить в направлении дуговой стрелки углового ускорения ε.

При плоском движении. Связи, наложенные на твердое тело, допускают в этом случае только плоское возможное перемещение. В общем случае оно состоит из поступательного возможного перемещения вместе с полюсом, за который выберем центр масс, и поворота на элементарный угол $\delta\varphi$ вокруг оси Cz, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости, параллельно которой может совершать тело плоское движение.

Так как силы инерции при плоском движении твердого тела можно привести к главному вектору $\bar{\Phi}$ и главному моменту $\bar{L}_C^{(\Phi)}$ (если за центр приведения выбрать центр масс),

то сумма элементарных работ сил инерции на плоском возможном перемещении сведется к элементарной работе главного вектора сил инерции $\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C$ на возможном перемещении центра масс и элементарной работе главного момента сил инерции на элементарном поворотном перемещении вокруг оси Cz, проходящей через центр масс. При этом не равную нулю элементарную работу может совершить только проекция главного момента сил инерции на ось Cz, т. е. $L_{Cz}^{(\Phi)} = -J_{Cz}\varepsilon$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \bar{\Phi} \cdot \delta \bar{r}_C + L_{Cz}^{(\Phi)} \delta \varphi = -M\bar{a}_C \cdot \delta \bar{r}_C - J_{Cz} \varepsilon \delta \varphi,$$

если поворот на элементарный угол $\delta\varphi$ направить по дуговой стрелке для ε.

Пример 1. Центробежный регулятор вращается вокруг неподвижной вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω (рис. 100, *а*). Силы тяжести точечных грузов M_1 и M_2 равны P, ползуна D — соответственно Q; длины стержней $A_1M_1 = A_2M_2 = M_1B_1 = M_2B_2 = l$, $OA_1 = OA_2 = l_1$. Поперечными размерами ползуна D, массами пружин, ползуна E и всех стержней пренебречь. Коэффициенты жесткости пружин одинаковы и равны c. Длины пружин в недеформированном состоянии равны l_1.

Определить зависимость между угловой скоростью вращения регулятора ω и углом φ.

Решение. Применим к регулятору общее уравнение динамики в форме

$$\sum_{k=1}^{N} [(F_{kx} + \Phi_{kx})\delta x_k + (F_{kz} + \Phi_{kz})\delta_{kz}] = 0,$$

так как проекции активных сил $\bar{F}_k$ и сил инерции $\bar{\Phi}_k$ на ось Oy равны нулю.

Активными силами являются силы тяжести $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ и силы натяжения пружин $\bar{F}$ и $\bar{F}'$. Силы инерции следует учесть только центробежные для шаров M_1 и M_2 (рис. 100, *б*), так как касательные при вращении с постоянной угловой скоростью равны нулю.

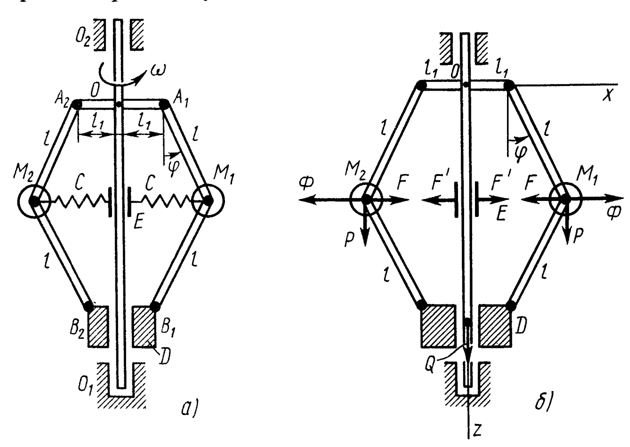


Рис. 100

Если пренебречь силами трения, то связи в рассматриваемой задаче можно считать идеальными. Они неосвобождающие и стационарные.

Декартовы координаты точки M_1: x_1, z_1; ползуна D: 0, z_2. Применение общего уравнения динамики к регулятору дает

$$2\Phi\delta x_1+2P\delta z_1-2F\delta x_1+Q\delta z_2=0. \qquad \text{(а)}$$

При составлении этого уравнения отдельно вычислена элементарная работа сил на возможных перемещениях для шара M_1. Чтобы учесть элементарную работу таких же сил для шара M_2, результат надо удвоить. Работа силы упругости пружин F', приложенных к ползуну E, равна нулю.

Для модулей сил инерции Φ и упругости F имеем

$$\Phi=\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)\omega^2; \quad F=c\lambda=cl\sin\varphi, \qquad \text{(б)}$$

где λ — удлинение пружины.

Для установления зависимости между вариациями координат точек получим предварительно зависимость самих координат от угла φ:

$$x_1=l_1+l\sin\varphi; \quad z_1=l\cos\varphi; \quad z_2=2l\cos\varphi.$$

Варьируя эти зависимости, имеем:

$$\delta x_1=l\cos\varphi\,\delta\varphi; \quad \delta z_1=-l\sin\varphi\,\delta\varphi; \quad \delta z_2=-2l\sin\varphi\,\delta\varphi. \qquad \text{(в)}$$

Все вариации координат выразились через вариацию одного угла φ; следовательно, система имеет одну степень свободы.

Подставляя значения величин из (б) и (в) в (а), после сокращения на $2l\delta\varphi$ получаем

$$\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)\omega^2 l\cos\varphi-P\sin\varphi-cl\sin\varphi\cos\varphi-Q\sin\varphi=0. \qquad \text{(а')}$$

Разделив обе части этого соотношения на $\cos\varphi$, получаем искомую зависимость между ω и φ:

$$\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)l\omega^3-P\,\mathrm{tg}\,\varphi-cl\sin\varphi-Q\,\mathrm{tg}\,\varphi=0,$$

или

$$\omega^2=\frac{(P+Q)\,\mathrm{tg}\,\varphi+cl\sin\varphi}{Pl(l_1+l\sin\varphi)}\,g.$$

Пример 2. Призма A, сила тяжести которой P_1, расположена на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 101). По грани призмы, наклоненной к горизонту на угол α, может двигаться груз B, имеющий силу тяжести P_2. Груз B прикреплен к призме с помощью пружины, имеющей жесткость c.

Определить движение призмы A и груза B по призме, если в начальный момент система находилась в покое и пружина была не деформирована. Силами трения груза B о призму A пренебречь.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем x и s. Связи системы неосвобождающие, стационарные и идеальные, так как поверхности тел гладкие.

Активными силами являются силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и силы упругости пружины $\bar{F}$ (рис. 102).

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах для случая двух степеней свободы можно выразить в форме

$$Q_1+Q_1^{(\Phi)}=0; \quad Q_2+Q_2^{(\Phi)}=0. \qquad \text{(а)}$$

Здесь Q_1 и Q_2 — обобщенные силы, отнесенные к обобщенным координатам x и s; $Q_1^{(\Phi)}$ и $Q_2^{(\Phi)}$ — обобщенные силы инерции, отнесенные к тем же координатам.

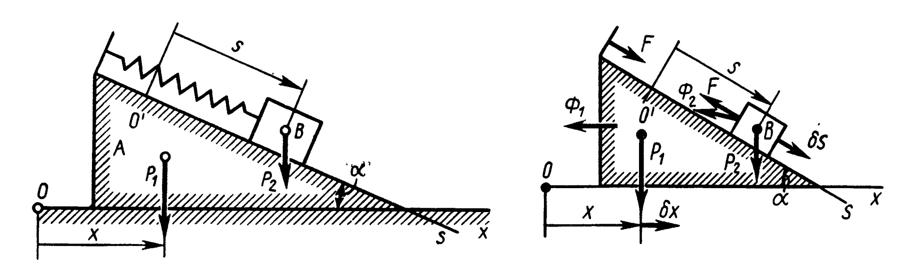


Рис. 101 Рис. 102

Обобщенные силы для координаты x вычисляем по формулам

$$Q_1 = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_x}{\delta x}; \quad Q_1^{(\Phi)} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_x}{\delta x}, \tag{б}$$

где $\bar{F}_k$ — активная сила, приложенная к k-й точке системы; $\bar{\Phi}_k$ — сила инерции для той же точки. Индекс x в числителе указывает, что сумму элементарных работ на возможных перемещениях точек $\delta\bar{r}_k$ следует вычислять при изменении только координаты x, считая координату s при этом постоянной.

Дав возможное перемещение δx в направлении возрастания координаты x, имеем по формуле (б) $Q_1=0$, так как силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ перпендикулярны возможному перемещению, а силы упругости (одна приложена к грузу; другая, равная первой, но противоположная по направлению,— к призме в точке закрепления пружины) в сумме дают элементарную работу, равную нулю при постоянном s.

Для обобщенной силы инерции соответственно имеем

$$Q_1^{(\Phi)} = \frac{-\Phi_1\delta x - \Phi_{2x}\delta x}{\delta x} = -(\Phi_1+\Phi_{2x}) = -\frac{P_1\ddot{x}+P_2(\ddot{s}\cos\alpha+\ddot{x})}{g} =$$

$$= -\frac{(P_1+P_2)\ddot{x}+P_2\ddot{s}\cos\alpha}{g},$$

так как проекции сил инерции призмы и груза на ось Ox

$$\Phi_{1x} = \frac{P_1}{g}\ddot{x}; \quad \Phi_{2x} = \frac{P_2}{g}(\ddot{s}\cos\alpha+\ddot{x}).$$

Обобщенные силы Q_2 и $Q_2^{(\Phi)}$ на возможном перемещении δs, направленном в сторону возрастания координаты s, при неизменном значении координаты x вычисляем по формулам

$$Q_2 = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_s}{\delta s}; \quad Q_2^{(\Phi)} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_s}{\delta s}. \tag{в}$$

Имеем

$$Q_2 = \frac{P_2\sin\alpha\delta s - F\delta s}{\delta s} = P_2\sin\alpha - F = P_2\sin\alpha - c(\lambda_{\text{ст}}+s) = -cs,$$

так как сила упругости $F=c\lambda=c(\lambda_{\text{ст}}+s)$, если s отсчитывать от положения статического равновесия груза B; $\lambda_{\text{ст}}$ — статическое удлинение пружины под действием силы тяжести груза B в положении равновесия. В положении статического равновесия действующие на груз силы удовлетворяют условиям равновесия. Проецируя их на ось $O's$, получаем из условий равновесия

$$P_2\sin\alpha - c\lambda_{\text{ст}} = 0.$$

Для обобщенной силы инерции имеем

$$Q_2^{(\Phi)}=\frac{-\Phi_{2s}\delta s}{\delta s}=-\frac{P_2}{g}(\ddot{s}+\ddot{x}\cos\alpha),$$

где Φ_{2s} — проекция силы инерции груза B на ось $O's$.

Подставляя полученные значения обобщенных сил в (а), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$(P_1+P_2)\ddot{x}+P_2\cos\alpha\ddot{s}=0; \qquad -cs-\frac{P_2}{g}(\ddot{s}+\ddot{x}\cos\alpha)=0. \tag{а'}$$

Исключая из второго уравнения (а′) с помощью первого $\ddot{x}$, имеем следующее уравнение для s:

$$\ddot{s}+\frac{(P_1+P_2)cg}{P_2[P_1+P_2(1-\cos^2\alpha)]}s=0,$$

или

$$\ddot{s}+k^2s=0, \tag{г}$$

где

$$k^2=\frac{(P_1+P_2)cg}{P_2[P_1+P_2(1-\cos^2\alpha)]}.$$

Интегрируя (г), получим

$$s=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \tag{г'}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем по начальным условиям

$$t=0; \quad s=-\lambda_{ст}=-\frac{P_2\sin\alpha}{c}; \quad \dot{s}=0.$$

Дифференцируя (г′), имеем

$$\dot{s}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt. \tag{г''}$$

Из (г′) и (г″) при $t=0$ получаем

$-\lambda_{ст}=C_1; \quad C_2=0.$

После этого имеем

$$s=-\lambda_{ст}\cos kt=-\frac{P_2\sin\alpha}{c}\cos\sqrt{\frac{(P_1+P_2)cg}{P_2(P_1+P_2\sin^2\alpha)}}\,t.$$

Подставляя значения $\ddot{s}$ из (г) в первое из уравнений (а′), получаем следующее дифференциальное уравнение для x:

$$\ddot{x}=\frac{P_2k^2\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}\cos kt. \tag{д}$$

Интегрируя его, имеем

$$\dot{x}=\frac{P_2k\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}\sin kt+C_3. \tag{д'}$$

Интегрируя второй раз, получим

$$x=-\frac{P_2\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}\cos kt+C_3t+C_4. \tag{д''}$$

Постоянные C_3 и C_4 определяем, используя начальные условия

$$t=0, \quad x=0, \quad \dot{x}=0.$$

Из (д′), (д″) и начальных условий имеем

$$0=C_3; \quad 0=-\frac{P_2\lambda_{\text{ст}}\cos\alpha}{P_1+P_2}+C_4,$$

или

$$C_3=0; \quad C_4=\frac{P_2\lambda_{\text{ст}}\cos\alpha}{P_1+P_2}.$$

После этого

$$x=\frac{P_2\lambda_{\text{ст}}\cos\alpha}{P_1+P_2}(1-\cos kt).$$

§ 9. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Из (30) получим уравнения Лагранжа второго рода, или просто уравнения Лагранжа. Уравнения Лагранжа первого рода — уравнения с неопределенными множителями Лагранжа — получены для одной точки в § 8 гл. 1. Уравнения Лагранжа первого рода можно получить и для системы.

Тождества Лагранжа. Для получения уравнений Лагранжа потребуется использовать три тождества. Одно из них — хорошо известная формула дифференцирования скалярного произведения двух любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{a}\cdot\bar{b})=\frac{\mathrm{d}\bar{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{b}}{\mathrm{d}t}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\bar{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\bar{b}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{a}\cdot\bar{b})-\bar{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{b}}{\mathrm{d}t}.$$

Если принять за $\bar{a}$ вектор скорости $\bar{v}_k=\dot{\bar{r}}_k$, а за $\bar{b}$ — вектор $\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}$, то в соответствии с этим тождеством получим

$$\ddot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)-\dot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right). \tag{31}$$

Другое тождество (тождество Лагранжа) выражается в виде

$$\partial\bar{r}_k/\partial q_i=\partial\dot{\bar{r}}_k/\partial\dot{q}_i, \tag{32}$$

где точки над величинами означают их производные по времени. Величина $\dot{q}_i=\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$ называется *обобщенной скоростью*. Тождество (32) утверждает, что «точки» (дифференцирование по времени) можно поставить одновременно в числителе и знаменателе или их «сократить». Справедливость (32) доказывается вычислением входящих в него величин и их сравнением. Действительно, в общем случае

$$\bar{r}_k=\bar{r}_k(q_1(t),\ q_2(t),\ ...,\ q_n(t),\ t).$$

При движении системы обобщенные координаты тоже есть функции времени. Дифференцируя $\bar{r}_k$ по времени как его сложную функцию, имеем

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\dot{q}_n +$$
$$+ \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \qquad (33)$$

Частные производные $\partial \bar{r}_k / \partial q_i$ и $\partial \bar{r}_k / \partial t$ не могут зависеть от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$; следовательно, дифференцирование частным образом по $\dot{q}_i$ с фиксированным номером обеих частей (33) дает только коэффициент при этой переменной. Все остальные слагаемые при дифференцировании дадут нули, так как они не зависят от $\dot{q}_i$ с этим фиксированным номером. Имеем

$$\partial \dot{\bar{r}}_k / \partial \dot{q}_i = \partial \bar{r}_k / \partial q_i.$$

Тождество (32) доказано.

Другое тождество Лагранжа заключается в перестановке порядка дифференцирования по времени и обобщенной координате вектора $\bar{r}_k$, т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}. \qquad (34)$$

Для доказательства этого тождества вычислим $\partial \dot{\bar{r}}_k / \partial q_i$, используя (33) и учитывая, что обобщенные скорости не зависят от обобщенных координат. Получим

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \qquad (35)$$

С другой стороны, $\partial \bar{r}_k / \partial q_i$ есть сложная функция времени, которая зависит от него не только явно, но и через обобщенные координаты. По правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial q_i}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_i}. \qquad (36)$$

Порядок частного дифференцирования в смешанных производных можно изменять. С учетом этого (35) и (36) совпадают. Таким образом, второе тождество Лагранжа доказано.

Вывод уравнений Лагранжа. Для получения из (30) уравнений Лагранжа для обобщенной силы инерции необходимо доказать справедливость следующей формулы:

$$Q_i^{(\Phi)} = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right], \qquad (37)$$

где

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2}$$

— кинетическая энергия системы при ее движении относительно инерциональной системы отсчета.

Для доказательства (37) вычислим $Q_i^{(\Phi)}$, используя ее определение через силу инерции $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k$. Имеем

$$Q_i^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \qquad (38)$$

Преобразуем выражение

$$A = \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

В соответствии с тождеством (31)

$$A = \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right).$$

Применим тождества Лагранжа:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i}.$$

После этого

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i}.$$

Подставляя это значение A в (38) и внося постоянную массу под знак производных, а производные вынося за знак сумм, получим

$$Q_i^{(\Phi)} = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2}\right] = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right].$$

Формула (37) доказана.

Подставляя выражение (37) для $Q_i^{(\Phi)}$ в (30), получим следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (39)$$

Число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы системы.

Структура уравнений Лагранжа и их составление. Уравнения Лагранжа для обобщенных координат являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, как и дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах. Число уравнений Лагранжа совпадает с числом обобщенных координат. Действительно, для кинетической энергии системы, используя ее определение и формулу (33) для $\dot{\bar{r}}_k = \bar{v}_k$, имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar r_k}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial\bar r_k}{\partial t}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot q_i\dot q_j+\sum_{i=1}^{n} B_i\dot q_i+\frac{1}{2}C,$$

где введены обозначения

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial\bar r_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\bar r_k}{\partial q_j};\quad B_i=\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial\bar r_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\bar r_k}{\partial t};\quad C=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\frac{\partial\bar r_k}{\partial q_i}\right)^2.$$

Величины A_{ij}, B_i, C могут зависеть от обобщенных координат и времени, но не зависят от обобщенных скоростей. С учетом этого

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot q_j+B_i$$

и

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}=\sum_{j=1}^{n}\left(A_{ij}\ddot q_j+\frac{\mathrm dA_{ij}}{\mathrm dt}\dot q_j\right)+\frac{\mathrm dB_i}{\mathrm dt}.$$

Это выражение содержит $\ddot q_j$, т. е. производную от обобщенной координаты только второго порядка. Другие слагаемые уравнений Лагранжа содержат производные от обобщенных координат не выше первого порядка. Активные силы $\bar F_k$, если они не зависят от ускорений точек, не могут дать зависимости Q_i от обобщенных ускорений.

Интегрируя уравнения Лагранжа для случая заданных активных сил, получим все обобщенные координаты как функции времени и $2n$ постоянных интегрирования. Для определения этих постоянных следует дополнительно задать начальные условия, т. е., например, при $t=0$ задать

$$q_i=q_i^0;\quad \dot q_i=\dot q_i^0,$$

где q_i^0 и $\dot q_i^0$ — начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей.

При составлении уравнений Лагранжа можно рекомендовать следующий порядок операций.

1. Вычислить кинетическую энергию системы в ее движении относительно инерциальной системы отсчета.

2. Выбрав обобщенные координаты, число которых равно числу степеней свободы системы, преобразовать кинетическую энергию к обобщенным координатам.

3. Выполнить операции дифференцирования кинетической энергии, предусмотренные уравнениями Лагранжа.

4. Вычислить одним из способов, указанных в § 7, обобщенные силы системы.

5. Приравнять величины левой и правой частей, входящих в уравнения Лагранжа.

Уравнения Лагранжа для потенциальных сил. Если силы, действующие на точки системы, являются потенциальными, то для обобщенных сил справедлива формула $Q_i=\partial U/\partial q_i$. Силовая функция U не зависит от обобщенных скоростей, поэтому производную от нее по обобщенной скорости $\partial U/\partial \dot{q}_i=0$ можно добавить к $\partial T/\partial \dot{q}_i$. С учетом этого после переноса всех слагаемых в левую часть получим следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Если ввести функцию Лагранжа, или лагранжиан, по формуле

$$L=T+U=T-\Pi, \tag{40}$$

то уравнения Лагранжа для случая потенциальных сил примут форму

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{41}$$

Функция Лагранжа отличается от полной механической энергии системы

$$E=T+\Pi=T-U.$$

Из уравнений Лагранжа для стационарных потенциальных сил и случая стационарности связей системы можно получить ранее установленный закон сохранения полной механической энергии

$$E=T+\Pi=h,$$

где h — постоянная величина.

Уравнения Лагранжа (41) можно получить как уравнения Эйлера из вариационного исчисления для экстремума функционала

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t,$$

где $L=T+U$ — функция Лагранжа. Функционал S, зависящий от функций $q_i(t)$ и $\dot{q}_i(t)$, называется действием по Гамильтону. Для того чтобы действие по Гамильтону имело экстремум, должна быть равна нулю его вариация, т. е.

$$\delta S=0. \tag{41$'$}$$

Условие (41′) выражает так называемый принцип Гамильтона. Принцип Гамильтона утверждает, что для действительного движения системы из одного положения в другое действие по Гамильтону имеет экстремум по сравнению с другими возможными движениями системы при фиксированных значениях q_i на границах, т. е. при t_1 и t_2.

Принцип Гамильтона позволяет получить уравнения Лагранжа без использования основных аксиом динамики. Следовательно, он заменяет эти аксиомы при выводе уравнений Лагранжа для случая потенциальных сил.

Циклические координаты и циклические интегралы. Функция Лагранжа $L=T+U$ в общем случае зависит от обобщенных

скоростей, обобщенных координат и времени. Если какая-либо обобщенная координата, например q_j, не входит в выражение функции Лагранжа, то для нее

$$\partial L / \partial q_j = 0. \tag{42}$$

Обобщенная координата, которая удовлетворяет условию (42), называется *циклической*. Для циклической обобщенной координаты q_j уравнение Лагранжа примет форму

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Из него получаем циклический интеграл уравнений Лагранжа:

$$\partial L / \partial \dot{q}_j = C_j, \tag{43}$$

где C_j — постоянная величина.

В циклический интеграл могут входить производные по времени от обобщенных координат, в том числе и производная по времени от циклической координаты не выше первого порядка. Следовательно, (43) в отличие от уравнений Лагранжа в общем случае является обыкновенным дифференциальным уравнением не выше первого порядка. Если все обобщенные координаты являются циклическими, то система уравнений Лагранжа, имеющих второй порядок, заменится циклическими интегралами, имеющими только первый порядок. Интегрировать систему уравнений первого порядка значительно проще, чем систему второго порядка. Отыскание обобщенных координат, которые являются циклическими, имеет важное значение. Используя циклические интегралы, можно так называемым методом игнорирования координат уменьшить число уравнений Лагранжа на количество циклических координат, не повышая при этом порядка получаемых дифференциальных уравнений.

Другое направление в аналитической динамике состоит в отыскании самих интегралов уравнений Лагранжа или другой системы уравнений, им эквивалентной.

Аналитическая механика после Лагранжа получила большое развитие и применение в различных областях науки и техники. Ее методы особенно широко применяются в теории колебаний систем и в квантовой механике.

Пример. Однородный диск A силой тяжести $P = 100$ Н обмотан нерастяжимой нитью, которая перекинута через блок B и прикреплена к грузу D, имеющему силу тяжести $P_2 = 200$ Н (рис. 103). Груз D может скользить по неподвижной наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. Коэффициент трения скольжения между грузом и плоскостью $f = 0{,}3$. Блок B, имеющий силу тяжести $P_1 = 400$ Н, принять за однородный диск.

Определить ускорение груза D и оси диска A, а также натяжение нити и давление на ось блока, если нить не скользит по блоку. Трением на оси блока и массой нити пренебречь. Движение начинается из состояния покоя.

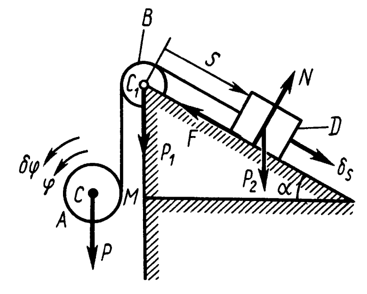


Рис. 103

Решение. Система движущихся тел имеет две степени свободы. За обобщенные координаты системы примем перемещение s груза по наклонной плоскости и угол φ поворота диска A. Угол φ считаем положительным против часовой стрелки, а перемещение s — вниз по наклонной плоскости.

Связями системы являются нить, ось блока и негладкая наклонная плоскость. Если наклонную плоскость заменить силами реакций связей, то оставшиеся связи окажутся идеальными, но появится дополнительная степень свободы у груза D. Можно сделать связи идеальными, считая наклонную плоскость гладкой, а шероховатость ее поверхности и поверхности груза D компенсировать силой трения. В этом случае дополнительной степени свободы не появится. Связи окажутся идеальными и для движения системы можно составить уравнения Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_s; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi.$$

Кинетическая энергия системы состоит из кинетических энергий отдельных тел:

$$T=T_A+T_B+T_D.$$

Диск A совершает плоское движение. Его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T_A=\frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2}+J_{Cz}\frac{\dot{\varphi}^2}{2},$$

где v_C — скорость центра масс диска; $J_{Cz}=\frac{P}{g}\frac{r^2}{2}$ — момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска; r — радиус диска.

Блок B вращается вокруг неподвижной оси. Его кинетическая энергия

$$T_B=J_{C_1z}\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2},$$

где $\dot{\varphi}_1$ — угловая скорость блока; $J_{C_1z}=\frac{P_1}{g}\frac{r_1^2}{2}$ — момент инерции относительно оси вращения; r_1 — радиус блока.

Груз D движется поступательно, и его кинетическая энергия

$$T_D=\frac{P_2}{g}\frac{\dot{s}^2}{2}.$$

Так как нить нерастяжима и не скользит по блоку, то угловая скорость блока связана со скоростью груза соотношением $\dot{s}=-r_1\dot{\varphi}_1$. Скорость груза предполагаем направленной в положительную сторону, т. е. вниз по наклонной плоскости, а следовательно, в начале движения груза из состояния покоя вниз направлено и ускорение груза. Все точки нити имеют одинаковое числовое значение скорости $|\dot{s}|$. Следовательно, такую же скорость имеет и точка M диска. Приняв ее за полюс, определяем скорость точки C по формуле, связывающей скорости двух точек тела при плоском движении:

$$\bar{v}_C=\bar{v}_M+\bar{v}_{CM},$$

где $v_{CM}=MC|\dot{\varphi}|$.

При вращении диска против часовой стрелки скорость $\bar{v}_{CM}$ направлена вертикально вниз, а $\bar{v}_M$ — вертикально вверх при движении груза D вниз по

наклонной плоскости. Следовательно, $v_C=\dot{s}-r\dot{\varphi}$, где направление вверх считается положительным для точки C.

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости и координаты. Имеем

$$T=T_A+T_B+T_D=\frac{P}{g}\frac{(\dot{s}-r\dot{\varphi})^2}{2}+\frac{Pr^2}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{P_1}{2g}\frac{\dot{s}^2}{2}+\frac{P_2}{g}\frac{\dot{s}^2}{2}=$$
$$=\frac{\dot{s}^2}{2g}\left(P+\frac{P_1}{2}+P_2\right)+\frac{3Pr^2}{4g}\dot{\varphi}^2-\frac{Pr}{g}\dot{s}\dot{\varphi}.$$

Вычисляем производные, входящие в левые части уравнений Лангранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial s}=\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}}=\frac{\dot{s}}{g}\left(P+\frac{P_1}{2}+P_2\right)-\frac{Pr}{g}\dot{\varphi};$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}=\frac{\ddot{s}}{g}\left(P+\frac{P_1}{2}+P_2\right)-\frac{Pr}{g}\ddot{\varphi};$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{3Pr^2}{2g}\dot{\varphi}-\frac{Pr}{g}\dot{s};$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{3Pr^2}{2g}\ddot{\varphi}-\frac{Pr}{g}\ddot{s}.$$

При вычислении обобщенных сил следует учитывать силы тяжести $\bar{P}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и силу трения $\bar{F}$ наклонной плоскости. Реакции идеальных связей (нить, ось блока, гладкая наклонная плоскость) учитывать не нужно. Важно выбрать правильное направление для силы трения $\bar{F}$, которая всегда направлена против скорости движения $\dot{s}$ груза D, заранее не известной. Предположим, что движение груза направлено вниз по наклонной плоскости. Тогда сила трения будет иметь противоположное направление. Решаем задачу при этом предположении. Если получим $\ddot{s}$ (в данном случае и $\dot{s}$, так как движение начинается из состояния покоя) со знаком плюс, то принятое предположение правильно. Если же ускорение $\ddot{s}$ (а следовательно, и скорость $\dot{s}$) получится отрицательным, то следует изменить направление силы на обратное и снова решать задачу, так как предполагаемое направление силы трения оказалось направленным по движению груза, т. е. неправильно. При $\ddot{s}=0$ движение груза из состояния покоя начаться не может.

Установив предполагаемое направление силы трения вверх по наклонной плоскости, вычисляем обобщенную силу Q_s. При этом сообщаем системе такое возможное перемещение, допускаемое связями, при котором угол φ не изменяется, а изменяется только s на положительную величину δs, т. е. сообщаем возможное перемещение грузу вниз по наклонной плоскости. По формуле для обобщенной силы имеем

$$Q_s=\frac{(\Sigma\,\delta A_k)_s}{\delta s}=\frac{(P_2\sin\alpha-fN)\,\delta s-P\delta s}{\delta s}=P_2\sin\alpha-fN-P,$$

так как при $\varphi=\mathrm{const}$ перемещение точки C диска такое же, как и у точки M, а $F=F_{\max}=fN$. Сила $\bar{P}_1$ приложена в неподвижной точке, и ее элементарная работа на возможном перемещении равна нулю, так как возможное перемещение неподвижной точки равно нулю.

Нормальную реакцию наклонной плоскости определяем из условия равновесия сил для груза D в направлении нормали к наклонной плоскости. Имеем

$$N-P_2\cos\alpha=0;\qquad N=P_2\cos\alpha.$$

С учетом этого

$$Q_s=P_2(\sin\alpha-f\cos\alpha)-P.$$

При вычислении обобщенной силы Q_φ сообщаем системе возможное перемещение, при котором изменяется только угол φ на положительную величину $\delta\varphi$, а обобщенная координата s не изменяется. Получаем

$$Q_\varphi = \frac{(\Sigma\,\delta A_k)_\varphi}{\delta\varphi} = \frac{P\,\delta s_C}{\delta\varphi}.$$

В этом случае точка M диска является его мгновенным центром скоростей, поэтому $\delta s_C = r\,\delta\varphi$ и δs_C при положительном $\delta\varphi$ направлено вниз по силе $\bar{P}$. Элементарная работа других сил на этом возможном перемещении равна нулю, так как точки их приложения остаются неподвижными при этом перемещении. Таким образом,

$$Q_\varphi = \frac{P\,\delta s_C}{\delta\varphi} = Pr.$$

Подставляя вычисленные значения величин в уравнения Лагранжа, получим систему уравнений

$$\frac{\ddot{s}}{g}\left(P + \frac{P_1}{2} + P_2\right) - \frac{\ddot{\varphi}}{g}Pr = P_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - P;$$

$$\frac{\ddot{s}}{g}Pr - \frac{\ddot{\varphi}}{g}\,\frac{3}{2}Pr^2 = -Pr.$$

Из последнего уравнения выражаем $\ddot{\varphi}$ через $\ddot{s}$. Имеем $r\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}(g + \ddot{s})$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$\frac{\ddot{s}}{g}\left(\frac{P}{3} + \frac{P_1}{2} + P_2\right) = P_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{P}{3},$$

или

$$\frac{\ddot{s}}{g}1300 = 600 \cdot 0{,}24 - 100; \quad \ddot{s} = 0{,}034g \approx 0{,}33 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс у $\ddot{s}$ (в данном случае и у $\dot{s}$) указывает, что движение груза D действительно направлено вниз по наклонной плоскости, как и предполагалось.

Ускорение точки C можно получить дифференцированием по времени выражения для скорости $v_C = \dot{s} - r\dot{\varphi}$, справедливого для любого момента времени. Имеем

$$\frac{dv_C}{dt} = \ddot{s} - r\ddot{\varphi}.$$

Таким образом,

$$a_C = a_C^\tau = \ddot{s} - r\ddot{\varphi} = \ddot{s} - \frac{2}{3}(g + \ddot{s}) = \frac{\ddot{s}}{3} - \frac{2}{3}g = -0{,}656g = -6{,}43 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус у a_C указывает, что ускорение $\bar{a}_C$ направлено вниз, так как за положительное направление было принято направление вверх.

Для определения сил натяжения нитей применим к грузу и диску принцип Даламбера. Для груза D (рис. 104), проецируя силы на ось Ox, получаем

$$S_2 + \Phi_2 - P_2\sin\alpha + fN = 0.$$

Но

$$\Phi_2 = \frac{P_2}{g}\ddot{s}; \quad N = P_2\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$S_2 = P_2\left(\sin\alpha - f\cos\alpha - \frac{\ddot{s}}{g}\right) = 41{,}2 \text{ Н}.$$

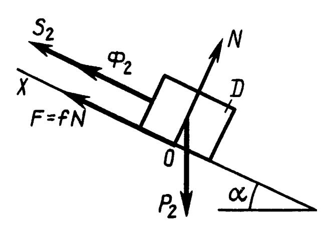


Рис. 104

Для диска A (рис. 105), проецируя силы на ось Cy, имеем

$$S_1+\Phi-P=0,$$

но $\Phi=\frac{P}{g}a_C$.

Поэтому

$$S_1=P\left(1-\frac{a_C}{g}\right)=100(1-0{,}656)\approx 34{,}4\ \text{Н}.$$

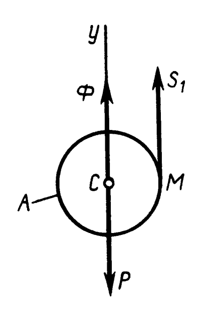


Рис. 105

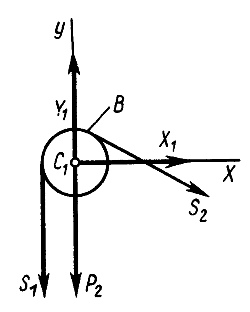


Рис. 106

Так как центр масс блока неподвижен, то по теореме о движении центра масс (рис. 106) получаем равновесие сил

$$0=X_1+S_2\cos\alpha;\quad 0=Y_1-S_1-P_2-S_2\sin\alpha.$$

Из этих уравнений определяем проекции реакций оси X_1 и Y_1:

$$X_1=-S_2\cos\alpha=-35{,}4\ \text{Н};\quad Y_1=P_2+S_1+S_2\sin\alpha=455{,}1\ \text{Н}.$$

Числовое значение силы реакции оси блока, а следовательно, и давление блока на ось

$$N_1=\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\approx 456{,}4\ \text{Н}.$$

§ 10. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения Лагранжа (41) представляют собой n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для обобщенных координат q_i. Эти уравнения многими способами можно свести к системе $2n$ уравнений первого порядка путем введения новых переменных. Канонические уравнения или уравнения Гамильтона дают такую систему дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентную уравнениям Лагранжа, в наиболее удобной симметричной форме.

Получим уравнения Гамильтона. Для этого введем в качестве дополнительных к q_i независимых переменных систему обобщенных импульсов:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i},\tag{44}$$

где $L=T+U=T-\Pi$ — функция Лагранжа, представляющая собой избыток кинетической энергии над потенциальной. Определим новую функцию, которая называется функцией Гамильтона:

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-L.\tag{45}$$

Можно показать, что функция Гамильтона для случаев, когда кинетическая энергия является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей, т. е.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

и силовая функция не зависит от обобщенных скоростей и явно от t, совпадает с полной механической энергией:

$$E=T+\Pi.$$

Для других случаев функция Гамильтона является лишь неким аналогом полной механической энергии.

Для вывода уравнений Гамильтона вычислим вариацию функции H, используя ее определение (45) и учитывая, что время при этом не варьируется. Так как $L=L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)$, то получаем

$$\delta H=\sum_i p_i\delta\dot{q}_i+\sum_i\dot{q}_i\delta p_i-\delta L;$$

$$\delta L=\sum_i\frac{\partial L}{\delta\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_i p_i\delta\dot{q}_i+\sum_i\dot{p}_i\delta q_i. \qquad (46)$$

При этом учтено, что, согласно определению p_i и уравнениям Лагранжа, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=p_i;\quad \frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_i.$$

С учетом значения δL выражение для δH принимает форму

$$\delta H=\sum_i p_i\delta\dot{q}_i+\sum_i\dot{q}_i\delta p_i-\sum_i p_i\delta\dot{q}_i-\sum_i\dot{p}_i\delta q_i=\sum_i\dot{q}_i\delta p_i-\sum_i\dot{p}_i\delta q_i, \qquad (47)$$

так как первое и третье слагаемые в сумме дают нуль.

С другой стороны, H есть функция новых переменных q_i, p_i и, возможно, времени t, т. е.

$$H=H(q_i,\ p_i,\ t).$$

Поэтому для ее вариации, выраженной через эти переменные, имеем

$$\delta H=\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i. \qquad (48)$$

Приравнивая значения δH из (47) и (48) и учитывая, что q_i, p_i независимы и, следовательно, их вариации независимы и произвольны, получаем следующие уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i};\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i};\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (49)$$

Уравнения Гамильтона служат для определения $q_i(t)$ и $p_i(t)$, если для них дополнительно заданы начальные условия, по которым можно определить постоянные интегрирования.

Уравнения Гамильтона по сравнению с уравнениями Лагранжа имеют ряд преимуществ. Для них разработаны методы нахождения интегралов. Формализм Гамильтона широко применяется в квантовой и статистической механике.

Пример. Составить уравнения Гамильтона и проинтегрировать их для системы с одной степенью свободы, для которой кинетическая и потенциальная энергия выражаются в форме

$$T=a\frac{\dot{q}^2}{2},\quad \Pi=c\frac{q^2}{2}, \qquad (а)$$

где a и c — постоянные положительные величины.

Решение. Вычисляем функцию Лагранжа. Имеем

$$L=T+U=T-\Pi=\frac{a\dot{q}^2}{2}-\frac{cq^2}{2}.$$

Определяем обобщенный импульс p. Получаем

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q}, \qquad (б)$$

так как Π не зависит от обобщенной скорости.

Для функции Гамильтона, согласно ее определению, используя (б), имеем

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L=p\dot{q}-a\frac{\dot{q}^2}{2}+c\frac{q^2}{2}=\frac{a\dot{q}^2}{2}+\frac{cq^2}{2}=T+\Pi=E, \qquad (в)$$

т. е. в рассматриваемом случае функция Гамильтона H равна полной механической энергии E.

Для составления уравнений Гамильтона выразим функцию H через переменные q и p, используя (б). Получим

$$H=\frac{a\dot{q}^2}{2}+\frac{cq^2}{2}=\frac{p^2}{2a}+\frac{cq^2}{2}. \qquad (г)$$

Из (г) путем дифференцирования имеем

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{a}; \quad \frac{\partial H}{\partial q}=cq.$$

Подставляя эти значения производных в уравнения Гамильтона

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad (д)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\dot{q}=\frac{p}{a}, \quad \dot{p}=-cq. \qquad (д')$$

Из системы уравнений Гамильтона (д′) путем дифференцирования первого уравнения по времени и подстановки $\dot{p}$ в полученное выражение из второго уравнения получим дифференциальное уравнение для определения q:

$$\ddot{q}+k^2q=0, \qquad (е)$$

где $k^2=\frac{c}{a}$.

Решение (е) можно представить в двух эквивалентных формах:

$$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt, \qquad (ж)$$

или

$$q=A\sin(kt+\alpha), \qquad (ж')$$

где C_1, C_2, A, α — постоянные величины, определяемые по начальным значениям для q.

Вычисляя $\dot{q}$ и подставляя его значение в первое уравнение (д′), имеем

$$p=a\dot{q}=ak(-C_1\sin kt+C_2\cos kt)=akA\cos(kt+\alpha). \qquad (з)$$

Получены решения уравнений Гамильтона (д′).

ГЛАВА 7
ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Теория колебаний механических систем — один из самых обширных и развитых разделов теоретической механики, имеющий большое прикладное значение.

Колебательные движения встречаются во многих отраслях современной науки и техники и требуют для рассмотрения широкого использования различных математических методов.

Рассмотрим основные свойства малых колебаний механических систем с одной и двумя степенями свободы на основе применения уравнений Лагранжа; некоторые результаты для системы с любым конечным числом степеней свободы приведем без вывода. Механическая система может совершать малые колебания только вблизи устойчивого положения равновесия. Обобщенные координаты системы в положении равновесия принимают равными нулю, т. е. отсчитывают их от положения равновесия. Тогда *колебательным движением* механической системы в общем случае считают всякое ее движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, т. е. принимают нулевые значения по крайней мере несколько раз.

Ниже рассмотрены только периодические и псевдопериодические колебания.

Для рассмотрения малых колебаний следует дать определение устойчивости положения равновесия системы и установить условия, при выполнении которых положение равновесия является устойчивым.

§ 1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Определение устойчивости положения равновесия

Для наглядности рассмотрим положение равновесия на примере одного твердого тела. Пусть таким телом является стержень (рис. 107, *а, б, в*) с горизонтальной осью вращения, проходящей через точку O. Стержень имеет два положения равновесия при $\varphi=0°$ и $\varphi=180°$. В положении равновесия силы, приложенные к стержню, составляют уравновешенную систему сил.

Чтобы установить, будет ли рассматриваемое положение равновесия стержня устойчивым, следует дать стержню достаточно малое начальное отклонение от положения равновесия, а в общем случае сообщить ему еще достаточно малую начальную угловую скорость и рассмотреть его последующее движение. Для простоты ограничимся только одним малым начальным отклонением от положения равновесия. В отклоненном положении силы,

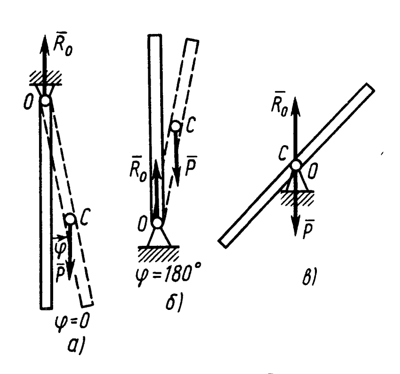


Рис. 107

действующие на стержень (сила тяжести и реакция в точке O), уже не являются уравновешенными.

Если существует такое достаточно малое начальное отклонение стержня от положения равновесия, при котором силы стремятся вернуть стержень в положение равновесия, то такое положение равновесия считается *устойчивым*.

Положение равновесия стержня при $\varphi=0°$ (рис. 107, *а*) является устойчивым, так как при начальном его отклонении на малый угол силы, действующие на стержень, стремятся вернуть его в положение равновесия.

В том случае, когда силы еще дальше отклоняют стержень от положения равновесия, положение равновесия является *неустойчивым*.

Положение равновесия стержня при $\varphi=180°$ может служить примером неустойчивого положения равновесия (рис. 107, *б*). Силы, действующие на стержень, в этом случае стремятся отклонить его еще дальше от положения равновесия при любом как угодно малом начальном его отклонении от положения равновесия.

Если стержень, получив любое малое начальное отклонение от положения равновесия, остается в равновесии в новом отклоненном положении, то такое положение равновесия называется *безразличным*.

Примером безразличного положения равновесия может служить равновесие стержня, у которого закрепленная точка O совпадает с центром масс C. В этом случае силы, приложенные к стержню, образуют равновесную систему сил при любом начальном его отклонении от первоначального положения равновесия (рис. 107, *в*).

В общем случае кроме начального отклонения стержню следует сообщить также еще и некоторую достаточно малую начальную угловую скорость. Естественно, что тогда случай безразличного положения равновесия стержня следует отнести к неустойчивому положению равновесия, так как, получив любую малую начальную угловую скорость, стержень дальше будет удаляться с этой угловой скоростью по инерции от своего первоначального положения равновесия.

Все изложенное о положении равновесия стержня характерно не только для любого твердого тела, но и для любой механической системы. Наибольший интерес представляет устойчивое положение равновесия тела или механической системы, так как в таком положении равновесия тело или система могут находиться длительно, если им не сообщается какое-либо возмущение.

При устойчивом положении равновесия система, выведенная из положения равновесия достаточно малыми возмущениями в виде начальных отклонений и скоростей, которые сообщаются всем точкам системы или их части, совершает колебания около положения равновесия или приближается к нему без колебаний.

При неустойчивом положении равновесия случайные возмущения приводят к тому, что система при дальнейшем движении

все дальше отклоняется от положения равновесия. Таким образом, прежде всего необходимо установить характер положения равновесия системы. Для этого требуется ввести точное понятие устойчивости положения равновесия системы.

Строгое определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце прошлого века в работах русского ученого А. М. Ляпунова. Приведем это определение для системы с любым конечным числом степеней свободы n.

Условимся обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_n$ отсчитывать от положения равновесия системы, т. е. принимать их равными нулю в положении равновесия. Начальное возмущение системы состоит в общем случае из начальных значений обобщенных координат $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$ и начальных обобщенных скоростей $\dot{q}_1^0$, $\dot{q}_2^0$, ..., $\dot{q}_n^0$.

По Ляпунову, *равновесие системы называется устойчивым, если для любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *можно выбрать два других таких малых числа* $\eta_1 > 0$ *и* $\eta_2 > 0$, *что при удовлетворении начальными значениями обобщенных координат и скоростей неравенств* $|q_i^0| < \eta_1$, $|\dot{q}_i^0| < \eta_2$ *в любой момент времени все обобщенные координаты подчиняются условиям* $|q_i(t)| < \varepsilon$.

Таким образом, по Ляпунову, положение равновесия считается устойчивым, если можно задать достаточно малую область изменения начальных значений обобщенных координат в окрестности положения равновесия и область начальных обобщенных скоростей, для которых величины обобщенных координат при последующем движении системы ограничены заданной ε окрестностью вблизи положения равновесия. Ясно, что области начальных значений q_i^0 и $\dot{q}_i^0$, определяемые положительными числами η_1 и η_2, зависят от выбранной ε-окрестности, т. е. самого числа ε. Эти области начальных значений q_i^0 и $\dot{q}_i^0$ не должны соответствовать $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 0$, т. е. только самому положению равновесия, для которого $q_i^0 = 0$ и $\dot{q}_i^0 = 0$.

В положении равновесия механической системы каждая обобщенная сила Q_i равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщенные силы через потенциальную энергию вычисляются по формулам

$$Q_i = -\partial \Pi / \partial q_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Следовательно, в положении любого равновесия $\partial \Pi / \partial q_i = 0$, поэтому потенциальная энергия при этом может достигать своего экстремального значения.

Теорема Лагранжа — Дирихле

Малые колебания системы могут длительно совершаться только в окрестности устойчивого положения равновесия системы. Поэтому важное значение имеет теорема Лагранжа — Дирихле, устанавливающая достаточные условия

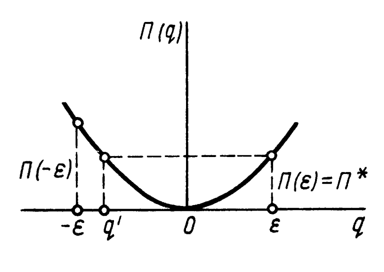


Рис. 108

устойчивости положения равновесия системы. Теорема утверждает: *для устойчивости положения равновесия системы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным и неосвобождающим связям и находящейся в стационарном потенциальном силовом поле, достаточно, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия имела изолированный относительный минимум.*

Докажем сначала теорему для системы с одной степенью свободы, допускающую наглядную геометрическую интерпретацию. Потенциальная энергия системы с одной степенью свободы для стационарного силового поля зависит только от одной обобщенной координаты q, равной нулю в положении равновесия. Примем потенциальную энергию в этом положении равной нулю, т. е. $\Pi(0)=0$. По условию теоремы в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный относительный минимум, т. е. $\Pi_{\min}=\Pi(0)=0$, и функция $\Pi=\Pi(q)$ в малой окрестности $q=0$, принимая только положительные значения, является возрастающей функцией q, т. е. имеет вид, представленный на рис. 108.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. Первая часть доказательства содержит выбор значения потенциальной энергии Π^*. Во второй части доказывается существование положительных чисел η_1 и η_2, отличных от нуля, обеспечивающих выполнение условий устойчивости.

Для определения значений Π^* зададим положительное число ε настолько малым, чтобы окрестность его не содержала соседних экстремумов функции $\Pi=\Pi(q)$. Рассмотрим значения функции $\Pi=\Pi(q)$ при $q=\varepsilon$ и $q=-\varepsilon$, т.е. $\Pi(\varepsilon)$ и $\Pi(-\varepsilon)$. Из двух положительных величин выберем наименьшую, например $\Pi(\varepsilon)$, и примем ее за Π^*. Если при движении системы оказалось, что потенциальная энергия $\Pi(q)<\Pi^*$, то из выбора значений Π^* следует, что $q'<q<\varepsilon$, т. е. q обязательно должно удовлетворять условию $|q|<\varepsilon$.

Для доказательства второй части теоремы учтем, что при движении консервативной системы и выполнении других условий теоремы о связях справедлив закон сохранения полной механической энергии

$$T+\Pi=T_0+\Pi_0,$$

где T_0 и Π_0 — значения кинетической и потенциальной энергий в начальный момент. Они зависят от начальных значений q^0 и $\dot{q}^0$, т. е. $\Pi_0=\Pi(q^0)$, $T_0=T(q^0, \dot{q}^0)$.

Кинетическая энергия системы может быть только положительной. Поэтому из закона сохранения механической энергии получаем следующее неравенство для потенциальной энергии:

$$\Pi < T_0 + \Pi_0.$$

Это неравенство позволяет установить соответствующие положительные числа η_1 и η_2. Неравенство допускает бесчисленное количество значений для q^0 и $\dot{q}^0$, удовлетворяющих ему. Действительно, неравенства $\Pi_0 < \Pi^*/2$ и $T_0 < \Pi^*/2$ обеспечивают выполнение рассматриваемого неравенства для потенциальной энергии. Из неравенства $\Pi_0 < \Pi^*/2$ получаем $|q^0| < \eta_1 \neq 0$, а из двух неравенств $T_0 < \Pi^*/2$, $|q^0| < \eta_1$ следует $|\dot{q}^0| < \eta_2 \neq 0$. Подставляя значения $T_0 < \Pi^*/2$ и $\Pi_0 < \Pi^*/2$ в основное неравенство, получим следующее условие для потенциальной энергии:

$$\Pi < T_0 + \Pi_0 < \Pi^*,$$

что в соответствии с выбором числовой величины Π^* обеспечивает для обобщенной координаты выполнение условия $|q| < \varepsilon$.

Доказано, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon < 0$ существуют положительные числа η_1 и η_2, и если $|q^0| < \eta_1$ и $|\dot{q}^0| < \eta_2$, то $|q| < \varepsilon$, т. е. положение равновесия устойчиво.

Для системы с двумя степенями свободы доказательство второй части теоремы почти не изменяется, за исключением того, что $\Pi_0 = \Pi(q_1^0, q_2^0)$ и $T_0 = T(q_1^0, q_2^0, \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0)$, но это не вносит существенных изменений в последующие рассуждения. Некоторые особенности возникают при выборе величины Π^*.

Для системы с двумя степенями свободы $\Pi = \Pi(q_1, q_2)$. В положении равновесия системы $q_1 = q_2 = 0$ принимаем $\Pi(0, 0) = \ = 0$. Следовательно, $\Pi_{\min} = \Pi(0, 0) = 0$.

Потенциальная энергия $\Pi = \Pi(q_1, q_2)$ в малой окрестности изолированного минимума положительна, и ее зависимость от обобщенных координат имеет форму поверхности, изображенной на рис. 109, *а*.

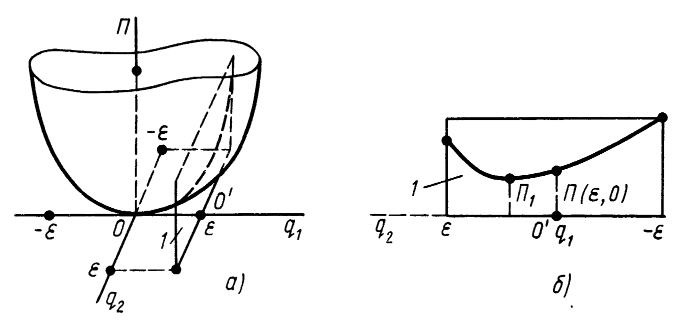


Рис. 109

Выберем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим значения потенциальной энергии $\Pi = \Pi(\varepsilon, q_2)$, и $\Pi = \Pi(-\varepsilon, q_2)$, где q_2 — любое, удовлетворяющее условию $|q_2| \leqslant \varepsilon$. Зависимость $\Pi = \Pi(\varepsilon, q_2)$ является уравнением линии пересечения плоскости $q_1 = \varepsilon$ (плоскость *1*) с поверхностью $\Pi = \Pi(q_1, q_2)$. Аналогично, $\Pi = \Pi(-\varepsilon, q_2)$ есть линия пересечения плоскости $q_1 = -\varepsilon$ с той же поверхностью. Из множества значений $\Pi(\varepsilon, q_2)$ и $\Pi(-\varepsilon, q_2)$ (рис. 109, *б*) при изменении q_2 в интервале $|q_2| \leqslant \varepsilon$ выбираем наименьшее Π_1. Затем рассматриваем $\Pi = \Pi(q_1, \varepsilon)$ и $\Pi = \Pi(q_1, -\varepsilon)$. Опять получим в плоскостях $q_2 = \varepsilon$ и $q_2 = -\varepsilon$ по кривой, аналогичной изображенной на рис. 109, *б*. Из множества этих значений потенциальной энергии выбираем наименьшее Π_2. Из двух положительных величин Π_1 и Π_2 наименьшее принимаем за Π^*.

Из способа выбора значения Π^* следует, что если в какой-то момент движения системы $\Pi(q_1, q_2) < \Pi^*$, то обобщенные координаты удовлетворяют условиям $|q_1| < \varepsilon$ *и* $|q_2| < \varepsilon$.

Рассмотрим доказательство теоремы Лагранжа—Дирихле для системы с n степенями свободы и, следовательно, с $q_1, q_2, ..., q_n$ обобщенными координатами.

Примем в положении равновесия все $q_i = 0$ и $\Pi(0, 0, ..., 0) = 0$. Тогда $\Pi_{\min} = \Pi(0, 0, ..., 0) = 0$. Выберем достаточно малое положительное число $\varepsilon > 0$, такое, чтобы в ε-окрестности не содержалось других экстремумов функции $\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_n)$. Дадим обобщенной координате q_1 значения $q_1 = \varepsilon$ и $q_1 = -\varepsilon$, т. е. $|q_1| = \varepsilon$, а другие обобщенные координаты при этом удовлетворяют условию $|q_i| \leqslant \varepsilon$. Из всех значений потенциальной энергии в этом случае выбираем наименьшее Π_1. Затем даем q_2 значение $|q_2| = \varepsilon$, а другие при изменении удовлетворяют условию $|q_i| \leqslant \varepsilon$. Наименьшее значение потенциальной энергии при этих условиях обозначим Π_2. Продолжая этот процесс со всеми обобщенными координатами, получим последовательность положительных чисел $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$, наименьшее из которых принимаем за Π^*.

Пока при движении системы $\Pi < \Pi^*$, выполняется условие $|q_i| < \varepsilon$ для всех обобщенных координат.

Пусть системе сообщили соответствующие начальные обобщенные координаты и скорости и она движется. При движении консервативной системы, удовлетворяющей связям, указанным в условии теоремы, справедлив закон сохранения механической энергии

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0,$$

где $\Pi_0 = \Pi(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0)$ и $T_0 = T(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0; \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, ..., \dot{q}_n^0)$, т. е. величины, зависящие от начальных значений обобщенных координат и скоростей. Так как при движении системы $T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} > 0$, то из закона сохранения энергии следует

$$\Pi < T_0 + \Pi_0.$$

Это неравенство выполняется, если справедливы, например, два неравенства: $\Pi_0 \leqslant \Pi^*/2$ и $T_0 \leqslant \Pi^*/2$. Из условий $\Pi_0 \leqslant \Pi^*/2$ получим ряд значений q_i^0, удовлетворяющих условию $|q^0| < \eta_1 \neq 0$, а из условия $T_0 \leqslant \Pi^*/2$ и неравенства $|q_i^0| < \eta_1$ — ряд значений $\dot{q}_i^0$, удовлетворяющих условию $|\dot{q}_i^0| < \eta_2 \neq 0$. Для потенциальной энергии после этого имеем

$$\Pi < T_0 + \Pi_0 < \Pi^*.$$

Следовательно, в соответствии с выбором Π^* все обобщенные координаты удовлетворяют условию $|q_i| < \varepsilon$.

Итак, существуют такие положительные числа η_1 и η_2, определяющие область начальных значений q_i^0 и $\dot{q}_i^0$, для которых все обобщенные координаты удовлетворяют условию $|q_i| < \varepsilon$, т. е. положение равновесия устойчиво. Теорема Лагранжа — Дирихле полностью доказана.

В некоторых случаях установить неустойчивость равновесия можно на основании теорем Ляпунова.

Приводим эти теоремы без доказательства.

1. Равновесие консервативной системы неустойчиво, если потенциальная энергия системы в положении равновесия не имеет минимума и отсутствие минимума определяется слагаемыми второго порядка малости в разложении потенциальной энергии в ряд по степеням обобщенных координат.

2. Равновесие консервативной системы неустойчиво, если потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет максимум и наличие максимума определяется членами наименьшего порядка малости в разложении потенциальной энергии в ряд по степеням обобщенных координат.

§ 2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Механическая система с одной степенью свободы имеет одну обобщенную координату q, и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \qquad (1)$$

Обобщенную силу Q можно считать состоящей из трех частей: $Q = Q^{\Pi} + Q^{\Phi} + Q^{B}$. Здесь Q^{Π} — обобщенная сила потенциальных сил. Она выражается через потенциальную энергию Π по формуле $Q^{\Pi} = -\partial\Pi/\partial q$. Потенциальная энергия в общем случае зависит от координат точек системы и, следовательно, от обобщенной координаты q и не зависит от обобщенной скорости $\dot{q}$. Для нестационарного силового поля, а также нестационарных связей потенциальная энергия может зависеть явно еще и от времени.

В Q^{Φ} включим ту часть обобщенной силы, которая получается от действия сил сопротивления, зависящих как от числовых значений, так и направлений скоростей точек системы. В дальнейшем рассматривается случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления точек системы пропорциональны скоростям этих точек и направлены в стороны, противоположные скоростям.

Часть обобщенной силы Q^B получается от так называемых вынуждающих, или возмущающих, сил, зависящих прежде всего от времени. Ниже рассмотрен случай гармонической возмущающей силы, когда Q^B изменяется с течением времени по синусоидальному закону. В общем случае зависимости Q^B от времени ее можно разложить в ряд Фурье и рассматривать дифференциальные уравнения движения для каждого из синусоидальных слагаемых.

Собственные линейные колебания системы

Рассмотрим малые колебания системы с одной степенью свободы под действием одних потенциальных сил, т. е. когда $Q = Q^{\Pi} = -\partial \Pi / \partial q$. Считаем, что сил сопротивления и возмущающих сил нет. Такие колебания называются *собственными* или *свободными*. Колебания считаются малыми, если при движении системы обобщенные координата, скорость и ускорение достаточно малы и в уравнении Лагранжа (1) можно пренебречь всеми слагаемыми второго и более высокого порядков относительно q, $\dot{q}$ и $\ddot{q}$, т. е. слагаемыми, в которые входят квадраты этих величин, произведения и т. д. В случае малых колебаний системы получается линейное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты q. Колебания, для которых дифференциальное уравнение является линейным, называются *линейными*. Малые колебания принадлежат к числу линейных. Но линейными могут быть не обязательно малые колебания.

Обычно ограничения, которые следует наложить на величины, характеризующие движение, чтобы колебания были малыми, удается установить только после полного решения задачи в предположении, что колебания малые. Ниже рассматриваются только малые или, если не малые, линейные колебания.

Дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы. Для вывода из уравнения Лагранжа (1) линейного уравнения малых собственных колебаний следует кинетическую и потенциальную энергии разложить в ряды в окрестности положения равновесия системы, где $q = 0$.

Пусть система, на которую наложены голономные, идеальные, неосвобождающие и стационарные связи, состоит из N точек и движется вблизи положения равновесия. Ее кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k^2.$$

При сделанных допущениях о стационарности связей радиус-вектор $\bar{r}_k$ каждой точки системы зависит от времени только через обобщенную координату q; следовательно, $\dot{\bar{r}}_k=\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\dot{q}$. Подставляя это $\dot{\bar{r}}_k$ в выражение кинетической энергии, получаем

$$T={}^1/_2 A\dot{q}^2,$$

где

$$A=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2.$$

Величина A, как и $\bar{r}_k$, может зависеть только от q и не может зависеть от $\dot{q}$. Разлагая $A(q)$ в окрестности $q=0$ в степенной ряд, имеем

$$A(q)=A_0+\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}+\ \dots\ .$$

Здесь и дальше индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислять при $q=0$.

Для получения в разложении кинетической энергии слагаемых не выше второго порядка по отношению к q и $\dot{q}$ достаточно из разложения $A(q)$ взять только постоянное значение A_0, которое обозначим a. При учете других слагаемых из разложения $A(q)$ появляются члены третьего и более высокого порядков.

Итак, выражение кинематической энергии с отбрасыванием слагаемых третьего и более высокого порядков можно представить в виде

$$T={}^1/_2 a\dot{q}^2. \tag{2}$$

Положительная постоянная a называется *коэффициентом инерции*. Обычно по размерности коэффициент инерции является или массой, или моментом инерции.

Потенциальная энергия системы Π для стационарного силового поля и стационарных связей является функцией только обобщенной координаты q. Разлагая ее в степенной ряд в окрестности $q=0$, получаем

$$\Pi(q)=\Pi_0+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2!}+\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_0\frac{q^3}{3!}+\ \dots\ .$$

Потенциальную энергию Π_0 в положении равновесия при $q=0$ примем равной нулю. Величина $(\partial\Pi/\partial q)_0$ есть значение обобщенной силы Q в положении равновесия системы, равное нулю.

Будем считать, что в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Это является достаточным условием устойчивости положения равновесия системы. В этом случае

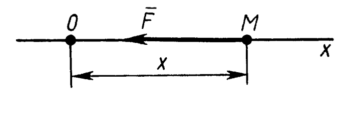


Рис. 110

величина $(\partial^2 \Pi/\partial q^2)_0$ положительна. Обозначим ее c. Постоянную c называют *коэффициентом жесткости* или просто *жесткостью*.

Таким образом, отбрасывая слагаемые третьего и более высокого порядков, имеем

$$\Pi(q) = {}^1/_2 c q^2. \tag{3}$$

Системы, для которых кинетическая и потенциальная энергии выражаются точно по формулам (2) и (3) без отбрасывания слагаемых более высокого порядка, называются *линейными*. Для них вся математическая теория является такой же, как и для систем, совершающих малые колебания, хотя колебания для линейных систем могут быть любыми, не обязательно малыми. В дальнейшем рассматриваются линейные колебания, в число которых входят и малые колебания.

На основании (2) и (3) получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение Лагранжа (1), получим следующее дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{4}$$

При учете слагаемых третьего и более высокого порядка в разложениях кинетической и потенциальной энергий в уравнении (4) появляются члены второго и более высокого порядка и дифференциальное уравнение становится нелинейным.

Получим дифференциальное уравнение прямолинейных колебаний материальной точки, не обязательно малых. Пусть материальная точка M массой m движется прямолинейно по оси Ox под действием силы $\bar{F}$, которая линейно зависит от расстояния точки от положения равновесия O и стремится возвратить точку в положение равновесия (рис. 110).

Поместим начало отсчета расстояний x в положение равновесия — точку O. Сила $\bar{F}$ будет направлена к началу отсчета расстояний — точке O. В этой точке она равна нулю. Ее проекция на ось Ox

$$F_x = -c_0 x,$$

где постоянная величина c_0 — жесткость.

Силу $\bar{F}$ в этом случае называют *линейной восстанавливающей силой*. Силы упругости, подчиняющиеся закону Гука, являются линейными восстанавливающими силами.

Подставляя в дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки значение линейной восстанавливающей силы и перенося все члены в одну часть уравнения, получаем

$$m\ddot{x}+c_0x=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) является дифференциальным линейным уравнением собственных прямолинейных колебаний материальной точки.

Сравнивая (4) и (5), видим, что эти уравнения полностью аналогичны. Только в уравнение для системы вместо координаты x входит обобщенная координата q, вместо массы — коэффициент инерции a, а вместо жесткости c_0 следует взять коэффициент жесткости c.

Интегрирование дифференциального уравнения собственных колебаний. Если разделить обе части уравнения (4) на a и обозначить положительную величину $c/a=k^2$, то получим дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы с одной степенью свободы в окончательной форме:

$$\ddot{q}+k^2q=0. \qquad (6)$$

Постоянная величина $k=\sqrt{c/a}$ называется *круговой* (или *циклической*) *частотой колебаний.*

Для прямолинейных колебаний материальной точки соответственно имеем

$$\ddot{x}+k^2x=0,$$

где $k^2=c_0/m$.

Размерность круговой частоты k можно установить из уравнения (6). Так как

$$[\ddot{q}]=\frac{[q]}{[t^2]},$$

то

$$[k^2]=\frac{[\ddot{q}]}{[q]}=\frac{[q]}{[t^2]}\frac{1}{[q]}=\frac{1}{[t^2]};\quad [k]=\frac{1}{[t]}=\frac{1}{c}=\text{c}^{-1},$$

если время t выражать в секундах. Ее размерность не зависит от размерности обобщенной координаты.

Круговая частота выражается в тех же единицах, что и угловая скорость, в частности единица круговой частоты колебаний точки k тоже c^{-1}.

Дифференциальное уравнение (6) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно искать в виде $q=e^{\lambda t}$. После подстановки этого выражения в (6) получаем характеристическое уравнение для уравнения (6)

$$\lambda^2+k^2=0.$$

Это квадратное уравнение имеет два чисто мнимых корня: $\lambda_{1,2}=\pm ki$.

На основе теории дифференциальных уравнений решение уравнения (6) можно представить в виде

$$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt \qquad (7)$$

и для обобщенной скорости

$$\dot{q}=-C_1 k\sin kt+C_2 k\cos kt.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий $t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$, где q_0 и $\dot{q}_0$—начальные значения обобщенной координаты и обобщенной скорости.

Используя выражения для q и $\dot{q}$ при $t=0$, получаем $C_1=q_0$; $C_2=\dot{q}_0/k$.

Подставляя их значения в (7), имеем

$$q=q_0\cos kt+\frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt. \qquad (8)$$

Уравнение (8)—одна из двух основных форм выражения собственных колебаний.

Для колебаний материальной точки соответственно

$$x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt,$$

где x_0 и v_0—начальное отклонение точки от положения равновесия и начальная скорость.

Представим выражение для q в другой, так называемой амплитудной, форме:

$$q=A\sin(kt+\alpha)=A\sin\alpha\cos kt+A\cos\alpha\sin kt.$$

Из сравнения этого выражения с (7) для новых постоянных получим формулы

$$C_1=A\sin\alpha;\quad C_2=A\cos\alpha.$$

Отсюда

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2};\quad \sin\alpha=C_1/A;\quad \cos\alpha=C_2/A. \qquad (9)$$

Иногда вычисляют $\operatorname{tg}\alpha=C_1/C_2$.

Подставляя в (9) вместо C_1 и C_2 их выражения через начальные значения, получаем:

$$A=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot{q}_0^2}{k^2}};\quad \sin\alpha=\frac{q_0}{A};\quad \cos\alpha=\frac{\dot{q}_0}{Ak};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{q_0 k}{\dot{q}_0}. \qquad (10)$$

Величину A считают положительной и называют *амплитудой колебаний*. Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению $q=0$. Обобщенная координата q изменяется в пределах от $+A$ до $-A$.

Безразмерная постоянная α называется *начальной фазой колебаний*. Она является значением *фазы колебаний* $(kt+\alpha)$ при $t=0$. Начальная фаза может изменяться в пределах от 0 до 2π. Для определения начальной фазы α по начальным условиям можно использовать любую комбинацию двух ее тригонометрических функций из (10), например $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

по одной тригонометрической функции, например $\operatorname{tg}\alpha$, получится два различных значения для α.

Собственные линейные колебания в амплитудной форме с учетом начальных условий можно представить в окончательной форме:

$$q=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}\sin\left(kt+\operatorname{arctg}\frac{q_0 k}{\dot{q}_0}\right). \tag{11}$$

Для прямолинейных колебаний точки соответственно

$$x=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}\sin\left(kt+\operatorname{arctg}\frac{x_0 k}{v_0}\right).$$

Движение системы, определяемое (8) или эквивалентной ему амплитудной формой (11), называется *гармоническим колебанием*. Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса. Изменением фазы на $\pi/2$ от синуса можно перейти к косинусу.

Собственные линейные колебания системы с одной степенью свободы являются гармоническими. Материальная точка под действием линейной восстанавливающей силы тоже совершает гармонические колебания.

Обобщенная координата q изменяется по закону синуса, который является периодической функцией аргумента с наименьшим периодом 2π; следовательно, и q является периодической функцией. Значение периода колебаний τ для переменной t получим из условия, по которому добавление периода к этой переменной должно изменить фазу колебаний на наименьший период синуса 2π. Имеем

$$k(t+\tau)+\alpha=kt+\alpha+2\pi;\quad \tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{a/c}. \tag{12}$$

Для прямолинейных колебаний точки период $\tau=2\pi\sqrt{m/c_0}$.

Период колебаний выражается в единицах времени, например в секундах. Величина, обратная периоду $\nu=1/\tau$, называется частотой колебаний. Частота колебаний обычно определяется числом колебаний в секунду или в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному колебанию в секунду.

Круговая частота k выражается через период колебаний и частоту в форме

$$k=2\pi/\tau=2\pi\nu. \tag{13}$$

Из (13) следует, что круговая частота k есть число колебаний за время, равное 2π с.

На рис. 111 представлен график собственных гармонических колебаний системы с одной степенью свободы. Он представляет собой синусоиду.

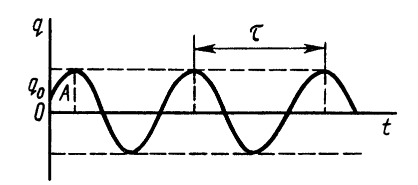


Рис. 111

Гармонические колебания полностью определяются амплитудой колебаний, периодом и начальной фазой. Отметим основные свойства собственных линейных колебаний.

Собственные линейные колебания системы являются гармоническими. Амплитуда этих колебаний — величина постоянная и определяется начальными условиями. Период колебаний тоже величина постоянная, не зависящая от амплитуды и, следовательно, от начальных условий.

Величина периода определяется только свойствами колеблющейся системы, т. е. коэффициентом инерции a и жесткостью c. Независимость периода колебаний от амплитуды называется *изохронностью колебаний*. Собственные линейные колебания, если нет возмущающих сил, могут возникнуть только при начальных условиях, не равных нулю, т. е. когда в начальный момент система имеет не равные нулю начальную обобщенную координату q_0 или начальную обобщенную скорость $\dot{q}_0$.

Гармонические колебания точки при наличии линейной восстанавливающей силы возникают вследствие начального отклонения точки x_0, или начальной скорости v_0, или и того и другого вместе. Гармонические колебания обладают той особенностью, что, возникнув однажды в какой-то момент времени, они продолжаются сколь угодно долго без изменения параметров колебаний, если нет других воздействий. Но обычно колебания всегда сопровождаются возникновением сил сопротивления, которые изменяют характер собственных колебаний.

Собственные колебательные движения, кроме графика колебаний, можно изобразить на фазовой плоскости — плоскости переменных q и $\dot{q}$, которые называются *фазовыми переменными*. Для случая колебаний точки фазовыми переменными являются x и $v = \dot{x}$. Построим фазовый портрет гармонических колебаний точки. Имеем

$$x = A\sin(kt + \alpha); \quad v = \dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha).$$

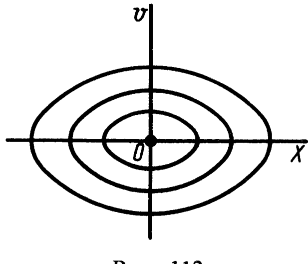


Рис. 112

Исключая из этих уравнений время t, получаем на фазовой плоскости (x, v) семейство эллипсов:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2k^2} = 1.$$

Эти кривые (рис. 112), зависящие от параметра A, называют *фазовыми траекториями*. Семейство фазовых траекторий зависит от амплитуды ко-

лебаний, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями. Каждой фазовой траектории соответствует пара начальных значений x_0 и v_0.

Положению равновесия точки на фазовой плоскости соответствует начало координат $x=0$, $v=0$. Когда материальная точка совершает гармонические колебания, то с течением времени изменяются ее координата x и скорость v. Следовательно, каждому моменту времени на фазовой плоскости соответствует определенное положение изображающей точки с координатами x и v. За время одного полного гармонического колебания (за период) изображающая точка описывает на фазовой плоскости эллипс.

Отметим, что периодическим колебаниям на фазовой плоскости соответствуют замкнутые фазовые траектории, и наоборот. Вид фазовых траекторий характеризует устойчивость или неустойчивость положения равновесия, достаточную малость колебаний и т. д.

Фазовые траектории для консервативной системы можно построить используя интеграл энергии. Каждой фазовой траектории соответствует определенное значение полной механической энергии.

В тех случаях, когда дифференциальное уравнение колебательного движения является нелинейным, исследование движения с помощью фазовых траекторий — один из часто применяемых методов.

Пример. Груз, имеющий силу тяжести $P=20$ Н, подвешен на пружине (рис. 113). Статическое удлинение пружины под действием силы тяжести груза $\lambda_{ст}=5$ см.

Определить движение груза, если в начальный момент удлинение пружины $\lambda_0=8$ см и начальная скорость груза $v_0=10$ см/с и направлена вниз.

Решение. Груз будет двигаться прямолинейно. За начало отсчета расстояний x выберем положение статического равновесия груза, при котором сила тяжести $\bar{P}$ уравновешивает силу упругости пружины $\bar{F}$, направив ось Ox вниз по траектории движения груза. Силу упругости пружины считаем пропорциональной ее удлинению из недеформированного состояния.

Пусть груз в момент времени t находится на расстоянии x от начала отсчета. На него действуют сила тяжести $\bar{P}$ и сила упругости $\bar{F}$, причем

$$F=c\lambda=c(\lambda_{ст}+x),$$

где $(\lambda_{ст}+x)$ — удлинение пружины; c — коэффициент жесткости.

В положении статического равновесия груза $x=0$, $F=c\lambda_{ст}=P$. Следовательно, $c=P/\lambda_{ст}$.

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения груза в общем случае имеет вид

$$m\ddot{x}=\sum_{k=1}^{N} F_{kx}.$$

В рассматриваемом случае

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx}=P-F=P-c(\lambda_{ст}+x)=(P-c\lambda_{ст})-cx=-cx.$$

Следовательно,

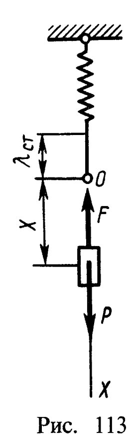


Рис. 113

$$m\ddot{x}=-cx;\;\; \ddot{x}+k^2x=0;\;\; k=\sqrt{c/m}.$$

Если за начало отсчета выбрать не положение статического равновесия, то уравнение будет иметь постоянную правую часть, т. е. будет неоднородным. Решение дифференциального уравнения можно выразить в следующей форме:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt;\;\; v=\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям: время $t=0$; начальная скорость $\dot{x}=v_0=10$ см/с;

$$x=x_0=\lambda_0-\lambda_{ст}=8-5=3 \text{ см};$$

$$k=\sqrt{c/m}=\sqrt{g/\lambda_{ст}}=\sqrt{980/5}=14 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянные C_1 и C_2, согласно формулам для x и $\dot{x}$ при $t=0$, имеют значения

$$C_1=x_0=3 \text{ см};\;\; C_2=v_0/k=0{,}71 \text{ см}.$$

Уравнение движения груза принимает вид

$$x=3\cos 14t+0{,}71\sin 14t \text{ см}.$$

Приведем его к амплитудной форме. Амплитуда

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{9+0{,}50}\approx 3{,}08 \text{ см}.$$

Для начальной фазы α

$$\sin\alpha=C_1/A=0{,}97>0;\;\; \cos\alpha=C_2/A=0{,}71/A>0.$$

Следовательно, угол α находится в первой четверти и по значению, например, $\sin\alpha$ получаем $\alpha=1{,}34=0{,}43\pi$. Уравнение движения груза в амплитудной форме имеет вид

$$x=3{,}08\sin(14t+0{,}43\pi) \text{ см}.$$

Период собственных гармонических колебаний груза

$$\tau=2\pi/k=0{,}45 \text{ с}.$$

Влияние линейного сопротивления на малые собственные колебания системы с одной степенью свободы

Линейное сопротивление и диссипативная функция. Если на точки системы с одной степенью свободы кроме потенциальных сил действуют еще силы сопротивления, то дифференциальное уравнение Лагранжа выразится в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{П}+Q^{Ф}, \tag{14}$$

где $Q^{П}=-\partial П/\partial q$ — обобщенная сила потенциальных сил; $Q^{Ф}$ — обобщенная сила сил сопротивления.

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления $\bar{R}_k$ точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т. е.

$$\bar{R}_k=-\mu_k\bar{v}_k=-\mu_k\dot{\bar{r}}_k,$$

где μ_k — постоянный коэффициент сопротивления.

Вычислим обобщенную силу сопротивления. Согласно определению обобщенной силы, имеем

$$\dot{Q}^{\Phi}=\sum_{k=1}^{N}\bar{R}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}=-\sum_{k=1}^{N}\mu_k\dot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}. \qquad (15)$$

Для дальнейшего преобразования используем тождество Лагранжа, полученное при выводе уравнений Лагранжа [см. формулу (32) § 9 гл. 6]:

$$\partial\bar{r}_k/\partial q=\partial\dot{\bar{r}}_k/\partial\dot{q}.$$

Получим

$$Q^{\Phi}=-\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\dot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}}\right)=-\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar{r}}_k^2}{2}. \qquad (15')$$

Введем обозначение:

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar{r}}_k^2}{2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\bar{v}_k^2}{2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k v_k^2}{2}. \qquad (16)$$

Функцию Ф называют *диссипативной функцией* или функцией Рэлея. Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в нее вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Из (15′) для обобщенной силы сопротивления имеем $Q^{\Phi}=-\partial\Phi/\partial\dot{q}$.

Выразим функцию Ф через q и $\dot{q}$. Учитывая, что

$$\bar{r}_k=\bar{r}_k(q);\quad \dot{\bar{r}}_k=\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}\dot{q},$$

имеем

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar{r}}_k^2}{2}=\frac{\dot{q}^2}{2}\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}\right)^2=\frac{1}{2}B\dot{q}^2, \qquad (16')$$

где $B=B(q)=\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}\right)^2$.

Функция B зависит только от q и не зависит от $\dot{q}$, так как от $\dot{q}$ не зависит величина $\partial\bar{r}_k/\partial q$.

Для выяснения физического смысла диссипативной функции получим энергетическое соотношение, которому она удовлетворяет. Для этого умножим на $\dot{q}$ уравнение Лагранжа (14)

$$\dot{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}-\dot{q}\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q}\dot{q}-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}\dot{q} \qquad (17)$$

и выполним ряд преобразований.

Учитывая, что

$$T={}^1/_2\,A(q)\dot{q}^2,$$

имеем

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}=A(q)\dot{q};\quad \dot{q}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}=A(q)\dot{q}^2=2T. \qquad (18)$$

Аналогично,

$$\Phi={}^1/_2\,B(q)\dot{q}^2;$$

следовательно,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}=B(q)\dot q;\quad \dot q\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}=B(q)\dot q^2=2\Phi. \tag{19}$$

Потенциальная энергия для случая стационарного потенциального поля зависит от времени только через координату q.

Следовательно,

$$\dot q\frac{\partial\Pi}{\partial q}=\frac{d\Pi}{dt}. \tag{20}$$

Преобразуем первое слагаемое в (17), учитывая (18). Имеем

$$\dot q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}=\frac{d}{dt}\left(\dot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}=\frac{d}{dt}(2T)-\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}. \tag{21}$$

Подставляя (18)—(21) в (17), получим

$$\frac{d}{dt}(2T)-\left(\dot q\frac{\partial T}{\partial q}+\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)=-\frac{d\Pi}{dt}-2\Phi. \tag{21'}$$

Учитывая, что T—функция только q и $\dot q$, зависящих от t, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q}\dot q+\frac{\partial T}{\partial\dot q}\ddot q=\frac{dT}{dt}.$$

После переноса $-d\Pi/dt$ в левую часть (21′) и объединения слагаемых получаем

$$\frac{d}{dt}(2T-T+\Pi)=-2\Phi\quad\text{или}\quad\frac{d}{dt}(T+\Pi)=-2\Phi.$$

Если ввести полную механическую энергию $E=T+\Pi$, то окончательно имеем энергетическое соотношение

$$dE/dt=-2\Phi. \tag{22}$$

Это соотношение показывает, *что диссипативная функция Ф характеризует скорость убывания полной механической энергии системы вследствие действия сил линейного сопротивления*. На убывание полной механической энергии указывает знак минус в (22). Диссипативная функция Ф, согласно (16), является величиной положительной.

Разложим диссипативную функцию в ряд в окрестности положения равновесия системы. Для этого в соответствии с (16′) следует разложить в ряд по степеням q функцию $B(q)$ в окрестности $q=0$. Имеем

$$B(q)=B(0)+\left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}+\dots.$$

Подставляя это разложение в (16′) и оставляя в нем только $B(0)$, получаем

$$\Phi={}^1/_2\,B(0)\dot q^2={}^1/_2\,\mu\dot q^2, \tag{23}$$

где введено обозначение $\mu = B(0)$. Положительная постоянная величина μ называется *обобщенным коэффициентом сопротивления*.

Дифференциальное уравнение малых собственных движений при действии линейного сопротивления. Вблизи положения равновесия системы имеем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции:

$$T = a\dot{q}^2/2; \quad \Pi = cq^2/2; \quad \Phi = \mu\dot{q}^2/2.$$

Подставляя их в уравнение Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi}$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}; \quad Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq; \quad Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\mu\dot{q},$$

получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q}.$$

Это приближенное уравнение. При его получении отброшены все слагаемые второго и более высокого порядков.

Если разделить обе части уравнения на a и ввести обозначения $k^2 = c/a$, $2n = \mu/a$, то после переноса всех членов уравнения в левую часть получим дифференциальное уравнение движения системы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \tag{24}$$

Постоянная $k = \sqrt{c/a}$ является круговой частотой собственных колебаний системы без учета сопротивления. Величина $n = \mu/(2a)$ называется *коэффициентом затухания*. Ее размерность такая же, как и у круговой частоты. Вместо n иногда употребляют величину $\tau_0 = 1/n$, которая называется постоянной времени затухания и имеет размерность времени.

Интегрирование дифференциального уравнения движения. Дифференциальное уравнение (24) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение следует искать в форме $q = e^{\lambda t}$, где постоянная λ определяется из характеристического уравнения $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, которое получается после подстановки решения в дифференциальное уравнение.

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \tag{25}$$

Могут представиться три случая: 1) $n < k$ — это случай малого сопротивления; 2) $n > k$ — случай большого сопротивления; 3) $n = k$ — случай критического сопротивления. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Затухающие колебания. Если $n<k$, то величина под знаком квадратного корня в (25) отрицательна. Обозначим k_1^2 положительную величину (k^2-n^2). Тогда $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ и из (25) получим следующие значения для корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm k_1 i.$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0,$$

зависящее от двух произвольных постоянных, выразится в виде

$$q=e^{-nt}\left(C_1^* e^{ik_1 t}+C_2^* e^{-ik_1 t}\right)=e^{-nt}\left(C_1\cos k_1 t+C_2\sin k_1 t\right), \quad (26)$$

где C_1^*, C_2^* и C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решение (26) можно также представить в другой, амплитудной, форме:

$$q=Ae^{-nt}\sin\left(k_1 t+\alpha\right), \quad (27)$$

где A и α — тоже произвольные постоянные.

Раскрывая синус суммы, имеем

$$q=Ae^{-nt}\sin\left(k_1 t+\alpha\right)=e^{-nt}\left(A\sin\alpha\cos k_1 t+A\cos\alpha\sin k_1 t\right).$$

Сравнивая это уравнение с (26), получаем формулы связи постоянных:

$$C_1=A\sin\alpha;\quad C_2=A\cos\alpha$$

или

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2};\quad \sin\alpha=C_1/A;\quad \cos\alpha=C_2/A;\quad \operatorname{tg}\alpha=C_1/C_2. \quad (28)$$

Постоянные C_1, C_2 и соответственно A, α определяются из начальных условий $t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$.

Дифференцируя (26) по времени, имеем

$$\dot{q}=-ne^{-nt}\left(C_1\cos k_1 t+C_2\sin k_1 t\right)+ +e^{-nt}\left(-C_1k_1\sin k_1 t+C_2k_1\cos k_1 t\right). \quad (29)$$

Используя выражение (26) для q, а (29) — для $\dot{q}$ при $t=0$, получаем уравнения для определения C_1 и C_2:

$$q_0=C;\quad \dot{q}_0=-nC_1+k_1C_2.$$

Из них

$$C_1=q_0;\quad C_2=\left(\dot{q}_0+nq_0\right)/k_1=\left(\dot{q}_0+nq_0\right)/\sqrt{k^2-n^2}.$$

Соответственно постоянные A и α через начальные условия выразятся в следующей форме:

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{q_0^2+\frac{(\dot{q}_0+nq_0)^2}{k^2-n^2}};\quad \sin\alpha=\frac{q_0}{A};\quad \cos\alpha=\frac{\dot{q}_0+nq_0}{A\sqrt{k^2-n^2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{q_0\sqrt{k^2-n^2}}{\dot{q}_0+nq_0}. \quad (30)$$

Величина A положительна. Она не является амплитудой. Начальная фаза α может иметь значения в пределах от 0 до 2π.

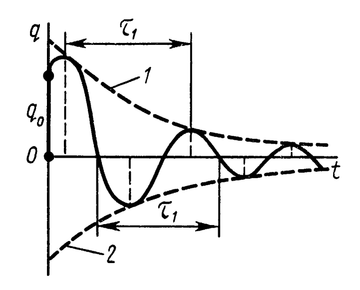


Рис. 114

Для выяснения изменения функции $q(t)$ построим ее график, используя уравнение (27). Вид графика функции $q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$ (рис. 114) можно выяснить с помощью построения графиков вспомогательных функций $q_1 = Ae^{-nt}$ (кривая *1*) и $q_2 = -Ae^{-nt}$ (кривая *2*). Кривые *1* и *2* являются ограничивающими для $\sin(k_1 t + \alpha)$, который изменяется между 1 и -1.

Таким образом, изобразив синусоиду между ограничивающими кривыми *1* и *2*, можно составить представление о виде графика функции $q(t)$. На рис. 114 в действительности представлены графики отдельных функций $q(t)$, $+Ae^{-nt}$ и $-Ae^{-nt}$.

Из графика функции $q(t)$ следует, что величины последовательных наибольших отклонений q от положения равновесия уменьшаются с увеличением времени, стремясь к нулю при неограниченном возрастании времени. В соответствии с этим движение, определяемое уравнением (27) или (26), называют *затухающими колебаниями.*

Условным периодом затухающих колебаний (или *периодом*) называют период $\sin(k_1 t + \alpha)$. Он является периодом прохождения системы через положения равновесия, так как функции $q(t)$ и $\sin(k_1 t + \alpha)$ равны нулю одновременно. Круговой частотой $\sin(k_1 t + \alpha)$ является величина $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Следовательно, период затухающих колебаний

$$\tau_1 = 2\pi/k_1 = 2\pi/\sqrt{k^2 - n^2}. \tag{31}$$

Период затухающих колебаний — величина постоянная, не зависящая от начальных условий. Он больше периода собственных колебаний при отсутствии сопротивления $\tau = 2\pi/k$.

Из (31), разлагая τ_1 в ряд по степеням n/k с использованием бинома Ньютона, имеем

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k}\left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right)^{-1/2} = \tau\left(1 + \frac{1}{2}\frac{n^2}{k^2} + \ldots\right). \tag{31$'$}$$

Для очень малых n/k по сравнению с единицей можно считать $\tau_1 \approx \tau$, т. е. малое сопротивление не изменяет периода собственных колебаний системы. В более общем случае можно использовать приближенную формулу

$$\tau_1 = \tau\left(1 + \frac{1}{2}\frac{n^2}{k^2}\right). \tag{31$''$}$$

В действительности функция $q(t)$ не является периодической, так как не существует величины τ_1, удовлетворяющей условию периодичности $q(t+\tau_1)=q(t)$ для любого момента времени.

Определим моменты времени, в которые функция $q(t)$ достигает максимальных и минимальных значений. В эти моменты времени $\dot{q}(t)=0$.

Дифференцируя выражение $q(t)$ из (27) и приравнивая нулю производную, получим следующее уравнение:

$$\dot{q}=Ae^{-nt}\left[-n\sin(k_1 t+\alpha)+k_1\cos(k_1 t+\alpha)\right]=0.$$

Так как e^{-nt} равно нулю только при $t=\infty$, то соответствующие моменты времени определяются из условия равенства нулю выражения в квадратных скобках:

$$-n\sin(k_1 t+\alpha)+k_1\cos(k_1 t+\alpha)=0,$$

или

$$\operatorname{tg}(k_1 t+\alpha)=k_1/n.$$

Если t_1 — одно из искомых значений t, удовлетворяющих этому тригонометрическому уравнению, то, учитывая, что период тангенса равен π, все остальные искомые значения времени будут удовлетворять соотношению

$$k_1 t+\alpha=(k_1 t_1+\alpha)+m\pi$$

или

$$t=t_1+m\frac{\pi}{k_1},$$

где m — любое натуральное число.

Таким образом, моменты времени, в которые функция $q(t)$ достигает максимумов и минимумов, образуют бесконечную последовательность значений

$$t_1,\quad t_2=t_1+\frac{\pi}{k_1},\quad t_3=t_1+2\frac{\pi}{k_1}+\ldots .$$

Из графика функции $q(t)$ (см. рис. 114) следует, что между каждыми ее двумя максимумами расположен один минимум, и наоборот. Следовательно, два соседних максимальных значения функции $q(t)$ наступают через промежуток времени, равный $2\pi/k_1$, который совпадает с периодом затухающих колебаний τ_1. Два последовательных минимума тоже разделяет промежуток времени, равный τ_1.

Переменную величину Ae^{-nt} называют *условной амплитудой* затухающих колебаний. Она не является максимальным значением функции $q(t)$. Установим закон изменения условной амплитуды Ae^{-nt} при изменении времени на период τ_1. Если в момент времени t_1 условная амплитуда $A_1=Ae^{-nt_1}$, то через промежуток времени, равный периоду затухающих колебаний τ_1, в момент $t_2=t_1+\tau_1$

$$A_2=Ae^{-nt_1}e^{-n\tau_1}=A_1e^{-n\tau_1}.$$

Это справедливо для любых двух моментов времени, отличающихся на период τ_1. Действительно, если при $t_m = t_1 + m\tau_1$

$$A_m = Ae^{-nt_1}e^{-mn\tau_1},$$

где m — любое натуральное число, большее единицы, то при $t_{m+1} = t_1 + (m+1)\tau_1$

$$A_{m+1} = Ae^{-nt_1}e^{-(m+1)n\tau_1} = A_m e^{-n\tau_1}.$$

Таким образом, последовательные значения условных амплитуд в моменты времени, отличающиеся на условный период, образуют убывающую геометрическую прогрессию A_1, $A_1 e^{-n\tau_1}$; $A_1 e^{-2n\tau_1}$; ...; $A_1 e^{-mn\tau_1}$; ... со знаменателем $e^{-n\tau_1}$.

Можно показать, что по такому же закону убывающей геометрической прогрессии изменяются любые последовательные значения функции

$$q = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha)$$

для моментов времени, отличающихся друг от друга на условный период. Так, если в момент времени t_1

$$q_1 = Ae^{-nt_1}\sin(k_1 t_1 + \alpha),$$

то для момента времени $t_2 = t_1 + \tau_1$

$$q_2 = Ae^{-nt_1}e^{-n\tau_1}\sin(k_1 t_1 + \alpha) = q_1 e^{-n\tau_1},$$

так как $\sin[k_1(t_1 + \tau_1) + \alpha] = \sin(k_1 t_1 + \alpha)$, вследствие того что τ_1 является периодом.

Аналогично, если для $t_m = t_1 + m\tau_1$

$$q_m = Ae^{-nt_1}e^{-mn\tau_1}\sin(k_1 t_1 + \alpha),$$

то для $t_{m+1} = t_1 + (m+1)\tau_1$

$$q_{m+1} = Ae^{-nt_1}e^{-(m+1)n\tau_1}\sin(k_1 t_1 + \alpha) = q_m e^{-n\tau_1}.$$

Поэтому последовательные значения q_1, q_2, ..., q_m, ... образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-n\tau_1}$.

Так как любые два значения функции $q(t)$, соответствующие моментам времени, отличающимся на период τ_1, связаны соотношением

$$q_{m+1} = q_m e^{-n\tau_1},$$

то этому соотношению удовлетворяют и два последовательных значения максимума:

$$q_{m+1}^{\max} = q_m^{\max} e^{-n\tau_1}.$$

Величину отношения двух последовательных максимумов

$$D = q_m^{\max} / q_{m+1}^{\max} = e^{n\tau_1}$$

называют *декрементом колебания*.

Натуральный логарифм декремента колебания называется *логарифмическим декрементом колебания*. Для логарифмического декремента колебания η имеем

$$\eta = \ln D = n\tau_1. \qquad (32)$$

Кроме декремента и логарифмического декремента колебания часто используется другая характеристика затухания — *добротность системы* Q, которая определяется приближенным соотношением

$$Q = k/(2n), \qquad (33)$$

где k — частота собственных колебаний без учета сопротивления; n — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент колебания можно выразить через добротность. Действительно, из (32) и (33) с учетом (31)

$$\eta = \pi \Big/ \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}. \qquad (34)$$

Таким образом, из проведенного исследования можно заключить, что *малое линейное сопротивление незначительно увеличивает период колебаний по сравнению со случаем отсутствия сопротивления, но сильно уменьшает последовательные значения условных амплитуд, которые уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону.*

Затухающие движения. Рассмотрим случай, когда $n > k$ (случай большого сопротивления). Корни характеристического уравнения в этом случае имеют значения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2,$$

где введено новое обозначение для положительной величины $\sqrt{n^2 - k^2} = k_2$.

Оба корня характеристического уравнения действительны и отрицательны, так как $k_2 < n$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$ имеет вид

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-nt}\left(C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}\right), \qquad (35)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые можно определить по начальным условиям

$$t = 0; \quad q = q_0; \quad \dot{q} = \dot{q}_0.$$

Не выполняя этих вычислений, можно оценить поведение функции $q(t)$, используя уравнение (35). Для $q_0 > 0$ могут представиться три случая в зависимости от знака и значения $\dot{q}_0$ (рис. 115).

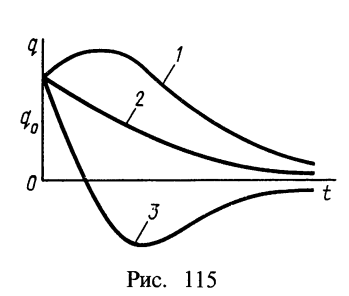


Рис. 115

При $\dot{q}_0 > 0$ функция $q(t)$ некоторое время возрастает до определенного максимума, а затем убывает, асимптотически приближаясь к нулю, так как $\lim\limits_{t \to \infty} q(t) = 0$ вследствие того, что показатели степеней λ_1 и λ_2 отрицательны (кривая *1*).

При не очень больших по абсолютной величине отрицательных значениях $\dot{q}_0$ может сразу начаться убывание $q(t)$ (кривая *2*). При больших по модулю отрицательных значениях $\dot{q}_0$ функция $q(t)$, убывая, может достичь нулевого значения, соответствующего положению равновесия системы, стать отрицательной и, оставаясь отрицательной, асимптотически приближаться к нулю (кривая *3*). Во всех этих случаях *движение является затухающим, неколебательным, которое иногда называют также апериодическим.*

При $n=k$ (случай критического сопротивления) характеристическое уравнение имеет кратный отрицательный корень

$$\lambda_1=\lambda_2=-n.$$

Соответственно этому решение дифференциального уравнения $\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0$ имеет вид

$$q=e^{-nt}(C_1t+C_2). \tag{36}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям. В этом случае при t, стремящемся к бесконечности, $q(t)$ стремится к нулю при любых конечных значениях постоянных C_1 и C_2, так как

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-nt}t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{nt}}=0,$$

что проверяется раскрытием неопределенности по правилу Лопиталя.

Таким образом, *случай критического сопротивления тоже дает затухающее движение.*

При $n\geqslant k$ движение не является колебательным и с некоторого момента времени начинается так называемое *лимитационное движение*, при котором система асимптотически стремится вернуться к положению равновесия.

Анализ влияния линейного сопротивления на собственные малые колебания показывает, что линейное сопротивление не может сделать устойчивое положение равновесия неустойчивым. Если в окрестности устойчивого положения равновесия система совершает незатухающие малые колебания, то линейное сопротивление превратит их в затухающие или сделает даже затухающими движениями.

Пример. Система состоит из точечного груза M с силой тяжести $P=200$ Н, прикрепленного к концу невесомого стержня длиной $l=90$ см, другой конец которого закреплен с помощью цилиндрического шарнира O (рис. 116). К стержню в точке B прикреплены две одинаковые пружины, коэффициенты жесткости которых $c=20$ Н/см, а в точке A — демпфер, создающий линейную силу сопротивления; коэффициент сопротивления демпфера $\mu=15$ Н·с/см.

Система расположена в вертикальной плоскости. Статическому положению равновесия системы соответствует вертикальное положение стержня, при котором пружины не деформированы. В начальный момент времени стержень

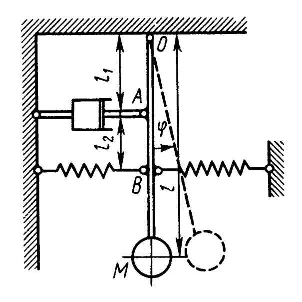


Рис. 116

отклонен от вертикали против часовой стрелки на угол $\varphi_0=6°$ и отпущен без начальной скорости.

Определить движение системы, считая его малым, и усилие в шарнире O в начальный момент движения, если $l_1=40$ см, $l_2=30$ см. Массой пружины и подвижных частей демпфера, а также трением в шарнирах пренебречь.

Решение. Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ, отсчитывая его от положения равновесия стержня против часовой стрелки.

Связи системы, состоящие из шарниров без трения, следует считать идеальными. Для движения системы имеем одно уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}.$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}=\frac{P}{g}\frac{(l\dot\varphi)^2}{2},$$

так как массу имеет только груз M.

Обобщенная сила состоит из двух сил: потенциальной $Q^{\Pi}=-\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$ и диссипативной $Q^{\Phi}=-\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot\varphi}$.

Потенциальная энергия равна работе потенциальных сил при перемещении системы из рассматриваемого положения в положение равновесия. Вычислим потенциальную энергию сил $\bar P$ и упругости $\bar F$. Имеем

$$\Pi=P(l-l\cos\varphi)+2c\frac{(\lambda^2-\lambda_0^2)}{2}.$$

Работа силы тяжести положительна, так как точка ее приложения опускается вниз в направлении силы при рассматриваемом перемещении. Если угол считать малым, то удлинение каждой из пружин будет $\lambda=(l_1+l_2)\varphi$. Удлинение следует при этом учитывать только в горизонтальном направлении. Обе силы упругости пружин направлены в одну сторону (одна пружина растянута, другая—сжата), и их работа положительна; $\lambda_0=0$, так как в положении равновесия пружина не деформирована.

Для малых углов φ, отбрасывая малые третьего и более высоких порядков, следует считать $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$. Поэтому

$$\Pi=Pl(1-\cos\varphi)+c(l_1+l_2)^2\varphi^2=\left[Pl+2c(l_1+l_2)^2\right]\frac{\varphi^2}{2}.$$

Сила сопротивления демпфера

$$\bar R=-\mu\bar v_A,$$

где $v_A=l_1|\dot\varphi|$ для малых φ и $\dot\varphi$. Диссипативная функция Φ вычисляется, как и кинетическая энергия, только вместо массы следует взять коэффициент сопротивления μ. Следовательно,

$$\Phi=\mu\frac{v_A^2}{2}=\mu l_1^2\dot\varphi^2/2.$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\dot\varphi;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\ddot\varphi;$$

$$Q^{\Pi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}=-\left[Pl+2c(l_1+l_2)^2\right]\varphi;$$

$$Q^{\Phi}=-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot\varphi}=-\mu l_1^2\dot\varphi.$$

Имея эти данные, составляем уравнение малых движений системы:

$$\frac{Pl^2}{g}\ddot\varphi=-\left[Pl+2c(l_1+l_2)^2\right]\varphi-\mu l_1^2\dot\varphi,$$

или

$$\ddot\varphi+2n\dot\varphi+k^2\varphi=0,$$

где

$$k^2=\frac{Pl+2c(l_1+l_2)^2}{Pl^2}g=\frac{200\cdot 90+2\cdot 20\cdot 70^2}{200\cdot 90^2}980=129{,}45;$$

$$k=11{,}4\ \text{с}^{-1};\quad n=\frac{\mu l_1^2 g}{2Pl^2}=\frac{15\cdot 40^2\cdot 980}{2\cdot 200\cdot 90^2}=7{,}25\ \text{с}^{-1}.$$

Приближенное дифференциальное уравнение для малых движений системы можно получить также применяя уравнение вращательного движения твердого тела (стержень с грузом) вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O:

$$J_z\ddot\varphi=\sum M_z(\bar F_k^{(e)}).$$

В рассматриваемом примере $n<k$. Следовательно, имеем случай затухающих малых собственных колебаний. Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$\varphi=e^{-nt}(C_1\cos k_1 t+C_2\sin k_1 t)=Ae^{-nt}\sin(k_1 t+\alpha),$$

где

$$k_1=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{76{,}89}\approx 8{,}7\ \text{с}^{-1}.$$

Дифференцируя φ по времени, получим

$$\dot\varphi=-ne^{-nt}(C_1\cos k_1 t+C_2\sin k_1 t)+e^{-nt}(-C_1k_1\sin k_1 t+C_2k_1\cos k_1 t).$$

При $t=0$ $\varphi=\varphi_0=\dfrac{\pi}{180}6=\pi/30$, $\dot\varphi=0$. Подставляя эти значения в выражения для φ и $\dot\varphi$, имеем

$$\pi/30=C_1;\quad 0=-nC_1+C_2k_1,$$

или

$$C_1=\pi/30=0{,}105;\quad C_2=nC_1/k_1=7{,}25\cdot 0{,}105/8{,}7\approx 0{,}09;$$

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=0{,}13;\quad \mathrm{tg}\,\alpha=C_1/C_2=0{,}105/0{,}09=1{,}2>0.$$

Так как $\sin\alpha=C_1/A>0$, то угол α расположен в первой четверти. По значению тангенса этого угла находим $\alpha=0{,}28\pi$.

Таким образом,

$$\varphi=0{,}13e^{-7{,}25t}\sin(8{,}7t+0{,}28\pi).$$

Для определения реакции шарнира O применим для стержня с грузом следствие из принципа Даламбера, составив условия равновесия приложенных к ним внешних сил вместе с силой инерции груза в проекциях на оси координат.

К стержню и грузу приложены сила тяжести $\bar P$, сила упругости пружин $\bar F$, сила сопротивления $\bar R$, составляющие реакций шарнира $\bar X_0$,

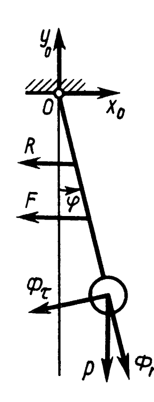


Рис. 117

$\bar{Y}_0$ и составляющие силы инерции груза $\bar{\Phi}_n$ и $\bar{\Phi}_\tau$ (рис. 117), изображенные на рисунке для случая положительных $\ddot{\varphi}$, φ и $\dot{\varphi}$.

Сила инерции $\Phi_n = \frac{P}{g} l \dot{\varphi}^2 = 0$, так как величинами второго порядка пренебрегли еще при составлении дифференциального уравнения малых колебаний. Если при вычислениях такие величины, как Φ_n, получаются недостаточно малыми по сравнению, например, с силой тяжести и упругости, то допущение, что колебание малое, недостаточно точное.

Сила инерции $\Phi_\tau = \frac{P}{g} l \ddot{\varphi}$, причем $\ddot{\varphi}$ следует сюда подставить с полученным знаком для этой величины.

Сила сопротивления $R = \mu v_A = \mu l_1 \dot{\varphi}$.

Сила упругости $F = 2c(l_1 + l_2)\varphi$.

Составляя уравнения равновесия для сил, имеем

$$X_0 - R - F - \Phi_\tau \cos\varphi = 0; \quad Y_0 - P - \Phi_\tau \sin\varphi = 0.$$

Согласно начальным условиям, при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0 = \pi/30$, $\dot{\varphi} = 0$. Угловое ускорение определяем из дифференциального уравнения движения:

$$\ddot{\varphi} = -k^2\varphi - 2n\dot{\varphi}.$$

При $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = 0$,

$$\ddot{\varphi} = -k^2\varphi_0 = -129{,}45 \cdot 0{,}105 = -13{,}6 \text{ с}^{-2}.$$

Кроме того, при $\varphi = \varphi_0$

$$R = 0; \quad \cos\varphi \doteq 1; \quad \sin\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{30}.$$

Учитывая это, при $\varphi = \varphi_0$ уравнения для X_O и Y_O примут вид

$$X_O - 2c(l_1 + l_2)\varphi_0 - \frac{P}{g} l \ddot{\varphi}_0 = 0; \quad Y_O - P = 0.$$

Следовательно,

$$X_O = 2c(l_1 + l_2)\varphi_0 + \frac{P}{g} l \ddot{\varphi}_0 = 2 \cdot 20 \cdot 70 \cdot 0{,}105 + \frac{200 \cdot 90}{980}(-13{,}6) = 44 \text{ Н}; \quad Y_O = P = 200 \text{ Н}.$$

Реакция шарнира, а следовательно, и числовое значение давления на шарнир

$$N = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} \approx 205 \text{ Н}.$$

Вынужденные колебания системы без учета сопротивления

Для возбуждения вынужденных колебаний необходимо действие на точки механической системы возмущения в той или иной форме. Наиболее часто встречаются случаи силового и кинематического возбуждений. Рассмотрим эти случаи на примере прямолинейных колебаний груза массой m по горизонтальной гладкой плоскости (рис. 118, *а*) под действием пружины, жесткость которой c.

Пусть на груз дополнительно действует зависящая от времени сила $\bar{\Phi}(t)$. У груза одна степень свободы. Связи (гладкая поверхность) являются идеальными. Составим для движения груза уравнение Лагранжа, приняв x за обобщенную

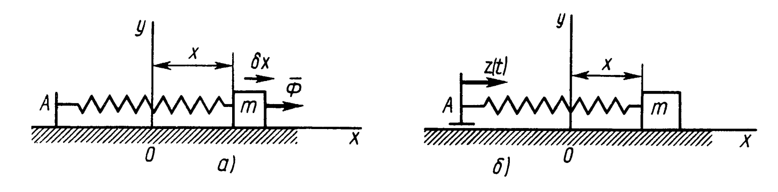


Рис. 118

координату, отсчитываемую от положения груза, при котором пружина не деформирована. Имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q^{П}+Q^{B}.$$

Силы сопротивления отсутствуют, т. е. $Q^{Ф}=0$. Кинетическая энергия груза

$$T=m\frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия и обобщенная сила

$$П=cx^2/2;\quad Q^{П}=-\partial П/\partial x=-cx.$$

Для обобщенной силы Q^B получаем

$$Q^B=\sum \bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k/(\delta x)=\Phi\delta x/(\delta x)=\Phi(t),$$

где δx — возможное перемещение груза в направлении возрастания x.

Вычислим производные от кинетической энергии. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x};\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\ddot{x}.$$

Подставляя полученные величины в уравнение Лагранжа, получаем

$$m\ddot{x}=-cx+\Phi(t)\quad \text{или}\quad m\ddot{x}+cx=\Phi(t).$$

В случае гармонической возмущающей силы

$$Q^B=\Phi(t)=H\sin(pt+\delta),$$

где H, p и δ — постоянные величины. Уравнение движения груза принимает форму

$$m\ddot{x}+cx=H\sin(pt+\delta).$$

Предположим в той же задаче о движении груза, что сила $\Phi=0$, а следовательно, и $Q^B=0$, но вместо этого задано движение конца пружины — точки A в направлении оси Ox — в форме $z=z(t)$ (рис. 118, *б*). Составим уравнение Лагранжа для груза относительно подвижной системы отсчета Oxy, начало которой движется вместе с точкой A так, что OA остается все время постоянным. В этом случае по-прежнему

$$Q^{\Pi} = -\partial \Pi/\partial x = -cx.$$

Кинетическая энергия груза

$$T = \frac{mv^2}{2} = m\frac{(\dot{x}+\dot{z})^2}{2},$$

так как движение груза можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного поступательного вместе с точкой A и относительного по отношению к теперь уже подвижной системе координат Oxy. По теореме о сложении скоростей скорость абсолютного движения v равна сумме скоростей переносного и относительного движений, т. е. $v = \dot{z} + \dot{x}$. Для производных от кинетической энергии имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x}+\dot{z}); \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\ddot{x}+\ddot{z}).$$

Подставляя полученные величины в уравнение Лагранжа, получим

$$m(\ddot{x}+\ddot{z}) = -cx; \quad m\ddot{x}+cx = -m\ddot{z}.$$

Роль обобщенной силы в этом уравнении выполняет величины $-m\ddot{z}$. Если точка A совершает гармонические колебания, то

$$z = z_0 \sin(pt+\delta),$$

где z_0, p, δ — постоянные величины. В этом случае

$$-m\ddot{z} = mz_0p^2 \sin(pt+\delta)$$

и дифференциальное уравнение движения груза примет форму

$$m\ddot{x} + cx = mz_0p^2 \sin(pt+\delta),$$

т. е. то же, что и в первом случае, но $H = mz_0p^2$.

Если вместо $z(t)$ задать скорость точки A, изменяющуюся по гармоническому закону

$$v_A = \dot{z} = \dot{z}_0 \sin(pt+\delta),$$

то уравнение движения груза примет вид

$$m\ddot{x} + cx = m\dot{z}_0 p \sin\left(pt+\delta-\frac{\pi}{2}\right)$$

и в этом случае $H = m\dot{z}_0 p$.

Существенное различие этих случаев состоит в том, что при силовом возбуждении H не зависит от круговой частоты p. При кинематическом возбуждении заданием движения $z = z_0 \sin(pt+\delta)$ точки A оно пропорционально p^2, а при возбуждении заданием скорости $\dot{z} = \dot{z}_0 \sin(pt+\delta)$ точки A — пропорционально p. Силовое возбуждение эквивалентно возбуждению путем задания ускорения точки A.

При дальнейшем рассмотрении вынужденных колебаний ограничимся случаем силового возбуждения.

Пусть обобщенная сила состоит из двух сил: потенциальной $Q^{П} = -\partial П/\partial q = -cq$ и гармонической возмущающей $Q^{B} = H\sin(pt+\delta)$.

Часть обобщенной силы $Q^{Ф}$, зависящую от сил сопротивления, считаем равной нулю. Постоянные H, p и δ, характеризующие гармоническую возмущающую силу, соответственно являются амплитудой, круговой частотой и начальной фазой этой силы. В этом случае, как и в случае собственных линейных колебаний, из уравнения Лагранжа в предположении, что для кинетической и потенциальной энергий справедливы формулы (2) и (3), получаем дифференциальное уравнение

$$a\ddot{q} + cq = H\sin(pt+\delta). \tag{37}$$

Разделим обе части (37) на a и введем обозначения $k^2 = c/a$, $h = H/a$.

Здесь k — круговая частота собственных колебаний, h — относительная амплитуда возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без сопротивления в окончательной форме имеет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = h\sin(pt+\delta). \tag{38}$$

Получено неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение, согласно теории дифференциальных уравнений, состоит из общего решения однородного уравнения q_1 и частного решения неоднородного уравнения q_2. Общее решение уравнения (38) есть сумма этих двух решений, т. е. $q = q_1 + q_2$.

Однородное уравнение для определения q_1, т. е. уравнение $\ddot{q}_1 + k^2 q_1 = 0$, совпадает с дифференциальным уравнением собственных колебаний. Поэтому его решение q_1 называют *собственным колебанием системы*. Оно может быть выражено в двух эквивалентных формах:

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A_1 \sin(kt + \alpha_1). \tag{39}$$

Часть движения системы, характеризуемая функцией q_2, является частным решением уравнения (38). Эту часть движения называют *вынужденным колебанием* системы. Функция q_2 определяется по-разному в зависимости от соотношения частот собственных колебаний и возмущающей силы.

Возможны два случая: отсутствие резонанса $p \neq k$ и резонанс при $p = k$. Рассмотрим их.

1. Случай отсутствия резонанса. В случае отсутствия резонанса $p \neq k$ и частное решение q_2 следует искать в той же форме, что и правая часть уравнения (38):

$$q_2 = B\sin(pt+\delta). \tag{40}$$

Постоянная B подлежит определению из условий, что функция q_2 является частным решением уравнения (38) и,

следовательно, подстановка q_2 в это уравнение должна обратить его в тождество. Определим необходимые производные по времени от q_2:

$$\dot{q}_2 = Bp\cos(pt+\delta); \quad \ddot{q}_2 = -Bp^2\sin(pt+\delta).$$

Подставляя q_2 и ее производные в уравнение (38) и перенося все члены в одну часть, получаем следующее тождество, справедливое в любой момент времени:

$$(-Bp^2 + Bk^2 - h)\sin(pt+\delta) \equiv 0.$$

Так как синус переменного аргумента равен нулю не для всех значений t, то полученное тождество выполняется, если постоянный коэффициент в скобках при синусе равен нулю:

$$B(k^2 - p^2) - h = 0.$$

Отсюда

$$B = h/(k^2 - p^2)$$

Подставляя значение B в q_2, получаем вынужденные колебания в форме

$$q_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt+\delta). \qquad (41)$$

Таким образом, движение системы характеризуется обобщенной координатой q, состоящей из двух колебаний с различными частотами — собственных q_1 с круговой частотой k и вынужденных q_2 с круговой частотой p:

$$q = q_1 + q_2 = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt+\delta). \qquad (42)$$

В амплитудной форме

$$q = A_1\sin(kt + \alpha_1) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt+\delta). \qquad (42')$$

Постоянные C_1 и C_2 или A_1 и α_1 определяются из начальных условий $t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$.

Подставляя эти значения в выражения (42) для q и $\dot{q}$ при $t=0$, получаем

$$q_0 = C_1 + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin\delta; \quad \dot{q}_0 = C_2 k + \frac{hp}{k^2 - p^2}\cos\delta.$$

Отсюда

$$C_1 = q_0 - \frac{h}{k^2 - p^2}\sin\delta; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)}\cos\delta.$$

Амплитуда собственных колебаний A_1 и начальная фаза α_1 через C_1 и C_2 выражаются формулами

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \mathrm{tg}\,\alpha_1 = C_1/C_2.$$

Следовательно, амплитуда и начальная фаза собственных колебаний при действии возмущающей силы зависят не только

от начальных условий, но и от параметров этой силы, т. е. собственные колебания в этом случае могут возникнуть не только из-за начальных условий, но и благодаря действию возмущающих сил даже при нулевых начальных условиях.

Введем амплитуду вынужденных колебаний $A_2 = h/(|k^2 - p^2|)$. Тогда в зависимости от соотношения между частотами вынужденные колебания можно выразить в двух формах:

при $p<k$

$$q_2 = A_2 \sin(pt + \delta);$$

при $p>k$

$$q_2 = -A_2 \sin(pt + \delta) = A_2 \sin(pt + \delta - \pi).$$

Следовательно, при $p<k$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы. В этом случае сдвиг фаз ε между ними равен нулю, т. е. вынужденные колебания и возмущающая сила, в частности, достигают одновременно максимальных и минимальных значений.

При $p>k$ сдвиг фаз $\varepsilon = \pi$. Действительно, сдвиг фаз как разность фаз между возмущающей силой и вынужденными колебаниями

$$\varepsilon = (pt + \delta) - (pt + \delta - \pi) = \pi.$$

В этом случае вынужденные колебания находятся в противоположной фазе по отношению к возмущающей силе, т. е., в частности, если возмущающая сила достигает максимума, то функция $q_2(t)$ достигает минимума, и наоборот.

Итак, *вынужденные колебания системы без сопротивления при* $p \neq k$, *возбуждаемые гармонической возмущающей силой, являются гармоническими колебаниями с постоянной амплитудой. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Они совершенно не зависят от начальных условий.*

2. Случай резонанса. *Резонансом называется случай совпадения частот собственных колебаний и возмущающей силы*, т. е. когда $p = k$. При совпадении частот частное решение уравнения (38) следует искать в форме $q_2 = Bt \cos(pt + \delta)$.

Постоянная B определяется из условия, что q_2 есть частное решение уравнения (38), обращающее его в тождество. Аналогично рассмотренному случаю, подставив q_2 и ее производные в (38) и приравняв нулю постоянный коэффициент при $\sin(pt + \delta)$ [члены с $Bt \cos(pt + \delta)$ взаимно уничтожаются], получаем $B = -h/(2p)$. Тогда вынужденные колебания выразятся в форме

$$q_2 = -\frac{ht}{2p} \cos(pt + \delta) = \frac{ht}{2p} \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \tag{43}$$

Главной особенностью вынужденных колебаний при резонансе является зависимость их амплитуды от времени:

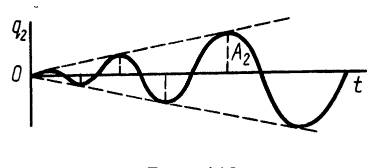


Рис. 119

$A_2 = ht/(2p)$. *Амплитуда вынужденных колебаний в этом случае увеличивается пропорционально времени. Сдвиг фаз при резонансе*, как это следует из (43), равен $\pi/2$. Круговая частота вынужденных колебаний при резонансе совпадает с круговой частотой возмущающей силы.

Заметим для построения графика вынужденных колебаний при резонансе, что q_2 изменяется в пределах от $q_2 = A_2 = ht/(2p)$ до $q_2 = -A_2 = -ht/(2p)$. Следовательно, согласно (43), графиком вынужденных колебаний является синусоида, заключенная между двумя прямыми $q_2^{(1)} = ht/(2p)$ и $q_2^{(2)} = -ht/(2p)$, проходящими через точки $q_2 = 0$ и $t = 0$ (рис. 119).

Рассмотренный случай колебаний при резонансе без сопротивления практически не встречается, так как при движении системы всегда есть силы сопротивления движению. Установленный теоретически рост амплитуды с течением времени по линейному закону в действительности тоже не наблюдается, хотя амплитуды при резонансе достигают довольно больших значений по сравнению со случаем отсутствия резонанса. Эта особенность вынужденных колебаний при резонансе приводит к тому, что случайно возникший резонанс в машинах, установках и сооружениях (мосты, роторы турбин, полы зданий и т. д.) может привести к их разрушению.

Построим для вынужденных колебаний графики амплитуды и сдвига фаз в зависимости от круговой частоты возмущающей силы. Имеем

$$A_2 = \frac{h}{|k^2 - p^2|} \quad \text{при} \quad p \neq k \quad \text{или} \quad \frac{A_2}{A_{20}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|},$$

где введено обозначение $A_{20} = h/k^2$ (рис. 120).

При $p \to k$ величина $A_2 \to \infty$, но при $p = k$ эту формулу для амплитуды вынужденных колебаний применять нельзя. Справедлива другая формула: $A_2 = ht/(2p)$.

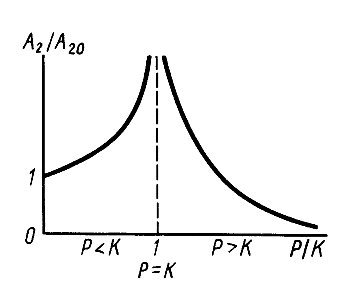


Рис. 120

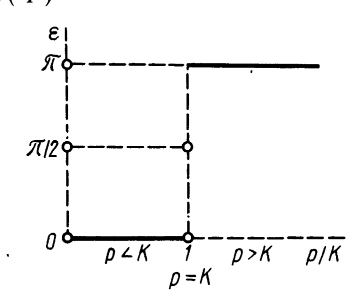


Рис. 121

График зависимости ε от p (рис. 121) состоит из двух отрезков горизонтальных прямых и одной точки, так как при $p<k$ $\varepsilon=0$; при $p=k$ $\varepsilon=\pi/2$; при $p>k$ $\varepsilon=\pi$.

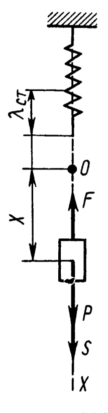


Рис. 122

Пример 1. Груз, имеющий силу тяжести $P=20$ Н, подвешен на пружине (рис. 122), статическое удлинение которой под действием груза $\lambda_{ст}=5$ см. На груз действует возмущающая сила $S=20\sin 14t$ Н. В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0=6$ см и грузу сообщена скорость $v_0=10$ см/с, направленная вниз.

Определить движение груза.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз, выбрав за начало отсчета расстояний x положение статического равновесия O.

Пусть в момент времени t возмущающая сила $\bar{S}$ направлена в положительную сторону оси Ox. Ее следует добавить к силам тяжести $\bar{P}$ и упругости пружины $\bar{F}$.

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения груза имеет вид

$$m\ddot{x}=\sum_{k=1}^{N} F_{kx}.$$

В этом случае

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx}=P-F+S;\quad P-F=P-c(\lambda_{ст}+x)=-cx;\quad m\ddot{x}=-cx+S,$$

так как

$$P=c\lambda_{ст};\quad k^2=cg/P=196\ \text{с}^{-2};\quad k=14\ \text{с}^{-1}.$$

Разделив обе части уравнения на m, получим

$$\ddot{x}+196x=980\sin 14t.$$

Частота возмущающей силы $p=14$ с совпадает с частотой собственных колебаний k. Имеем случай резонанса.

Собственные колебания

$$x_1=C_1\cos 14t+C_2\sin 14t.$$

Вынужденные колебания при резонансе

$$x_2=-\frac{ht}{2p}\cos 14t=-\frac{980t}{2\cdot 14}\cos 14t=-35t\cos 14t.$$

Общее движение груза

$$x=x_1+x_2=C_1\cos 14t+C_2\sin 14t-35t\cos 14t.$$

Скорость движения

$$v=\dot{x}=-14C_1\sin 14t+14C_2\cos 14t-35\cos 14t+35\cdot 14t\sin 14t.$$

Подставляя в x и $\dot{x}$ начальные значения $t=0$, $x=x_0=\lambda_0-\lambda_{ст}=1$ см, $\dot{x}=v_0=10$ см/с, получаем следующие уравнения для определения постоянных:

$$1=C_1;\quad 10=14C_2-35.$$

Их решения:

$$C_1=1\ \text{см};\quad C_2=3{,}2\ \text{см}.$$

Уравнение движения груза принимает вид

$$x=\cos 14t+3{,}2\sin 14t-35t\cos 14t\ \text{см}.$$

Приведем уравнение собственных колебаний к амплитудной форме. Имеем:

$$A_1=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=3{,}35\ \text{см};\quad \sin\alpha=C_1/A_1=0{,}30>0;\quad \cos\alpha_1=C_2/A_1>0.$$

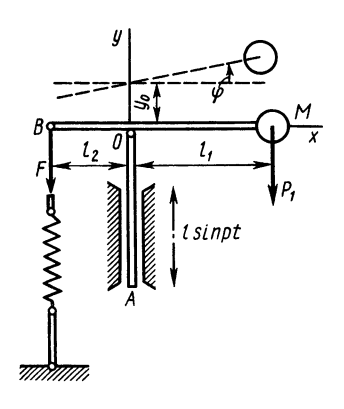


Рис. 123

Угол α_1 находится в первой четверти. По значению, например, синуса этого угла находим $\alpha_1 = 0{,}305$ рад. Уравнение движения груза принимает форму

$$x = 3{,}35 \sin(14t + 0{,}305) + 35t \sin\left(14t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 2. Система, состоящая из точечного груза M силой тяжести $P_1 = 80$ Н, невесомых стержней и пружины жесткостью $c = 5$ Н/см, расположена в вертикальной плоскости (рис. 123). Штанга OA движется в вертикальных направляющих по закону $y_0 = l \sin pt$, где $l = 1{,}6$ см, $p = 8$ с$^{-1}$. Горизонтальное положение стержня BM соответствует положению статического равновесия системы при $y_0 = 0$. В начальный момент система находится в положении статического равновесия. Угловая скорость стержня BM равна нулю и $y_0 = 0$. Трением пренебречь.

Определить малое движение груза M в вертикальном направлении, если $l_1 = 90$ см, $l_2 = 60$ см.

Решение. Система имеет одну степень свободы. Выберем за обобщенную координату угол φ, отсчитываемый от горизонтального направления против часовой стрелки.

Связями системы являются направляющие и шарниры, трением в которых пренебрегаем. Такие связи следует считать идеальными.

Уравнение Лагранжа для системы имеет форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Кинетическую энергию системы, в которой массу имеет только груз, вычисляем по формуле

$$T = \frac{P_1}{g}\frac{v^2}{2} = \frac{P_1}{g}(\dot{y}_0 + l_1\dot{\varphi})^2,$$

так как движение груза можно считать сложным, состоящим из переносного поступательного движения вместе с точкой O со скоростью $\dot{y}_0 = lp \cos pt$ и относительного вращательного движения с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг горизонтальной оси Oz, проходящей через точку O перпендикулярно стержню и плоскости Oxy. Так как угол φ и угловая скорость $\dot{\varphi}$ считаются малыми, то скорость от вращения вокруг оси равна $l_1\dot{\varphi}$ и направлена вертикально вверх. По теореме сложения скоростей, $v = \dot{y}_0 + l_1\dot{\varphi}$.

Для определения обобщенной силы сообщим системе в момент t возможное перемещение $\delta\varphi$ против часовой стрелки (в положительную сторону угла φ) и вычислим элементарную работу активных сил на этом возможном перемещении в предположении, что угол φ — малая величина. Имеем

$$Q = \frac{\sum \delta A_k}{\delta\varphi} = \frac{-P_1 l_1 \delta\varphi + F l_2 \delta\varphi}{\delta\varphi} = -P_1 l_1 + F l_2,$$

где $F = c\lambda$ — сила упругости пружины; $\lambda = \lambda_{ст} + (y_0 - l_2\varphi)$ — ее удлинение. Следовательно,

$$Q = -P_1 l_1 + c\lambda_{ст} l_2 + c l_2 (y_0 - l_2\varphi) = c l_2 (y_0 - l_2\varphi),$$

так как в положении статического равновесия момент силы тяжести и момент силы упругости относительно точки O равны друг другу, т. е. $P_1 l_1 = c\lambda_{ст} l_2$.

Вычислим величины, входящие в левую часть уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=\frac{P_1 l_1}{g}(\dot y_0+l_1\dot\varphi);\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=\frac{P_1 l_1}{g}(\ddot y_0+l_1\ddot\varphi).$$

После подстановки этих значений в уравнение Лагранжа получим

$$\frac{P_1 l_1}{g}(\ddot y_0+l_1\ddot\varphi)=cl_2(y_0-l_2\varphi),$$

или

$$\ddot\varphi+\frac{cl_2^2 g}{P_1 l_1^2}\varphi=\frac{cl_2 g}{P_1 l_1^2}y_0-\frac{\ddot y_0}{l_1}.$$

Но $\ddot y_0=-lp^2\sin pt$, поэтому

$$\frac{cl_2 g}{P_1 l_1^2}y_0-\frac{\ddot y_0}{l_1}=\left(\frac{cl_2 g}{P_1 l_1^2}+\frac{p^2}{l_1}\right)l\sin pt.$$

Дифференциальное уравнение движения системы можно составить не пользуясь уравнением Лагранжа, а применяя уравнение относительного вращательного движения твердого тела (стержень с грузом), с учетом момента силы инерции от переносного движения.

Вводя обозначения

$$k^2=\frac{cl_2^2 g}{P_1 l_1^2}=\frac{5\cdot 60^2\cdot 980}{80\cdot 90^2}=27{,}22;\quad k=5{,}2\ \text{с}^{-1};$$

$$h=\left(\frac{cl_2 g}{P_1 l_1^2}+\frac{p^2}{l_1}\right)l=(0{,}45+0{,}71)\,1{,}6\approx 1{,}86\ \text{с}^{-2},$$

получим следующее дифференциальное уравнение малых колебаний:

$$\ddot\varphi+k^2\varphi=h\sin pt.$$

Его решение $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где

$$\varphi_1=C_1\cos kt+C_2\sin kt$$

— общее решение однородного уравнения (собственные колебания);

$$\varphi_2=\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$$

— частное решение неоднородного уравнения (вынужденные колебания), так как $p\neq k$.

Таким образом,

$$\varphi=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt;$$

$$\dot\varphi=-C_1 k\sin kt+C_2 k\cos kt+\frac{hp}{k^2-p^2}\cos pt.$$

Начальные условия задачи: $t=0$, $\varphi=0$, $\dot\varphi=0$. Подставляя эти значения в выражения для φ и $\dot\varphi$, получаем

$$0=C_1;\quad 0=C_2 k+\frac{hp}{k^2-p^2},$$

или

$$C_1=0;\quad C_2=\frac{p}{k}\,\frac{h}{k^2-p^2}=\frac{8\cdot 1{,}86}{5{,}2\cdot 36{,}8}=0{,}0785.$$

После этого решение дифференциального уравнения примет вид

$$\varphi=0{,}0785\sin 5{,}2t-0{,}0505\sin 8t.$$

Для координат груза M имеем

$$x = l_1 = 90 \text{ см}; \quad y = y_0 + l_1\varphi = 1{,}6 \sin 8t + 90\,(0{,}0785 \sin 5{,}2t - 0{,}0505 \sin 8t) = 7{,}1 \sin 5{,}2t - 2{,}9 \sin 8t \text{ см}.$$

Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его интегрирование. Для выяснения влияния линейного сопротивления на вынужденные колебания рассмотрим наиболее общий случай, когда обобщенная сила Q состоит из трех сил: потенциальной $Q^{П} = -\partial П/\partial q = -cq$, линейного сопротивления $Q^{(\Phi)} = -\partial \Phi/\partial \dot{q} = -\mu\dot{q}$ и гармонической возмущающей $Q^{B} = H\sin(pt+\delta)$.

Подставляя это значение обобщенной силы $Q = Q^{П} + Q^{\Phi} + Q^{B}$ в уравнение Лагранжа (1), получаем

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = H\sin(pt+\delta).$$

Разделим обе части уравнения на a и введем обозначения $k^2 = c/a$, $2n = \mu/a$, $h = H/a$. Здесь k — круговая частота собственных колебаний; n — коэффициент затухания и h — относительная амплитуда возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение в окончательной форме

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h\sin(pt+\delta). \tag{44}$$

Получено линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вынужденных колебаний с учетом линейного сопротивления.

Так как оно является неоднородным уравнением, то его решение состоит из двух частей: q_1 — общего решения однородного уравнения, q_2 — частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения удовлетворяет уравнению собственных колебаний при линейном сопротивлении, поэтому его называют *собственным движением* или даже собственными колебаниями, хотя это движение может и не быть колебательным.

Частное решение неоднородного уравнения q_2 называют *вынужденным колебанием*. Общее движение системы характеризуется обобщенной координатой q, которая равна сумме q_1 и q_2, т. е. $q = q_1 + q_2$. Величину q называют *общим вынужденным движением* (или *вынужденным колебанием*).

Общее решение q_1 однородного дифференциального уравнения $\ddot{q}_1 + 2n\dot{q}_1 + k^2 q_1 = 0$ в зависимости от соотношения между величинами n и k выражается в одной из трех форм:

$$n<k, \quad q_1 = A_1 e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t + \alpha_1\right),$$

$$n=k, \quad q_1 = e^{-nt}(C_1 t + C_2);$$

$$n>k, \quad q_1 = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right).$$

Известно, что в любом из этих случаев из-за наличия множителя e^{-nt} q_1 стремится к нулю с возрастанием времени, т. е. затухает. При малых значениях коэффициента затухания $(n<k)$ затухающее движение q_1 носит колебательный характер, а при больших $(n \geqslant k)$ затухание так велико, что движение не является колебательным. Следовательно, при наличии линейного сопротивления по истечении достаточного времени общее вынужденное движение q несущественно отличается от вынужденных колебаний и можно считать, что $q = q_2$.

Частное решение q_2 уравнения (44) следует искать в форме $q_2 = A \sin(pt + \delta - \varepsilon)$.

Постоянные A и ε определяются из следующего условия: если подставить q_2 в уравнение (44), то оно превратится в тождество. Вычислим для этого производные от q_2:

$$\dot{q}_2 = Ap\cos(pt+\delta-\varepsilon); \quad \ddot{q}_2 = -Ap^2 \sin(pt+\delta-\varepsilon).$$

Преобразуем правую часть уравнения (44) так, чтобы в нее входили косинус и синус такого же аргумента, что и у функции q_2. Для этого следует к фазе правой части прибавить и вычесть величину ε и раскрыть синус суммы:

$$h\sin(pt+\delta) = h\sin[(pt+\delta-\varepsilon)+\varepsilon] =$$
$$= h\sin\varepsilon\cos(pt+\delta-\varepsilon) + h\cos\varepsilon\sin(pt+\delta-\varepsilon).$$

Учитывая это, подставим значение q_2 и его производных в уравнение (44) и соберем члены при $\sin(pt+\delta-\varepsilon)$ и $\cos(pt+\delta-\varepsilon)$. Получим тождество

$$[A(k^2-p^2) - h\cos\varepsilon]\sin(pt+\delta-\varepsilon) +$$
$$+ [2Anp - h\sin\varepsilon]\cos(pt+\delta-\varepsilon) \equiv 0.$$

Так как синус и косинус переменного аргумента не равны нулю одновременно, то тождество может выполняться только тогда, когда каждая из постоянных в квадратных скобках равна нулю, т. е.

$$A(k^2-p^2) = h\cos\varepsilon; \quad 2Anp = h\sin\varepsilon.$$

Из этих уравнений определяем амплитуду вынужденных колебаний A и сдвиг фаз ε:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4n^2p^2}}; \quad \sin\varepsilon = \frac{2Anp}{h}; \quad \cos\varepsilon = \frac{A(k^2-p^2)}{h}; \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2-p^2}.$$

Из формулы для $\sin\varepsilon$ следует, что $\sin\varepsilon$ является положительной величиной. Следовательно, значения ε заключены между 0 и π. Поэтому для определения ε достаточно использовать формулу только для одной тригонометрической функции, например для $\operatorname{tg}\varepsilon$.

Окончательная форма выражения вынужденных колебаний

$$q_2 = A\sin(pt+\delta-\varepsilon), \tag{45}$$

где

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}};\quad \operatorname{tg}\varepsilon=\frac{2np}{k^2-p^2};\quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\pi. \tag{46}$$

Основные свойства вынужденных колебаний. Из (45) и (46) следуют основные свойства вынужденных колебаний при наличии линейного сопротивления. *Вынужденные колебания не затухают. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Вынужденные колебания и при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий.* Следовательно, их нельзя возбудить с помощью ненулевых начальных условий. Для возникновения вынужденных колебаний на систему должно действовать возмущение.

Амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний зависят от частот собственных и вынужденных колебаний и коэффициента затухания. Чем больше коэффициент затухания при прочих равных условиях, тем меньше амплитуда вынужденных колебаний. *Незатухающий характер вынужденных колебаний при линейном сопротивлении — главное отличие их от собственных колебаний,* которые при действии линейного сопротивления всегда затухают, сохраняя колебательный характер $(n<k)$, или затухают почти монотонно $(n\geqslant k)$.

Другая важная особенность влияния линейного сопротивления на вынужденные колебания связана с явлением резонанса. В случае резонанса при линейном сопротивлении амплитуда вынужденных колебаний не возрастает пропорционально времени, как при отсутствии сопротивления, а остается постоянной величиной. *Достаточно как угодно малого сопротивления, чтобы амплитуда вынужденных колебаний при резонансе была постоянной,* хотя, возможно, и достаточно большой, но не переменной, возрастающей с течением времени. Это свойство вынужденных колебаний хорошо подтверждается опытными данными.

Исследование вынужденных колебаний. Амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний A и ε в соответствии с (46) не зависят от начальной фазы δ возмущающей силы. При их вычислении можно считать, например, $\delta=\pi/2+\varepsilon$. Если бы возмущающая сила была постоянной, равной амплитуде H, то правая часть уравнения (44) была бы тоже постоянной и в качестве частного решения неоднородного уравнения q_2 можно взять постоянную величину статического смещения $q_2=h/k^2$. Проверка убеждает, что это значение q_2 удовлетворяет уравнению (44).

Если вычислять q_2 из (45), учитывая (46) как частный случай, соответствующий $p=0$ и $\delta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon$, то получим $q_2=(A)_{p=p_0}=$ $=A_0=h/k^2$, что совпадает со статическим смещением. Следовательно, $A_0=h/k^2$ можно считать «амплитудой» вынужденных колебаний при действии постоянной возмущающей силы,

совпадающей по модулю с наибольшим значением гармонической возмущающей силы. Величину A/A_0 называют *коэффициентом динамичности.*

Коэффициент динамичности характеризует относительную величину амплитуды вынужденных колебаний, т. е. показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей силы отличается от статического смещения, которое вызывает постоянная возмущающая сила, равная по модулю наибольшему значению гармонической силы.

Исследование показывает, что для достаточно малого сопротивления коэффициент динамичности может быть значительно больше единицы. Проведем исследование коэффициента динамичности. Найдем, когда он принимает максимальное и минимальное значения, когда стремится к нулю и т. д.

Учитывая значения A и A_0, после преобразования получаем

$$\frac{A}{A_0}=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\,\frac{1}{h/k^2}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}}. \tag{47}$$

Здесь введены обозначения: $z=p/k$ — *коэффициент расстройки*, или относительная частота возмущающей силы; $b=n/k$ — *относительный коэффициент затухания*. Коэффициент динамичности зависит от параметров z и b. Исследуем его изменение в зависимости от изменения z при фиксированных значениях b.

Из (47) следует, что коэффициент динамичности стремится к нулю при $z\to\infty$ и любом относительном коэффициенте затухания b.

Следовательно, и амплитуда вынужденных колебаний A стремится к нулю, когда коэффициент k очень мал по сравнению с p $(z=p/k\to\infty)$. В этом случае *действие возмущений с большой частотой не воспринимается колеблющейся системой и не нарушает режима собственных колебаний*, которые под влиянием сопротивления для линейных систем затухают.

Это свойство вынужденных колебаний широко используется на практике при перевозке грузов, не переносящих толчков. Грузы подвешивают на таких пружинах к перевозящему их транспорту, для которых частота собственных колебаний оказалась бы малой по сравнению с частотой возмущающих сил (толчки от стыков рельсов для вагонов, толчки от неровностей дороги для автотранспорта, вибрации корпуса самолета от работающих двигателей и т. д.). На этом же свойстве вынужденных колебаний основано применение рессор у различных видов транспорта.

Для дальнейшего исследования коэффициента динамичности введем функцию $f(z)=(1-z^2)^2+4b^2z^2$, зависящую от z и параметра b. Тогда

$$A/A_0=1/\sqrt{f(z)}. \qquad (47')$$

Очевидно, что когда $f(z)$ достигает максимума, то A/A_0 имеем минимум, и наоборот. Для определения экстремальных значений $f(z)$ вычисляем ее производные по z:

$$f'(z)=-4z(1-z^2)+8b^2z=-4z(1-2b^2-z^2);$$
$$f''(z)=-4z(1-z^2)+8z^2+8b^2=8z^2-4(1-2b^2-z^2).$$

Функция $f(z)$ достигает экстремума при тех значениях z, для которых $f'(z)=0$. Из этого условия для z получаем два значения:

$$z_1=0; \ z_2=\sqrt{1-2b^2}.$$

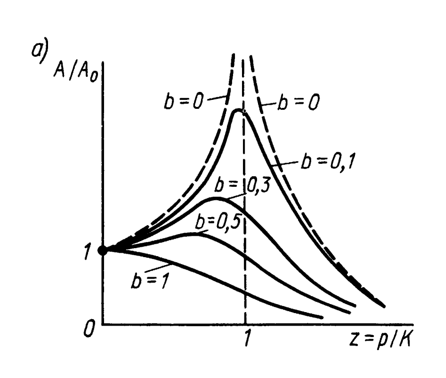
Так как относительная частота может быть только положительной и равна нулю для постоянной возмущающей силы, то $1-2b^2>0$; следовательно, $b<\sqrt{2}/2=0{,}7$. Для таких b $f''(z)<0$ при $z=z_1$, а поэтому функция $f(z)$ в этом случае достигает максимума и коэффициент динамичности — минимума. Для $z=z_2=\sqrt{1-2b^2}$, наоборот, $f''(z)>0$ и, следовательно, $f(z)$ имеет минимум, а коэффициент динамичности — максимум.

Для значений b, при которых $1-2b^2=0$ $(b=\sqrt{2}/2)$, имеем $z_1=z_2=0$ и $f''(z)=0$. Дополнительные исследования третьей и четвертой производных показывают, что в этом случае $f(z)$ при $z=0$ достигает минимума, а коэффициент динамичности имеет максимум. Других экстремальных значений $f(z)$ не имеет.

Если $1-2b^2<0$, то z_2 становится чисто мнимым. Это можно интерпретировать как отсутствие других значений z, кроме $z=0$, при которых $f(z)$ достигает экстремума. При $z=0$ $f(z)$ достигает минимума, а коэффициент динамичности — максимума. С увеличением z коэффициент динамичности при $1-2b^2\leqslant 0$ монотонно убывает от своего максимума при $z=0$ до нуля при $z\to\infty$.

Результаты исследования коэффициента динамичности изображены графически в виде так называемых резонансных кривых, или **амплитудно-частотной характеристики системы** (рис. 124, *а*), зависимости A/A_0 от z для различных значений относительного коэффициента затухания b. При этом использованы результаты исследования, полученные при отсутствии сопротивления, когда $b=0$.

Проведенное исследование позволяет сделать дополнительные выводы о влиянии линейного сопротивления на вынужденные колебания. Так, максимум коэффициента динамичности, а следовательно, и амплитуды вынужденных колебаний наступает не при резонансе, когда $z=1$ $(p=k)$, а при значении $z=z_2=\sqrt{1-2b^2}$, меньшем единицы. Чтобы получить величину максимальной амплитуды A_{max}, следует в ее выражение (47) вместо z подставить $z_2=\sqrt{1-2b^2}$, что соответствует критическому значению круговой частоты возмущающей силы



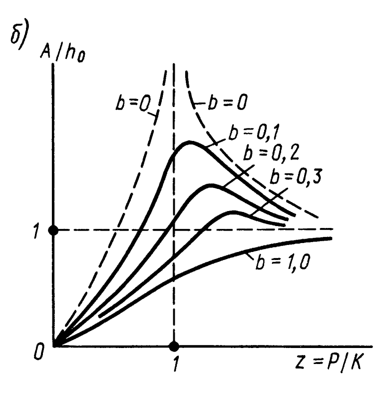


Рис. 124

$$p_{кр}=k\sqrt{1-2\frac{n^2}{k^2}}=\sqrt{k^2-2n^2}.$$

Поэтому

$$A_{max}=\frac{A_0}{\sqrt{(1-z_2^2)^2+4b^2z_2^2}}=\frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}}=\frac{A_0}{2b\sqrt{1-b^2}}.$$

Для малых b по сравнению с единицей приближенно

$$A_{max}\approx A_0/(2b).$$

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A_{рез}$ получается из (47) при $z=1$:

$$A_{рез}=h/(2nk)=A_0/(2b)<A_{max},$$

т. е. *амплитуда вынужденных колебаний при резонансе меньше максимальной амплитуды*, которая достигается при $p_{кр}=$ $=\sqrt{k^2-2n^2}$. Критическая круговая частота, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, уменьшается с увеличением коэффициента затухания. Величины A_{max} и $A_{рез}$ тоже при этом уменьшаются.

В случае кинематического возбуждения путем задания движения точек системы по гармоническому закону, как было показано, $H=H_0p^2$ и

$$h=\frac{H}{a}=\frac{H_0}{a}p^2=h_0p^2,$$

где $h_0=H_0/a$ — постоянная, не зависимая от круговой частоты возмущения p.

В этом случае по формуле (46) для амплитуды вынужденных колебаний получаем

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=h_0\frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}}$$

и для безразмерной (относительной) амплитуды, аналога коэффициента динамичности,

$$A/h_0 = z^2/\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}.$$

Построение графиков для A/h_0 облегчается, если ввести вспомогательную переменную $z_1 = \frac{1}{z}$. Зависимость A/h_0 от z_1 совпадает с зависимостью A/A_0 от z, графики для которой уже построены (рис. 124, *а*). Для перехода от z_1 к z в A/h_0 следует учесть, что $z_1 = \infty$ переходит в $z=0$, $z_1=0$ в $z=\infty$ и $z_1=1$ в $z=1$.

На рис. 124, *б* приведена амплитудно-частотная характеристика системы для этого случая. Величина h_0 теперь не является статическим смещением A_0.

Исследуем влияние линейного сопротивления на сдвиг фаз. В соответствии с (46)

$$\operatorname{tg}\varepsilon = 2np/(k^2-p^2) = 2bz/(1-z^2), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi. \tag{46'}$$

Тангенс сдвига фаз ε выражается простой зависимостью от z. Пользуясь монотонностью изменения тангенса в зависимости от изменения аргумента, легко построить график зависимости ε от z при различных фиксированных значениях b. Подготовим необходимые данные, учитывая, что при отсутствии сопротивления $\varepsilon=0$ для $z<1$, $\varepsilon=\pi/2$ при $z=1$ и $\varepsilon=\pi$ при $z>1$.

Из (46′) следует, что при $z=0$ $\operatorname{tg}\varepsilon=0$. Учитывая значение ε при отсутствии сопротивления (ε монотонно и непрерывно изменяется в зависимости от b), получаем $\varepsilon=0$. При $z=1$ $\operatorname{tg}\varepsilon=\infty$ и, следовательно, $\varepsilon=\pi/2$, как и при отсутствии сопротивления. Когда $z\to\infty$, то $\operatorname{tg}\varepsilon\to 0$, что соответствует $\varepsilon\to\pi$. Если учесть дополнительно монотонность тангенса, то для ε имеем результаты:

$$z=0, \quad \varepsilon=0;$$
$$0<z<1, \quad 0<\varepsilon<\pi/2;$$
$$z=1, \quad \varepsilon=\pi/2;$$
$$1<z<\infty, \quad \pi/2<\varepsilon<\pi;$$
$$z\to\infty, \quad \varepsilon\to\pi.$$

Эти данные позволяют построить график изменения сдвига фаз (фазочастотную характеристику системы) в зависимости от относительной частоты возмущающей силы для фиксированных значений относительного коэффициента затухания (рис. 125).

Тангенс сдвига фаз ε не зависит от h, и потому фазочастотная характеристика системы не зависит от способа гармонического возбуждения. Она одна и та же как для динамического, так и для кинематического возбуждений.

Проведенное исследование сдвига фаз показывает, что *сдвиг фаз при резонансе не зависит от линейного сопротивления.* Он равен $\pi/2$.

Если при частотах, близких к резонансным ($z=1$), при отсутствии сопротивления сдвиг фаз изменяется скачкообразно, то под влиянием линейного сопротивления это изменение является непрерывным и тем более плавным, чем больше относительный коэффициент затухания.

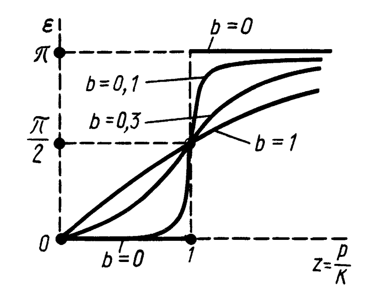


Рис. 125

Общие свойства вынужденных колебаний. Отметим основные свойства вынужденных колебаний при действии линейного сопротивления.

1. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении являются незатухающими, т. е. амплитуда их постоянна как при отсутствии резонанса, так и при резонансе.

2. Линейное сопротивление не влияет на частоту вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой возмущающей силы.

3. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий, так же как они не зависят от них при отсутствии сопротивления.

4. Амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю быстрее при линейном сопротивлении с увеличением относительной частоты возмущающей силы, чем при отсутствии сопротивления.

Основы виброзащиты. Во многих случаях от работы машин, механизмов и других устройств, представляющих собой колеблющиеся системы, передаются вредные вибрации на фундаменты. Защищать фундаменты и иные крепления колеблющихся систем следует прежде всего от вынужденных колебаний, так как собственные колебания при наличии сопротивления быстро затухают.

Для уменьшения переменных сил, передающихся от колеблющихся систем на фундаменты, представляющие собой упругие основания, применяются различные способы. Силы от колеблющихся систем с одной степенью свободы, пропорциональные ускорениям, пропорциональны амплитудам колебаний.

Существует два основных способа уменьшения амплитуды вынужденных колебаний. Один из них состоит в значительном разносе частот вынужденных и собственных колебаний системы, что имеет место при больших значениях $z=p/k$. Другой способ связан с увеличением коэффициента сопротивления, что достигается с помощью специальных устройств, называемых *демпферами*. Процесс уменьшения амплитуды колебаний за счет увеличения коэффициента сопротивления называют *демпфированием колебаний*.

Для выяснения особенностей, связанных с демпфированием вынужденных колебаний, рассмотрим пример.

Пример. Имеем колеблющуюся систему с одной степенью свободы, совершающую колебания в вертикальном направлении под действием возмущающей силы $Q^B = H\sin(pt+\delta)$, действующей в том же направлении (рис. 126).

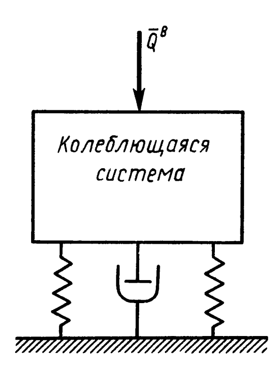


Рис. 126

Корпус колеблющейся системы укреплен на фундаменте с помощью пружин с суммарной жесткостью c и демпфера с коэффициентом сопротивления μ.

Определить наибольшую силу, передающуюся на фундамент вследствие вынужденных колебаний системы.

Решение. Выберем за обобщенную координату q перемещение корпуса колеблющейся системы по вертикали вниз, отсчитываемое от положения статического равновесия. На фундамент через пружины и демпфер будет передаваться сила

$$F = cq_2 + \mu\dot{q}_2,$$

где

$$q_2 = A\sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

— вынужденные колебания системы, возникающие под действием возмущающей силы.

Так как $\dot{q}_2 = Ap\cos(pt + \delta - \varepsilon)$, то

$$F = Ac\left[\sin(pt+\delta-\varepsilon) + \frac{\mu p}{c}\cos(pt+\delta-\varepsilon)\right] = Ac\sqrt{1+\left(\frac{\mu p}{c}\right)^2}\sin(pt+\delta-\varepsilon+\gamma),$$

где γ — дополнительная начальная фаза. Таким образом,

$$F_{max} = Ac\sqrt{1+\frac{\mu^2 p^2}{c^2}}.$$

Величину отношения $\dfrac{F_{max}}{Q^B_{max}} = \dfrac{F_{max}}{H} = \dfrac{Ac}{H}\sqrt{1+\dfrac{\mu^2 p^2}{c^2}}$

называют *коэффициентом передачи силы*. Преобразуем его выражение, используя формулы

$$h = \frac{H}{a},\quad k^2 = \frac{c}{a},\quad A_0 = \frac{h}{k^2},\quad 2n = \frac{\mu}{a}.$$

Тогда $Ac = \dfrac{A}{A_0}A_0 c$; $A_0 c = \dfrac{h}{k^2}c = \dfrac{H}{a}\,\dfrac{c}{k^2} = H.$

Для максимальной силы имеем

$$F_{max} = \frac{A}{A_0}H\sqrt{1+\frac{4n^2a^2p^2}{c^2}} = \frac{A}{A_0}H\sqrt{1+4b^2z^2},\qquad \text{где } z = p/k,\ b = n/k.$$

Для коэффициента передачи силы F_{max}/H, используя выражение для коэффициента динамичности A/A_0 (47), получаем

$$F_{max}/H = \sqrt{1+4b^2z^2}/\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}. \tag{a}$$

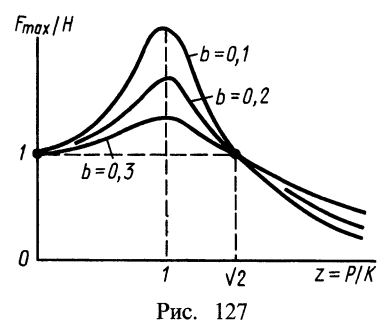


Рис. 127

Из (а) следует, что $F_{max}/H = 1$ при $z = 0$ и $z = \sqrt{2}$. С учетом этого на рис. 127 приведены графики коэффициента передачи силы в зависимости от z и b. Из графиков следует, что F_{max}/H убывает с ростом b при изменении z в интервале $0 < z < \sqrt{2}$. Здесь демпфирование эффективно. Коэффициент передачи силы растет при изменении z в пределах $\sqrt{2} < z < \infty$. В этом интервале изменения z демпфирование не эффективно, так как оно приводит не к уменьшению, а к увеличению коэффициента передачи силы.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Математическим круговым маятником называется материальная точка, движущаяся в одной и той же вертикальной плоскости по окружности под действием силы тяжести. Математическим маятником является груз достаточно малых размеров, подвешенный к неподвижной точке O с помощью невесомого стержня или невесомой нерастяжимой нити (рис. 128). Расстояние $OM=l$ называют длиной математического маятника. Положение материальной точки M можно охарактеризовать углом φ, отсчитываемым от вертикали — положения равновесия маятника.

Математический маятник можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. Связь в виде нити или стержня является идеальной. Выберем за обобщенную координату угол φ. Составим для маятника уравнение Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q.$$

Кинетическая энергия T математического маятника

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{ml^2\dot\varphi^2}{2}=\frac{Pl^2}{g}\frac{\dot\varphi^2}{2},$$

так как

$$v=l\dot\varphi.$$

Активная сила — сила тяжести $\bar P$ — является потенциальной силой; следовательно, обобщенная сила Q через потенциальную энергию выразится в виде

$$Q=-\partial\Pi/\partial\varphi.$$

Для того чтобы вычислить потенциальную энергию в отклоненном положении маятника, следует подсчитать работу силы тяжести при перемещении точки M из этого положения в положение равновесия M_0, где $\varphi=0$. Работа равна произведению силы тяжести на высоту опускания точки M и является положительной величной, т. е.

$$\Pi=A_{MM_0}=Pl(1-\cos\varphi);$$
$$Q=-\partial\Pi/\partial\varphi=-Pl\sin\varphi.$$

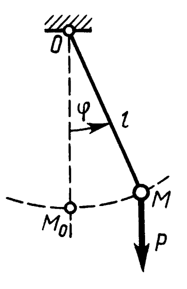


Рис. 128

Вычисляем производные, входящие в уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\dot\varphi;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\ddot\varphi.$$

Уравнение Лагранжа для математического маятника после переноса всех членов в левую часть выразится в форме

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0. \quad (48)$$

Получено нелинейное дифференциальное уравнение. Оно не интегрируется в элементарных функциях.

В случае малых колебаний, когда φ достаточно мало, можно считать $\sin\varphi\approx\varphi$. Уравнение малых собственных колебаний математического маятника примет форму

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0, \quad (49)$$

или $\ddot{\varphi}+k^2\varphi$, где круговая частота колебаний $k=\sqrt{g/l}$. Его решение имеет вид

$$\varphi=A\sin(kt+\alpha).$$

Постоянные величины A и α являются амплитудой и начальной фазой. Период малых колебаний математического маятника

$$\tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{l/g}. \quad (50)$$

Малые колебания математического маятника являются гармоническими. Период их колебания зависит только от длины математического маятника и ускорения силы тяжести и не зависит от амплитуды колебаний. Так как ускорение силы тяжести g зависит от широты места, то, следовательно, период малых колебаний математического маятника тоже зависит от широты.

Отмеченными свойствами, очевидно, не обладают колебания математического маятника, которые не являются малыми. Эти колебания уже не являются гармоническими, и их период колебаний зависит от амплитуды A.

Как показывает более подробное исследование, эту зависимость периода колебаний от амплитуды можно выразить в виде ряда:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{A}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{A}{2}+\ldots\right].$$

Если принять $\sin A/2\approx A/2$ и удержать первые два члена ряда, то получим приближенную формулу для периода колебаний в зависимости от амплитуды:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{A^2}{16}\right).$$

Физическим маятником называется твердое тело, вращающееся под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс (рис. 129). Ось вращения физического маятника называется *осью привеса*,

а точка ее пересечения O с перпендикулярной оси привеса вертикальной плоскостью, в которой находится центр масс, называется *точкой привеса*.

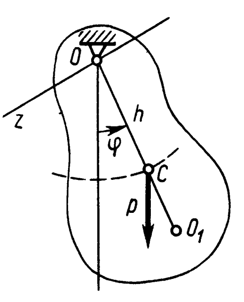


Рис. 129

Физический маятник можно считать системой с одной степенью свободы. За обобщенную координату примем угол φ между вертикалью и отрезком OC, соединяющим точку привеса O с центром масс C. Считаем, что трения в подшипниках оси привеса нет и, следовательно, связи, наложенные на маятник, являются идеальными. Составим для физического маятника уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Кинетическая энергия маятника как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной горизонтальной оси привеса Oz, определяется по формуле

$$T=J_{Oz}\frac{\dot{\varphi}^2}{2},$$

где J_{Oz} — момент инерции маятника относительно его оси привеса.

Потенциальная энергия вычисляется так же, как и для математического маятника:

$$\Pi=Ph(1-\cos\varphi)=Mgh(1-\cos\varphi),$$

где P — сила тяжести; M — масса физического маятника и $h=OC$.

Производные, входящие в уравнение Лагранжа,

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=J_{Oz}\dot{\varphi};\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=J_{Oz}\ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}=Mgh\sin\varphi.$$

Уравнение Лагранжа после деления обеих частей на J_{Oz} и переноса всех членов в одну часть принимает вид

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mgh}{J_{Oz}}\sin\varphi=0. \tag{51}$$

Его можно получить применив к физическому маятнику дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$J_{Oz}\ddot{\varphi}=\sum_{k=1}^{N} M_{Oz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right),$$

где

$$\sum_{k=1}^{N} M_{Oz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)=-Ph\sin\varphi.$$

В случае малых колебаний $\sin\varphi\approx\varphi$ и дифференциальное уравнение примет форму

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mgh}{J_{Oz}}\varphi=0$$

или

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0, \qquad (52)$$

где $k^2=Mgh/J_{Oz}=Ph/J_{Oz}$.

Если для физического маятника ввести условную длину $l=J_{Oz}/(Mh)$, то период его малых колебаний через эту длину выразится так же, как и период математического маятника. Действительно,

$$\tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{J_{Oz}/(Mgh)}=2\pi\sqrt{l/g}. \qquad (53)$$

Эту условную длину $l=J_{Oz}/(Mh)$называют *приведенной длиной физического маятника.*

Малые собственные колебания физического маятника, так же как и математического, являются гармоническими с периодом, не зависящим от амплитуды.

Если от точки привеса O отложить по линии OC приведенную длину физического маятника l, то получим точку O_1, которая называется *центром качаний*. Для приведенной длины физического маятника справедливы следующие теоремы Гюйгенса.

1. Приведенная длина физического маятника больше расстояния от точки привеса до центра масс, т. е. $l>h$. Для доказательства теоремы применим к физическому маятнику теорему Штейнера о связи моментов инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Получим

$$l=\frac{J_{Oz}}{Mh}=\frac{J_{Cz}+Mh^2}{Mh}=\frac{J_{Cz}}{Mh}+h>h, \qquad (54)$$

так как отрезок $O_1C=J_{Cz}/(Mh)=l-h>0$. Здесь J_{Cz}—момент инерции относительно горизонтальной оси, параллельной оси привеса и проходящей через центр масс.

2. Центр качаний и точка привеса физического маятника взаимны, т. е. если то же твердое тело подвесить за горизонтальную ось, проходящую через центр качаний, параллельно первоначальной оси, проходящей через точку привеса, то получим новый физический маятник, приведенная длина которого равна приведенной длине прежнего маятника, т. е. $l_1=l$.

Вычислим приведенную длину l_1 физического маятника, у которого ось привеса проходит через точку O_1 — центр качаний прежнего маятника. Согласно определению приведенной длины, применяя теорему Штейнера, имеем

$$l_1 = \frac{J_{O_1 z}}{MO_1C} = \frac{J_{Cz} + M(l-h)^2}{M(l-h)} = \frac{J_{Cz}}{M(l-h)} + l - h = l,$$

так как из (54) следует, что $J_{Cz} = Mh(l-h)$.

Если от точки O_1 отложить отрезок $l_1 = l$, то получим точку O, т. е. центр качаний и точка привеса взаимны. Периоды малых колебаний физических маятников вокруг горизонтальных осей, проходящих через точку привеса и центр качаний, одинаковы.

Важное прикладное значение теории малых колебаний физического маятника состоит в том, что ее можно положить в основу экспериментального определения моментов инерции тел. Для опытного определения момента инерции тела силой тяжести P относительно какой-либо оси достаточно сделать эту ось горизонтальной осью привеса, определить период малых колебаний тела вокруг этой оси и расстояние от точки привеса до центра масс. Тогда, согласно (53), момент инерции относительно горизонтальной оси привеса определится по формуле

$$J_{Oz} = \frac{\tau^2}{4\pi^2} Ph. \tag{55}$$

§ 4. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ (РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ)

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы получим из уравнений Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2. \tag{56}$$

Каждая из обобщенных сил в общем случае состоит из трех сил: обобщенной силы от потенциальных сил $Q_i^{П}$, сил сопротивления $Q_i^{Ф}$, возмущающих сил Q_i^{B}.

Для рассмотрения малых колебаний системы в окрестности устойчивого положения равновесия необходимо получить разложения в ряды кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы вычисляется по формуле

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2}.$$

Для системы с двумя степенями свободы, на которую наложены стационарные, идеальные, голономные, неосвобождающие связи, радиус-вектор каждой точки $\bar{r}_k$ является функцией только обобщенных координат q_1, q_2. При движении системы обобщенные координаты q_1 и q_2 зависят от времени. Следовательно, производная по времени от радиуса-вектора

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2.$$

Подставляя ее в выражение кинетической энергии, получаем

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{q}_1^2 \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} + \right.$$

$$\left. + \dot{q}_2^2 \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2\right),$$

где введены обозначения

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right)^2; \quad A_{12} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}; \quad A_{22} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\right)^2.$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{22} зависят только от q_1 и q_2, как и $\bar{r}_k$, и не зависят от $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Разложим каждую из этих функций в ряд по степеням q_1 и q_2 в окрестности положения равновесия, приняв в положении равновесия $q_1 = q_2 = 0$. Имеем для A_{11}

$$A_{11}(q_1,\ q_2) = (A_{11})_0 + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \ldots.$$

Индекс 0 здесь и далее указывает, что эти величины следует вычислять при $q_1 = q_2 = 0$. Аналогичные разложения получаются для A_{12} и A_{22}. Введем обозначения:

$$a_{11} = (A_{11})_0; \quad a_{12} = (A_{12})_0; \quad a_{22} = (A_{22})_0.$$

Постоянные величины a_{11}, a_{12}, a_{22} называются *коэффициентами инерции* системы. Отбрасывая члены третьего и более высокого порядков по отношению к q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, получаем следующее выражение для кинетической энергии

$$T = {}^1/_2\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right). \quad (57)$$

Однородной квадратичной формой двух переменных x_1 и x_2 называют выражение вида

$$F = B_{11}x_1^2 + 2B_{12}x_1x_2 + B_{22}x_2^2,$$

где B_{11}, B_{12}, B_{22} — постоянные величины, не все равные нулю.

Квадратичная форма, которая принимает только положительные значения в области изменения переменных x_1 и x_2 и равна нулю только при нулевых значениях переменных, называется *определенно-положительной.*

Если пренебречь слагаемыми третьего и более высокого порядков, кинетическая энергия системы в окрестности положения равновесия будет однородной квадратичной формой обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$. Так как кинетическая энергия всегда положительна и равна нулю только при нулевых значениях обобщенных скоростей, то она выражается вблизи положения равновесия системы определенно-положительной квадратичной формой обобщенных скоростей.

Для того чтобы квадратичная форма F была определенно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты удовлетворяли условиям

$$B_{11}>0; \quad B_{22}>0; \quad B_{11}B_{22}-B_{12}^2=\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{vmatrix}>0. \qquad (58)$$

Получим эти условия. Пусть F — определенно-положительная квадратичная форма. Тогда, если $F>0$ при $x_2=0$, $x_1\neq 0$, то $B_{11}>0$. Аналогично из условия, что $F>0$ при $x_2\neq 0$, $x_1=0$, следует, что $B_{22}>0$. Это необходимые условия определенной положительности квадратичной формы, но они недостаточны, так как F может стать отрицательной вследствие того, что B_{12} имеет достаточное по величине отрицательное значение.

Преобразуем квадратичную форму, введя переменную $x=x_1/x_2$, если в рассматриваемой области x_2 не равна нулю. В противном случае можно поменять местами x_1 и x_2. Квадратичная форма F примет вид

$$F=x_2^2\left(B_{11}x^2+2B_{12}x+B_{22}\right).$$

Для того чтобы F была всюду положительной в области рассматриваемых значений x, необходимо и достаточно, чтобы квадратное уравнение

$$B_{11}x^2+2B_{12}x+B_{22}=0$$

не имело действительных корней, т. е. парабола

$$y=B_{11}x^2+2B_{12}x+B_{22},$$

для которой $B_{11}>0$ и $B_{22}>0$, целиком располагалась над осью абсцисс.

Для этого дискриминант квадратного уравнения должен быть отрицательным, т е.

$$B_{12}^2-B_{11}B_{22}<0 \quad \text{или} \quad B_{11}B_{22}-B_{12}^2>0.$$

Условия (58) доказаны.

Так как кинетическая энергия в окрестности положения равновесия представляется определенно-положительной квадратичной формой, то ее коэффициенты должны удовлетворять условиям (58); поэтому для a_{11}, a_{12}, a_{22} имеем

$$a_{11}>0;\quad a_{22}>0;\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}>0. \qquad (59)$$

Для системы с любым конечным числом степеней свободы n кинетическая энергия в окрестности положения равновесия выражается однородной квадратичной формой

$$T={}^1/_2\left(a_{11}\dot q_1^2+a_{12}\dot q_1\dot q_2+a_{21}\dot q_2\dot q_1+a_{22}\dot q_2^2+\ldots+a_{nn}\dot q_n^2\right).$$

Условия ее определенной положительности таковы:

$$a_{11}>0;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0;\ \ldots;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы зависит только от обобщенных координат q_1 и q_2, если силовое поле и связи стационарны. Разлагая потенциальную энергию $П$ в окрестности положения равновесия $q_1=q_2=0$ в ряд по степеням q_1 и q_2, имеем

$$П(q_1,\ q_2)=(П)_0+(\partial П/\partial q_1)_0 q_1+(\partial П/\partial q_2)_0 q_2+(\partial^2 П/\partial q_1^2)_0 q_1^2/2+$$
$$+\left[\partial^2 П/(\partial q_1\partial q_2)\right]_0 q_1 q_2+(\partial^2 П/\partial q_2^2)_0 q_2^2/2+\ldots.$$

Потенциальную энергию в положении равновесия $(П)_0$ принимаем равной нулю; величины $(\partial П/\partial q_1)_0=0$, $(\partial П/\partial q_2)_0=0$ как значения обобщенных сил в положении равновесия системы. Окончательно, удерживая члены второго порядка и пренебрегая слагаемыми третьего и более высокого порядков, потенциальную энергию выразим в форме

$$П={}^1/_2\left(c_{11}q_1^2+2c_{12}q_1q_2+c_{22}q_2^2\right). \qquad (60)$$

Постоянные величины

$$c_{11}=(\partial^2 П/\partial q_1^2)_0;\quad c_{12}=\left[\partial^2 П/(\partial q_1\partial q_2)\right]_0;\quad c_{22}=(\partial^2 П/\partial q_2^2)_0$$

называются *коэффициентами жесткости.*

Потенциальная энергия с принятой точностью является однородной квадратичной формой обобщенных координат q_1 и q_2. В том случае, когда потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум, т. е. положение равновесия является устойчивым, коэффициенты разложения c_{11}, c_{12}, c_{22} как вторые производные от $П$ по переменным q_1 и q_2 при минимуме должны удовлетворять условиям

$$c_{11}>0;\quad c_{22}>0;\quad c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0. \qquad (61)$$

Эти условия совпадают с условиями (58) определенной положительности квадратичной формы для Π. Следовательно, потенциальная энергия с принятой точностью выражается определенно-положительной квадратичной формой в окрестности своего минимума при $q_1=q_2=0$, т. е. в окрестности устойчивого положения равновесия системы.

Потенциальная энергия в случае n степеней свободы выражается в форме

$$\Pi = {}^1/_2\left(c_{11}q_1^2 + c_{12}q_1q_2 + c_{21}q_2q_1 + c_{22}q_2^2 + \ldots + c_{nn}q_n^2\right).$$

Условия определенной положительности сведутся к условиям для коэффициентов жесткости, полностью аналогичным условиям для коэффициентов инерции.

Диссипативная функция

Пусть на точки системы действуют линейные силы сопротивления $\bar{R}_k$, пропорциональные скорости точек $\bar{v}_k$, т. е.

$$\bar{R}_k = -\mu_k\bar{v}_k = -\mu_k\dot{\bar{r}}_k,$$

где μ_k — постоянные коэффициенты сопротивления.

Обобщенная сила Q_1^Φ от сил сопротивления, согласно определению обобщенной силы, если использовать выведенное в гл. 6 тождество Лагранжа

$$\partial\bar{r}_k/\partial q_1 = \partial\dot{\bar{r}}_k/\partial\dot{q}_1,$$

может быть выражена в форме

$$Q_1^\Phi = \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1} = -\sum_{k=1}^{N}\mu_k\dot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_1} = -\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\bar{v}_k^2}{2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_1}.$$

Здесь $\Phi = \sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\bar{v}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar{r}}_k^2}{2}$ — *диссипативная функция*. Аналогично, Q_2^Φ через диссипативную функцию выразится как

$$Q_2^\Phi = -\partial\Phi/\partial\dot{q}_2.$$

Так же как и в случае системы с одной степенью свободы, для системы с двумя и любым конечным числом степеней свободы можно получить энергетическое соотношение

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -2\Phi,$$

где $E = T + \Pi$ — полная механическая энергия системы.

Таким образом, *диссипативная функция в общем случае характеризует скорость убывания полной механической энергии вследствие действия линейных сил сопротивления.*

Диссипативная функция по своей структуре аналогична кинетической энергии, только в нее вместо масс m_k входят коэффициенты сопротивления μ_k

Выполнив для Ф разложение в ряд окрестности положения равновесия и отбросив члены третьего и более высокого порядков, так же как и для кинетической энергии, получим

$$\Phi = {}^1/_2 \left(\mu_{11}\dot{q}_1^2 + 2\mu_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mu_{22}\dot{q}_2^2\right). \tag{62}$$

Постоянные величины μ_{11}, μ_{12}, μ_{22} называются *приведенными коэффициентами сопротивления.*

Квадратичная форма для Ф, так же как и для кинетической энергии, по своей физической сущности является определенно-положительной; следовательно, ее коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\mu_{11} > 0; \quad \mu_{22} > 0; \quad \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 > 0.$$

Для системы с n степенями свободы диссипативная функция выразится в форме

$$\Phi = {}^1/_2 \left(\mu_{11}\dot{q}_1^2 + \mu_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mu_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1 + \mu_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + \mu_{nn}\dot{q}_n^2\right).$$

Приведенные коэффициенты сопротивления удовлетворяют условиям, которые полностью аналогичны условиям для коэффициентов инерции.

Дифференциальные уравнения собственных колебаний

Если система, имеющая две степени свободы, движется только под действием потенциальных сил, то, учитывая формулы для кинетической и потенциальной энергий (57) и (60), имеем:

$$Q_1 = Q_1^П = -\frac{\partial П}{\partial q_1} = -\left(c_{11}q_1 + c_{12}q_2\right);$$

$$Q_2 = Q_2^П = -\frac{\partial П}{\partial q_2} = -\left(c_{12}q_1 + c_{22}q_2\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2.$$

Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа (56), получаем линейные дифференциальные уравнения малых собственных колебаний системы с двумя степенями свободы без сопротивления:

$$\left.\begin{aligned} \left(a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1\right) + \left(a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2\right) = 0; \\ \left(a_{12}\ddot{q}_1 + c_{12}q_1\right) + \left(a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Механические системы, для которых квадратичные выражения для кинетической и потенциальной энергий (57) и (60) являются точными без отбрасывания членов более высокого порядка, называются *линейными.* Для линейных систем дифференциальные уравнения (63) являются точными, а не приближенными, как в случае малых колебаний. Математическая

теория малых колебаний не отличается от теории линейных колебаний. Но линейные колебания могут быть не обязательно малыми.

Для системы с любым конечным числом степеней свободы дифференциальные уравнения собственных колебаний выразятся в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}\ddot{q}_1+c_{11}q_1)+(a_{12}\ddot{q}_2+c_{12}q_2)+\ldots+(a_{1n}\ddot{q}_n+c_{1n}q_n)=0;\\
&(a_{21}\ddot{q}_1+c_{21}q_1)+(a_{22}\ddot{q}_2+c_{22}q_2)+\ldots+(a_{2n}\ddot{q}_n+c_{2n}q_n)=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(a_{n1}\ddot{q}_1+c_{n1}q_1)+(a_{n2}\ddot{q}_2+c_{n2}q_2)+\ldots+(a_{nn}\ddot{q}_n+c_{nn}q_n)=0.
\end{aligned}$$

Интегрирование дифференциальных уравнений. Уравнение частот

Решение системы уравнений (63) следует искать в форме $q_1=C_1e^{\lambda t}$, $q_2=C_2e^{\lambda t}$. Но в случае малых колебаний в окрестности устойчивого положения равновесия все значения λ, в чем нетрудно убедиться, чисто мнимые и, следовательно, решение можно искать в виде

$$q_1=A_1\sin(kt+\alpha);\qquad q_2=A_2\sin(kt+\alpha),\tag{64}$$

где постоянная k — круговая частота колебаний. Как доказано ниже, оня является действительной величиной. Постоянные A_1, A_2, k и α подлежат определению. Величины A_1 и A_2 называются *амплитудами*, а α — *начальной фазой*. Вычислим производные:

$$\ddot{q}_1=-A_1k^2\sin(kt+\alpha);\qquad \ddot{q}_2=-A_2k^2\sin(kt+\alpha).$$

Подставим их и значения q_1 и q_2 из (64) в систему уравнений (63). Получим тождества, в которых постоянные коэффициенты при $\sin(kt+\alpha)$ должны быть равны нулю. Это дает систему двух однородных линейных уравнений для определения амплитуд A_1 и A_2:

$$\left.\begin{aligned}
A_1(c_{11}-a_{11}k^2)+A_2(c_{12}-a_{12}k^2)=0;\\
A_1(c_{12}-a_{12}k^2)+A_2(c_{22}-a_{22}k^2)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{65}$$

Однородная линейная система уравнений имеет решения, отличные от нуля, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & c_{12}-a_{12}k^2\\ c_{12}-a_{12}k^2 & c_{22}-a_{22}k^2\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение частот:

$$(c_{11}-a_{11}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0.\tag{66}$$

Только для значений k, удовлетворяющих уравнению частот, существуют отличные от нуля значения A_1, A_2 и, следовательно, q_1, q_2.

Уравнение частот как биквадратное уравнение в общем случае имеет два значения для квадрата частоты k^2. Для системы с двумя степенями свободы, если квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергий удовлетворяют условиям определенной положительности (59) и (61), эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы оба решения для k^2 были действительными и положительными. Только для действительных и положительных значений k^2 обобщенные координаты q_1 и q_2 выражаются синусоидальной зависимостью от времени. Для значений k^2, не удовлетворяющих этим условиям, движение системы не является колебательным.

Отбрасывая отрицательные значения частот, как не дающие новых решений и не имеющие физического значения, получаем две частоты. Меньшую из частот обозначают k_1, большую — k_2. Частоты k_1 и k_2 являются частотами собственных колебаний системы. Они не зависят от начальных условий и полностью определяются значениями коэффициентов инерции и жесткости.

Исследуем уравнение частот. Рассмотрим функцию

$$y=(c_{11}-a_{11}x)(c_{22}-a_{22}x)-(c_{12}-a_{12}x)^2, \tag{67}$$

где $x=k^2$. Уравнение (67) является уравнением параболы. Корням уравнения частот k_1^2 и k_2^2 соответствуют точки пересечения параболой оси абсцисс x_1 и x_2.

Так как квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергий определенно-положительны, то коэффициенты инерции и жесткости удовлетворяют условиям (59) и (61), т. е.

$$a_{11}>0,\ \ a_{22}>0,\ \ a_{22}-a_{12}^2>0; \tag{59'}$$

$$c_{11}>0,\ \ c_{22}>0,\ \ c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0. \tag{61'}$$

Предположим для определенности, что $c_{11}/a_{11}<c_{22}/a_{22}$. Для построения параболы зададим ряд значений x и определим из (67) соответствующие значения y, учитывая условия (59′) и (61′). Имеем:

$$x=x_0=0,\ \ y=y_0=c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0;$$

$$x=x'=\frac{c_{11}}{a_{11}}>0,\ \ y=y'=-\left(c_{12}-a_{12}\frac{c_{11}}{a_{11}}\right)^2<0;$$

$$x=x''=\frac{c_{22}}{a_{22}}>0,\ \ y=y''=-\left(c_{12}-a_{12}\frac{c_{22}}{a_{22}}\right)^2<0.$$

Расположив в (67) слагаемые по убывающим степеням x, получим

$$y=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)x^2-(c_{11}a_{22}+c_{22}a_{11}+2c_{12}a_{12})x+c_{11}c_{22}-c_{12}^2. \tag{67'}$$

Так как коэффициент $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ при x^2 положителен, то $y\to+\infty$, когда $x\to\infty$. По полученным данным строим график

параболы (рис. 130). Из графика параболы следует, что корни уравнения частот x_1 и x_2 располагаются в интервале

$$0<x_1<c_{11}/a_{11}<c_{22}/a_{22}<x_2<\infty,$$

т. е. парабола пересекает ось абсцисс в двух различных точках $x_1=k_1^2$ и $x_2=k_2^2$, так как значения y' и y'' отрицательны в точках $x'=c_{11}/a_{11}$ и $x''=c_{22}/a_{22}$, что и требовалось доказать.

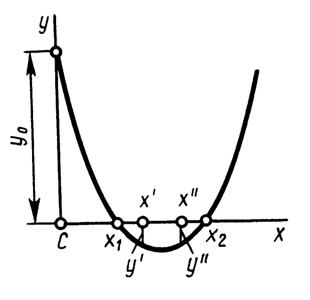


Рис. 130

Колебание системы с частотой, квадрат которой $x'=k_1'^2=c_{11}/a_{11}$ и обобщенная координата q_1', получается в том случае, если другая обобщенная координата $q_2'=\text{const}$, т. е. при дополнительном наложении связи на систему. Аналогично, колебание с квадратом частоты $x''=k_2'^2=c_{22}/a_{22}$ и обобщенной координатой q_2' получается при $q_1'=\text{const}$, что тоже связано с дополнительным наложением связи. Частоты $k_1'=\sqrt{c_{11}/a_{11}}$ и $k_2'=\sqrt{c_{22}/a_{22}}$ называются *парциальными частотами* системы. Из проведенного анализа следует, что они заключены между главными частотами, причем наименьшая из них больше первой главной частоты. Так влияет на частоты дополнительное наложение связей, при котором не изменяются коэффициенты инерции и жесткости системы.

Случай, когда $x_1=x_2$, возможен при

$$x=k^2=c_{11}/a_{11}=c_{22}/a_{22}=c_{12}/a_{12},$$

при этом $y'=y''=0$. Парабола касается оси Ox.

В случае равных частот каждое из уравнений системы (65) является тождеством, справедливым при любых значениях A_1, A_2. Система дифференциальных уравнений (63) распадается на два независимых уравнения: одно — для q_1, другое — для q_2. Их решения имеют вид

$$q_1=A_1\sin(kt+\alpha_1);\quad q_2=A_2\sin(kt+\alpha_2).$$

Постоянные A_1, A_2, α_1, α_2 определяются из начальных условий

$$t=0;\quad q_1=q_1^{(0)};\quad q_2=q_2^{(0)};\quad \dot q_1=\dot q_1^{(0)};\quad \dot q_2=\dot q_2^{(0)}.$$

Система в этом случае совершает гармонические колебания. Каждая из обобщенных координат q_1 и q_2 изменяется по синусоидальному закону независимо друг от друга с одинаковыми частотами.

В случае разных частот каждой из них соответствуют определенные значения A_1, A_2, α: $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, α_1 — для частоты k_1; $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$, α_2 — для частоты k_2. В соответствии с этим получим по два значения обобщенных координат q_1 и q_2:

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1); \ q_2^{(1)} = A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1); \\ q_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \ q_2^{(2)} = A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

$q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$ составляют *главное колебание* для частоты k_1, а $q_1^{(2)}$, $q_2^{(2)}$ — для частоты k_2. Каждое из главных колебаний является гармоническим для обеих обобщенных координат.

Система однородных линейных уравнений (65) дает возможность определить только отношение амплитуд. Для первого и второго главных колебаний соответственно получаем

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{c_{11} - a_{11} k_1^2}{c_{12} - a_{12} k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12} k_1^2}{c_{22} - a_{22} k_1^2}; \\ \beta_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -\frac{c_{11} - a_{11} k_2^2}{c_{12} - a_{12} k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12} k_2^2}{c_{22} - a_{22} k_2^2}. \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Отношения амплитуд в главных колебаниях β_1 и β_2 называют *коэффициентами формы*. Из (68) следует, что *коэффициенты формы равны отношениям обобщенных координат в главных колебаниях*:

$$\beta_1 = A_2^{(1)} / A_1^{(1)} = q_2^{(1)} / q_1^{(1)}; \ \beta_2 = A_2^{(2)} / A_1^{(2)} = q_2^{(2)} / q_1^{(2)}. \quad (70)$$

Коэффициенты формы β_1 и β_2 характеризуют формы главных колебаний. Они могут быть положительными и отрицательными. Если, например, $\beta_1 > 0$, то $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ имеют одинаковые фазы; если $\beta_1 < 0$, то их фазы отличаются на π.

Общее решение системы уравнений (63), учитывая (70), можно выразить в форме

$$\left.\begin{aligned} & q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ & q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \beta_1 q_1^{(1)} + \beta_2 q_1^{(2)} = \beta_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + \\ & + \beta_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Четыре произвольные постоянные $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, α_1, α_2 определяются из начальных условий.

Итак, собственные линейные колебания системы с двумя степенями свободы состоят из суммы двух главных гармонических колебаний с частотами k_1 и k_2.

Главные координаты

Если за новые обобщенные координаты системы выбрать $q_1^{(1)}$ и $q_1^{(2)}$, то главное колебание с частотой k_1 будет характеризоваться только обобщенной координатой $q_1^{(1)}$, а главное колебание с частотой k_2 — координатой $q_1^{(2)}$.

Обобщенные координаты, каждая из которых представляет только одно главное колебание, называются *главными координатами* системы. Произвольные обобщенные координаты через главные в соответствии с (71) должны выражаться их линейными комбинациями:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}; \quad q_2 = \beta_1 q_1^{(1)} + \beta_2 q_1^{(2)}. \tag{72}$$

В случаях равных частот любые обобщенные координаты являются главными. Для главных координат система уравнений должна распадаться на два отдельных, независимых уравнения, как в случае равных частот.

Определив обобщенные координаты $q_1^{(1)}$ и $q_1^{(2)}$, найдем главные координаты системы. Главные координаты можно также определить основываясь на рассмотрении преобразования кинетической и потенциальной энергий системы.

Для того чтобы система уравнений распалась на отдельные независимые уравнения, выражения потенциальной и кинетической энергий не должны содержать членов с произведениями переменных. Это можно положить в основу для отыскания главных координат. Действительно, пусть q_1 и q_2 — произвольные обобщенные координаты, а q_1^* и q_2^* — главные координаты.

Попытаемся получить равенства нулю членов с произведениями в разложениях кинетической и потенциальной энергий, приняв линейную зависимость между q_1, q_2 и q_1^*, q_2^*, т. е.

$$q_1 = \alpha_1 q_1^* + \alpha_2 q_2^*; \quad q_2 = \beta_1 q_1^* + \beta_2 q_2^*. \tag{72'}$$

Постоянные α_1 и α_2 включим в q_1^* и q_2^*, т. е. примем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Тогда неизвестные постоянные β_1 и β_2 можно определить из условий, что для главных координат

$$T = {}^1/_2\left(a_{11}^* \dot{q}_1^{*2} + a_{22}^* \dot{q}_2^{*2}\right); \quad \varPi = {}^1/_2\left(c_{11}^* q_1^{*2} + c_{22}^{*2} q_2^{*2}\right), \tag{73}$$

т. е. $a_{12}^* = c_{12}^* = 0$. Сохраним для неизвестных постоянных β_1, β_2 обозначения коэффициентов формы, так как в действительности они ими и являются.

Подставляя (72') в выражения кинетической и потенциальной энергий (57) и (60), получаем

$$\left.\begin{aligned} T = {}^1/_2 \{&(a_{11} + 2a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_1^2)\dot{q}_1^{*2} + 2[a_{11} + a_{12}(\beta_1 + \beta_2) + \\ &+ a_{22}\beta_1\beta_2]\dot{q}_1^*\dot{q}_2^* + (a_{11} + 2a_{12}\beta_2 + a_{22}\beta_2^2)\dot{q}_2^{*2}\}; \\ \varPi = {}^1/_2 \{&(c_{11} + 2c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_1^2)q_1^{*2} + 2[c_{11} + c_{12}(\beta_1 + \beta_2) + \\ &+ c_{22}\beta_1\beta_2]q_1^* q_2^* + (c_{11} + 2c_{12}\beta_2 + c_{22}\beta_2^2)q_2^{*2}\}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Из сравнения (73) и (74), используя условия $a_{12}^* = 0$, $c_{12}^* = 0$, имеем

$$\left.\begin{aligned} a_{12}^* &= a_{11} + a_{12}(\beta_1 + \beta_2) + a_{22}\beta_1\beta_2 = 0; \\ c_{12}^* &= c_{11} + c_{12}(\beta_1 + \beta_2) + c_{22}\beta_1\beta_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

а также формулы связи новых и старых коэффициентов инерции и жесткости

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^*=a_{11}+2a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_1^2,\ a_{22}^*=a_{11}+2a_{12}\beta_2+a_{22}\beta_2^2;\\ c_{11}^*=c_{11}+2c_{12}\beta_1+c_{22}\beta_1^2,\ c_{22}^*=c_{11}+2c_{12}\beta_2+c_{22}\beta_2^2.\end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Из (75) получаем

$$\beta_1\beta_2=\frac{a_{11}c_{12}-a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22}-a_{22}c_{12}};\ \ \beta_1+\beta_2=\frac{a_{22}c_{11}-a_{11}c_{22}}{a_{12}c_{22}-a_{22}c_{12}}. \quad (77)$$

Эти соотношения позволяют построить квадратное уравнение, корнями которого являются β_1 и β_2:

$$(a_{12}c_{22}-a_{22}c_{12})\beta^2-(c_{22}c_{11}-a_{11}c_{22})\beta+(a_{11}c_{12}-a_{12}c_{11})=0. \quad (78)$$

Можно доказать, что корни этого уравнения вещественны.

Таким образом, коэффициенты β_1 и β_2 можно определить двумя путями: как коэффициенты формы по формулам (69) или как корни квадратного уравнения (78).

Система уравнений малых колебаний (63) для главных координат q_1^*, q_2^* с учетом того, что $a_{12}^*=c_{12}^*=0$, распадается на два независимых уравнения:

$$a_{11}^*\ddot{q}_1^*+c_{11}^*q_1^*=0;\ \ a_{22}^*\ddot{q}_{22}^*+c_{22}^*q_2^*=0. \quad (79)$$

Их решения имеют вид

$$q_1^*=A_1^{(1)}\sin(k_1^*t+\alpha_1);\ \ q_2^*=A_2^{(2)}\sin(k_2^*t+\alpha_2), \quad (80)$$

где k_1^* и k_2^* — частоты главных колебаний. Они вычисляются по формулам

$$k_1^*=\sqrt{c_{11}^*/a_{11}^*};\ \ k_2^*=\sqrt{c_{22}^*/a_{22}^*}. \quad (81)$$

Используя (72′) и (80) для произвольных обобщенных координат q_1 и q_2, можно получить выражения (71).

Частоты изменения главных координат совпадают с частотами главных колебаний, т. е.

$$k_1^*=k_1;\ \ k_2^*=k_2, \quad (82)$$

так как частоты не зависят от выбора тех или иных обобщенных координат. Они определяются свойствами системы и потенциальным силовым полем, в котором движется система. В случае системы с двумя степенями свободы в справедливости (82) можно убедиться прямыми вычислениями с использованием формулы (76).

Кажется, что по (81) вычислять частоты проще, чем из уравнения частот (66), но предварительное отыскание главных координат представляет собой задачу, равноценную по трудности решению уравнения частот. Главные координаты удобны для теоретических исследований, особенно для исследования вынужденных колебаний без учета сопротивления.

Итак, каждая из главных координат системы изменяется по гармоническому закону, имея определенную частоту, амплитуду и начальную фазу, так же как и в случае системы с одной степенью свободы. Этот результат остается справедливым и для собственных колебаний системы с любым конечным числом степеней свободы. Некоторые частоты могут оказаться одинаковыми, но это не приводит к резонансным явлениям.

Влияние линейного сопротивления на собственные колебания

Пусть q_1 и q_2 — главные координаты системы. Тогда квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергий содержат только квадраты своих переменных:

$$T = {}^1/_2\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right); \quad \Pi = {}^1/_2\left(c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2\right). \tag{83}$$

Диссипативная функция в общем случае сохраняет член с произведением даже для случая главных координат:

$$\Phi = {}^1/_2\left(\mu_{11}\dot{q}_1^2 + 2\mu_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mu_{22}\dot{q}_2^2\right). \tag{84}$$

Подставляя эти значения T, Π и Φ в уравнения Лагранжа (56), получаем следующую систему уравнений собственных колебаний с учетом линейного сопротивления:

$$\left.\begin{aligned}&\left(a_{11}\ddot{q}_1 + \mu_{11}\dot{q}_1 + c_{11}q_1\right) + \mu_{12}\dot{q}_2 = 0;\\ &\mu_{12}\dot{q}_1 + \left(a_{22}\ddot{q}_1 + \mu_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2\right) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Коэффициенты системы уравнений удовлетворяют условиям

$$a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ c_{11} > 0,\ c_{22} > 0;\ \mu_{11} > 0,\ \mu_{22} > 0,\ \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 > 0. \tag{86}$$

Использование главных координат не приводит к распадению системы уравнений на независимые уравнения, но система уравнений становится несколько проще. Решение системы (85) можно искать в форме

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t}; \quad q_2 = C_2 e^{\lambda t}. \tag{87}$$

Подставляя (87) в систему уравнений (85) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получаем

$$\left.\begin{aligned}&C_1\left(a_{11}\lambda^2 + \mu_{11}\lambda + c_{11}\right) + C_2\mu_{12}\lambda = 0;\\ &C_1\mu_{12}\lambda + C_2\left(a_{22}\lambda^2 + \mu_{22}\lambda + c_{22}\right) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Для того чтобы эта система однородных линейных уравнений относительно неизвестных C_1, C_2 имела ненулевые решения, должен быть равен нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + \mu_{11}\lambda + c_{11} & \mu_{12}\lambda \\ \mu_{12}\lambda & a_{22}\lambda^2 + \mu_{22}\lambda + c_{22}\end{vmatrix} = 0.$$

Получено характеристическое уравнение для λ, являющееся уравнением четвертой степени. В развернутом виде характеристическое уравнение имеет форму

$$a_{11}a_{22}\lambda^4+(a_{11}\mu_{22}+a_{22}\mu_{11})\lambda^3+(a_{11}c_{22}+a_{22}c_{11}+\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}^2)\lambda^2+ \\ +(\mu_{11}c_{22}+\mu_{22}c_{11})\lambda+c_{11}c_{22}=0. \qquad (89)$$

Каждому из четырех его корней λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 соответствуют определенные значения постоянных C_1 и C_2.

Из уравнений (88) определяются не величины C_1 и C_2 для каждого корня λ_i, а только их отношения:

$$\frac{C_2^{(i)}}{C_1^{(i)}}=\frac{a_{11}\lambda_i^2+\mu_{11}\lambda_i+c_{11}}{\mu_{12}\lambda_i}=-\frac{\mu_{12}\lambda_i}{a_{22}\lambda_i^2+\mu_{22}\lambda_i+c_{22}},\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (90)$$

Индекс i указывает, для какого корня λ_i берутся постоянные C_1 и C_2.

Не проводя подробного исследования, отметим, что при выполнении условий (86) возможны следующие варианты корней характеристического уравнения (89) и соответственно решений системы дифференциальных уравнений (85).

1. Корни комплексные. Они попарно сопряженные, так как коэффициенты уравнения вещественны и имеют отрицательные вещественные части:

$$\lambda_{1,2}=-n_1\pm k_1 i;\quad \lambda_{2,3}=-n_2\pm k_2 i.$$

Этот случай получается при малом сопротивлении. Подставляя эти значения λ в (87), после несложных преобразований получаем

$$q_1=e^{-n_1 t}\left[B_1^{(1)}\cos k_1 t+D_1^{(1)}\sin k_1 t\right]+e^{-n_2 t}\left[B_1^{(2)}\cos k_2 t+\right. \\ \left.+D_1^{(2)}\sin k_2 t\right]=A_1^{(1)}e^{-n_1 t}\sin(k_1 t+\alpha_1^{(1)})+A_1^{(2)}e^{-n_2 t}\sin(k_2 t+\alpha_1^{(2)});$$

$$q_2=e^{-n_1 t}\left[B_2^{(1)}\cos k_1 t+D_2^{(1)}\sin k_1 t\right]+e^{-n_2 t}\left[B_2^{(2)}\cos k_2 t+\right. \\ \left.+D_2^{(2)}\sin k_2 t\right]=A_2^{(1)}e^{-n_1 t}\sin(k_1 t+\alpha_2^{(1)})+A_2^{(2)}e^{-n_2 t}\sin(k_2 t+\alpha_2^{(2)}).$$

Здесь все B, D, A, α — постоянные величины.

Каждая главная координата является суммой двух затухающих колебаний. Четыре из восьми постоянных $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)}$ определяются из начальных условий; другие четыре — через величины $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$.

2. Корни действительные. Их можно представить в форме

$$\lambda_{1,2}=-n_1\pm k_1;\quad \lambda_{3,4}=-n_2\pm k_2,$$

причем $k_1<n_1$, $k_2<n_2$. Для главных координат q_1 и q_2 в этом случае

$$q_1=e^{-n_1 t}\left(C_1^{(1)}e^{k_1 t}+C_1^{(2)}e^{-k_1 t}\right)+e^{-n_2 t}\left(C_1^{(3)}e^{k_2 t}+C_1^{(4)}e^{-k_2 t}\right);$$

$$q_2=e^{-n_1 t}\left(C_2^{(1)}e^{k_1 t}+C_2^{(2)}e^{-k_1 t}\right)+e^{-n_2 t}\left(C_2^{(3)}e^{k_2 t}+C_2^{(4)}e^{-k_2 t}\right).$$

Движение непериодическое, затухающее. Оно получается при большом сопротивлении.

3. Два корня действительные, а два — комплексно-сопряженные:

$$\lambda_{1,2}=-n_1\pm k_1;\quad \lambda_{3,4}=-n_2\pm k_2 i.$$

Для q_1 и q_2 получаем

$$q_1=e^{-n_1 t}\left(C_1^{(1)}e^{k_1 t}+C_1^{(2)}e^{-k_1 t}\right)+A_1^{(2)}e^{-n_2 t}\sin\left(k_2 t+\alpha_1^{(2)}\right);$$
$$q_2=e^{-n_1 t}\left(C_2^{(1)}e^{k_1 t}+C_2^{(2)}e^{-k_1 t}\right)+A_2^{(2)}e^{-n_2 t}\sin\left(k_2 t+\alpha_2^{(2)}\right).$$

В этом случае имеем наложение затухающих колебаний на затухающее движение. Неглавные обобщенные координаты линейно выражаются через главное в соответствии с (72). Следовательно, для них каждая из обобщенных координат является линейной комбинацией рассмотренных трех видов движений. Аналогичное положение будет в случае любого конечного числа степеней свободы.

Вынужденные колебания без учета сопротивления

Рассмотрим вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы без учета сопротивления под действием гармонических возмущающих обобщенных сил, отнесенных к главным координатам. Гармонические возмущающие силы для других координат можно привести к гармоническим возмущающим силам для главных координат, если частоты первоначальных возмущающих сил одинаковы. Действие возмущающих сил, имеющих разные частоты, следует рассматривать по отдельности, используя свойство суперпозиции решений линейных дифференциальных уравнений.

Итак, для главных координат q_1 и q_2 из уравнений Лагранжа (56) получим следующую систему уравнений вынужденных колебаний:

$$a_{11}\ddot{q}_1+c_{11}q_1=H_1\sin(pt+\delta);\quad a_{22}\ddot{q}_2+c_{22}q_2=H_2\sin(pt+\delta),$$

или после деления первого уравнения на a_{11}, второго — на a_{22}

$$\ddot{q}_1+k_1^2 q_1=h_1\sin(pt+\delta);\quad \ddot{q}_2+k_2^2 q_2=h_2\sin(pt+\delta). \qquad (91)$$

Здесь введены обозначения для постоянных: $k_1^2=c_{11}/a_{11}$, $k_2^2=c_{22}/a_{22}$ — квадраты собственных частот; $h_1=H_1/a_{11}$, $h_2=$ $=H_2/a_{22}$ — относительные амплитуды возмущающих сил.

Каждое из уравнений системы (91) можно интегрировать независимо от другого уравнения. Общие решения этих уравнений, согласно теории дифференциальных уравнений, являются суммой общих решений уравнений без правых частей (собственные колебания) и частных решений уравнений с правыми частями (вынужденные колебания):

$$q_1=q_{1\text{с}}+q_{1\text{в}};\quad q_2=q_{2\text{с}}+q_{2\text{в}}.$$

Свойства собственных колебаний $q_{1\text{с}}$ и $q_{2\text{с}}$ уже рассмотрены. Они являются гармоническими колебаниями с частотами k_1

и k_2. Рассмотрим вынужденные колебания $q_{1\text{в}}$ и $q_{2\text{в}}$. Возможны следующие характерные случаи.

1. Частота возмущающей силы p не совпадает ни с одной из частот собственных колебаний k_1 и k_2. Тогда частные решения можно искать в форме

$$q_{1\text{в}}=C_1\sin(pt+\delta);\quad q_{2\text{в}}=C_2\sin(pt+\delta).$$

Подставляя это в (91) и приравнивая нулю коэффициенты при синусах в полученных тождествах, имеем следующие уравнения для определения постоянных C_1 и C_2:

$$-C_1p^2+k_1^2C_1=h_1;\quad -C_2p^2+k_2^2C_2=h_2.$$

Отсюда

$$C_1=h_1/(k_1^2-p^2);\quad C_2=h_2/(k_2^2-p^2). \tag{92}$$

Вынужденные колебания через главные координаты выражаются в форме

$$q_{1\text{в}}=\frac{h_1}{k_1^2-p^2}\sin(pt+\delta);\quad q_{2\text{в}}=\frac{h_2}{k_2^2-p^2}\sin(pt+\delta). \tag{93}$$

Если обобщенные координаты не являются главными, то вынужденные колебания, согласно формулам перехода (72), будут линейной комбинацией (93).

2. Частота возмущающей силы совпадает с одной из частот собственных колебаний, например $p=k_1$. Это случай резонанса на этой частоте. Решение для вынужденных колебаний можно искать в виде

$$q_{1\text{в}}=C_1t\cos(pt+\delta);\quad q_{2\text{в}}=C_2\sin(pt+\delta). \tag{94}$$

Подставляя (94) в систему уравнений (91), получаем уравнения для определения постоянных C_1 и C_2. Из этих уравнений находим

$$C_1=-h_1/(2k_1);\quad C_2=h_2/(k_2^2-p^2). \tag{95}$$

Вынужденные колебания для главных координат выражаются в форме

$$q_{1\text{в}}=-\frac{h_1t}{2k_1}\cos(pt+\delta)=\frac{h_1t}{2k_1}\sin\left(pt+\delta-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$q_{2\text{в}}=\frac{h_2}{k_2^2-p^2}\sin(pt+\delta). \tag{96}$$

По одной главной координате получается резонанс.

Переход к другим, не главным, обобщенным координатам по формулам перехода (72) приводит к резонансу по обеим координатам.

При $p=k_1=k_2$ получается резонанс по обеим главным координатам. Для системы с двумя степенями свободы резонанс наступает при совпадении частоты возмущающей силы с одной из двух частот собственных колебаний.

Для системы с n степенями свободы для появления резонанса достаточно совпадения частоты возмущающей силы с одной из n частот собственных колебаний.

Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания

Так как использование главных координат при учете линейного сопротивления не ведет к существенным упрощениям системы дифференциальных уравнений, но в то же время нарушает симметрию, то целесообразно использовать произвольные обобщенные координаты q_1 и q_2. В этом случае кинетическая и потенциальная энергии выражаются формулами (57) и (60), а диссипативная функция — (62).

Обобщенные возмущающие силы считаем гармоническими:

$$Q_1^B = H_1 \sin(pt+\delta); \quad Q_2^B = H_2 \sin(pt+\delta).$$

Подставляя эти значения указанных величин в уравнения Лагранжа (56), получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений вынужденных колебаний с учетом линейного сопротивления:

$$\begin{aligned} &(a_{11}\ddot{q}_1 + \mu_{11}\dot{q}_1 + c_{11}q_1) + (a_{12}\ddot{q}_2 + \mu_{12}\dot{q}_2 + c_{12}q_2) = H_1 \sin(pt+\delta); \\ &(a_{12}\ddot{q}_1 + \mu_{12}\dot{q}_1 + c_{12}q_1) + (a_{22}\ddot{q}_2 + \mu_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2) = H_2 \sin(pt+\delta). \end{aligned} \tag{97}$$

Решение системы уравнений (97) для каждой координаты является суммой собственных движений q_{1c}, q_{2c} и вынужденных колебаний $q_{1в}$, $q_{2в}$:

$$q_1 = q_{1c} + q_{1в}; \quad q_2 = q_{2c} + q_{2в}.$$

В зависимости от корней характеристического уравнения для однородной системы уравнений, которая получается из (97) путем отбрасывания правых частей, они могут быть линейной комбинацией затухающих колебаний с затухающими непериодическими движениями или этими движениями по отдельности.

Рассмотрим вынужденные колебания $q_{1в}$, $q_{2в}$. Они являются частными решениями системы уравнений (97). В этом случае их следует искать в форме

$$\left.\begin{aligned} q_{1в} &= B_1 \sin(pt+\delta) + D_1 \cos(pt+\delta) = A_1 \sin(pt+\delta-\varepsilon_1); \\ q_{2в} &= B_2 \sin(pt+\delta) + D_2 \cos(pt+\delta) = A_2 \sin(pt+\delta-\varepsilon_2). \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Постоянные B_1, D_1, B_2, D_2 связаны с постоянными A_1, A_2, ε_1, ε_2 соотношениями

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cos\varepsilon_1, \quad D_1 = -A_1 \sin\varepsilon_1; \\ B_2 &= A_2 \cos\varepsilon_2, \quad D_2 = -A_2 \sin\varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

и соответственно амплитуды A_1, A_2 и сдвиги фаз ε_1, ε_2

$$A_1=\sqrt{B_1^2+D_1^2};\ \mathrm{tg}\,\varepsilon_1=-D_1/B_1;\quad A_2=\sqrt{B_2^2+D_2^2};\ \mathrm{tg}\,\varepsilon_2=-D_2/B_2. \qquad (100)$$

Подставим (98) в систему уравнений (97). Получим тождества, справедливые для любого момента времени. Если в каждом тождестве собрать отдельно члены с синусами и косинусами, то коэффициенты при них должны быть равны нулю. Это дает систему четырех уравнений для определения неизвестных B_1, B_2, D_1, D_2:

$$\left.\begin{aligned}
&B_1(c_{11}-a_{11}p^2)-D_1\mu_{11}p+B_2(c_{12}-a_{12}p^2)-\\
&-D_2\mu_{12}p=H_1;\\
&B_1\mu_{11}p+D_1(c_{11}-a_{11}p^2)+B_2\mu_{12}p+D_2(c_{12}-a_{12}p^2)=0;\\
&B_1(c_{12}-a_{12}p^2)-D_1\mu_{12}p+B_2(c_{22}-a_{22}p^2)-\\
&-D_2\mu_{22}p=H_2;\\
&B_1\mu_{12}p+D_1(c_{12}-a_{12}p^2)+B_2\mu_{22}p+D_2(c_{22}-a_{22}p^2)=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

Можно доказать, что это система неоднородных линейных уравнений, т. е. ее определитель не равен нулю ни при каких значениях p. Решая систему уравнений (101), полностью определим постоянные B_1, B_2, D_1, D_2, а следовательно, A_1, A_2, ε_1, ε_2.

Не выполняя решения системы уравнений (101), можно сделать выводы о влиянии линейного сопротивления на вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы. Как и для случая системы с одной степенью свободы, вынужденные колебания являются незатухающими гармоническими колебаниями и происходят с частотой возмущающей силы. Они не зависят от начальных условий. При резонансе амплитуды вынужденных колебаний остаются постоянными в отличие от случая отсутствия сопротивления.

В случае системы с n степенями свободы выводы о влиянии линейного сопротивления на вынужденные колебания остаются прежними.

Более сложные колебания совершают системы с бесконечным числом степеней свободы, как, например, различные типы сплошных сред. В некоторых случаях их можно с достаточной точностью заменить системой с конечным числом степеней свободы.

Для сплошных сред дифференциальные уравнения движения будут уравнениями в частных производных в отличие от систем с конечным числом степеней свободы, для которых дифференциальные уравнения являются обыкновенными.

Пример 1. Два груза массами m_1 и m_2 прикреплены к пружинам с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 131, *а*). Исследовать колебания системы.

Решение. Если рассматривать движения грузов только по вертикали, то видно, что система имеет две степени свободы. Примем за обобщенные координаты системы смещения грузов x_1 и x_2, отсчитываемые от положений статического равновесия грузов вниз. Это позволяет исключить силы тяжести грузов из уравнений, так как они в положении статического равновесия уравновешиваются силами упругости пружин.

Вычисляем кинетическую энергию системы относительно инерциальной системы отсчета. Имеем

$$T = {}^1/_2 m_1 \dot{x}_1^2 + {}^1/_2 m_2 \dot{x}_2^2.$$

Сравнивая ее с разложением кинетической энергии (57), получаем значения коэффициентов инерции:

$$a_{11} = m_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{22} = m_2.$$

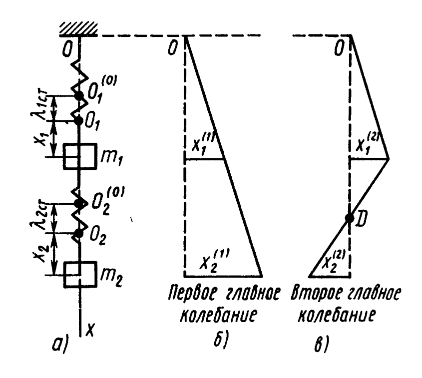


Рис. 131

Для определения потенциальной энергии системы следует вычислить работу, которую совершают разности сил упругости и сил тяжести грузов при перемещении системы из рассматриваемого положения в положение равновесия. Эти разности сил изменяются в зависимости от смещения грузов из статических положений равновесия по линейному закону, аналогично тому, как изменяется сила упругости пружины при деформации из недеформированного состояния.

При определении потенциальной энергии можно вычислять работу разности сил последовательно. Сначала вычисляем ее при перемещении груза массой m_1 в состояние его статического равновесия на величину x_1. Соответствующая работа равна $\frac{c_1}{2} x_1^2$. Затем переместим груз массой m_2 в положение его статического равновесия. Для этого потребуется переместить его на величину $(x_2 - x_1)$, так как на расстояние x_1 он переместился вместе с грузом массой m_1. Этому перемещению соответствует работа $\frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2$.

Таким образом, для потенциальной энергии системы имеем

$$\Pi = \frac{c_1}{2} x_1^2 + \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2.$$

Вычисляем коэффициенты жесткости c_{11}, c_{12}, c_{22}:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \quad c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2}\right)_0 = c_1 + c_2;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1); \quad c_{22} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2}\right)_0 = c_2;$$

$$c_{12} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 = -c_2.$$

Система дифференциальных уравнений малых собственных колебаний (63) примет форму

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 - c_2 x_2 = 0; \quad -c_2 x_1 + m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 = 0.$$

Уравнение частот, согласно (66), имеет вид

$$[(c_1 + c_2) - m_1 k^2](c_2 - m_2 k^2) - c_2^2 = 0.$$

Для упрощения вычислений предположим, что пружины одинаковы, т. е. $c_1 = c_2 = c$. Тогда уравнение частот примет форму

$$(2c - m_1 k^2)(c - m_2 k^2) - c^2 = 0,$$

или

$$k^4 - \frac{(2m_2 + m_1) c}{m_1 m_2} k^2 + \frac{c^2}{m_1 m_2} = 0.$$

Его решения:

$$k_{1,2}^2=\frac{(2m_2+m_1)c}{2m_1m_2}\mp\sqrt{\frac{(2m_2+m_1)^2c^2}{4m_1^2m_2^2}-\frac{c^2}{m_1m_2}}.$$

Оба решения, как и следовало ожидать, оказались действительными и положительными.

Если масса m_1 очень велика по сравнению с массой m_2, то, приняв $m_2/m_1=0$, получаем

$$k_1=0;\ k_2=\sqrt{c/m_2},$$

т. е. груз массой m_1 не колеблется, а груз массой m_2 колеблется так, как если бы он был прикреплен с помощью одной пружины к неподвижному телу.

Полагая массу m_2 бесконечно большой по сравнению с m_1, имеем $k_1=0$, $k_2=\sqrt{2c/m_1}$. В этом случае груз, имеющий бесконечно большую массу, не колеблется, а груз массой m_1 колеблется, как если бы он был прикреплен к неподвижному телу на двух пружинах.

Рассмотрим случай, при котором $m_1=m_2=m$. Система уравнений собственных колебаний примет вид

$$m\ddot{x}_1+2cx_1-cx_2=0;\ m\ddot{x}_2-cx_1+cx_2=0.$$

Уравнение частот соответственно выразится в форме

$$(2c-mk^2)(c-mk^2)-c^2=0,$$

или

$$m^2k^4-3mck^2+c^2=0.$$

Из уравнения частот определяем квадраты частот главных колебаний:

$$k_1^2=\frac{1}{2}\frac{c}{m}(3-\sqrt{5});\ k_2^2=\frac{1}{2}\frac{c}{m}(3+\sqrt{5}).$$

Коэффициенты формы в этом случае, согласно (69), имеют значения

$$\beta_1=-\frac{c_{12}-a_{12}k_1^2}{c_{22}-a_{22}k_1^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\approx1{,}62;$$

$$\beta_2=-\frac{c_{12}-a_{12}k_2^2}{c_{22}-a_{22}k_2^2}=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx-0{,}62.$$

Первое главное колебание с частотой k_1 состоит из $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}=\beta_1x_1^{(1)}$. Так как $\beta_1>0$, то знаки смещений $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ в первом главном колебании одинаковы и колебания грузов совпадают по фазе. Второе главное колебание с частотой k_2 включает в себя смещения $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}=\beta_2x_1^{(2)}$. Так как $\beta_2<0$, то знаки смещений $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ противоположны. Колебания грузов отличаются по фазе на π.

Формы главных колебаний изобразим графически. Для этого отложим смещения грузов в главных колебаниях вправо по горизонтали положительные, влево — отрицательные. По вертикали отложим расстояния грузов от верхнего конца первой пружины. Для первого главного колебания смещение первого груза изобразится горизонтальным отрезком $x_1^{(1)}$; смещение второго груза — горизонтальным отрезком $x_2^{(1)}$ (рис. 131, *б*). Оба отрезка направлены вправо, так как у них одинаковые знаки, например, положительные.

Для второго главного колебания отрезок $x_1^{(2)}$ следует отложить вправо, предположив, что смещение $x_1^{(2)}$ положительно, тогда $x_2^{(2)}$ надо отложить влево, так как $x_2^{(2)}$ будет отрицательным (рис. 131, *в*).

Тогда D пружины при втором главном колебании остается все время неподвижной. Такие точки называются **у з л а м и**. Второе главное колебание имеет один узел. Первое главное колебание узлов не имеет.

Пример 2. Используем условия примера 1 для иллюстрации эффекта гашения вынужденных колебаний первого груза с массой m_1. Для этого дополнительно предположим, что к первому грузу приложена гармоническая возмущающая сила $F(t)=H\sin(pt+\delta)$, направленная по вертикали вниз. При этом H, p и δ являются постоянными.

Определим условия, при выполнении которых первый груз не будет совершать вынужденных колебаний.

Решение. Левые части дифференциальных уравнений малых колебаний системы останутся такими же, как и в первом примере. В правой части первого уравнения следует вместо нуля подставить обобщенную силу

$$Q_1^{\text{в}} = \frac{F\delta x_1}{\delta x_1} = F = H\sin(pt+\delta).$$

Ко второму грузу возмущающих сил не приложено. Поэтому в правой части второго уравнения так и останется нуль. Получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}+(c_1+c_2)x_1-c_2x_2=H\sin(pt+\delta);\\ -c_2x_2+m_2\ddot{x}_2+c_2x_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{а})$$

Решения для вынужденных колебаний (частные решения) следует искать в форме

$$x_{1\text{в}} = A_1\sin(pt+\delta); \quad x_{2\text{в}} = A_2\sin(pt+\delta). \qquad (\text{б})$$

Отсюда

$$\ddot{x}_{1\text{в}} = -A_1p^2\sin(pt+\delta); \quad \ddot{x}_{2\text{в}} = -A_2p^2\sin(pt+\delta). \qquad (\text{б}')$$

Подставляя значения (б) и (б′) в (а), после сокращения на $\sin(pt+\delta)$ получим следующую систему уравнений для амплитуд A_1 и A_2:

$$\left.\begin{aligned} A_1\left[-m_1p^2+(c_1+c_2)\right]+A_2(-c_2)=H;\\ A_1(-c_2)+A_2(-m_2p^2+c_2)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{в})$$

Из системы (в) определяем A_1 по правилу Крамера. Имеем

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} H & -c_2 \\ 0 & -m_2p^2+c^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = H\frac{c_2-m_2p^2}{\Delta},$$

где определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -m_1p^2+(c_1+c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2-m_2p^2 \end{vmatrix} = \left[(c_1+c_2)-m_1p^2\right](c_2-m_2p^2)-c_2^2.$$

Амплитуда вынужденных колебаний первого груза $A_1=0$, если $c_2-m_2p^2=0$. В этом случае $\Delta=-c_2^2\neq 0$.

Таким образом, $A_1=0$, а следовательно, и $x_{1\text{в}}=0$, если жесткость пружины c_2 и массу груза m_2 подобрать так, чтобы выполнялось условие $c_2-m_2p^2=0$. При этом масса m_1 и жесткость c_1 могут быть любыми. Вынужденные колебания первого груза будут полностью погашены. Для этого только требуется, чтобы круговая частота возмущающей силы $p=\sqrt{\dfrac{c_2}{m_2}}$.

ГЛАВА 8

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

Изучение движения тела с одной закрепленной точкой имеет важное значение. Во-первых, телом с одной закрепленной точкой, имеющим широкое практическое применение, является гироскоп — тело осесимметричное. Во-вторых, движение свободного

твердого тела можно представить состоящим из двух движений: поступательного вместе с какой-либо точкой тела и вращения его вокруг этой точки. В качестве точки, вместе с которой рассматривается поступательное движение, выбирают центр масс тела, так как для него имеется теорема о движении центра масс. К изучению движения тела вокруг, например, центра масс можно применить общие положения о движении тела вокруг неподвижной точки.

§ 1. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Имеем твердое тело, одна из точек которого закреплена. Движение тела рассматривается относительно некоторой системы координат $Oxyz$ (рис. 132), начало которой находится в закрепленной точке тела. Вращение тела вокруг неподвижной точки в каждый момент времени есть вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$, направленной по этой оси. Для кинетического момента $\bar{K}_O$ относительно неподвижной точки, согласно его определению, имеем

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k, \tag{1}$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор какой-либо точки тела; m_k — масса точки; $\bar{v}_k$ — скорость этой точки относительно выбранной системы отсчета. Для сплошного тела роль точек выполняют малые элементарные частицы тела, на N которых оно разбито.

Из кинематики известно, что скорости точек тела при его вращении вокруг неподвижной точки вычисляются по векторной формуле Эйлера

$$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \bar{i}(\omega_y z_k - \omega_z y_k) +$$
$$+ \bar{j}(\omega_z x_k - \omega_x z_k) + \bar{k}(\omega_x y_k - \omega_y x_k), \tag{2}$$

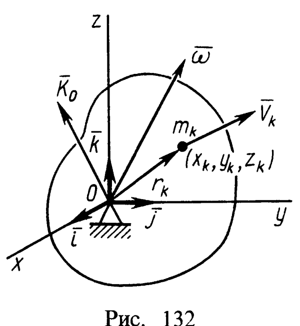


Рис. 132

которую в проекциях на оси координат, учитывая, что векторное произведение можно представить в виде определителя, выразим в форме

$$v_{kx} = \omega_y z_k - \omega_z y_k; \qquad v_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k;$$
$$v_{kz} = \omega_x y_k - \omega_y x_k, \tag{2'}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точки тела с массой m_k.

Для проекции кинетического момента на ось Ox с учетом (2′) имеем

$$K_x=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(y_k v_{kz}-z_k v_{ky}\right)=\sum_{k=1}^{N} m_k\left[y_k\left(\omega_x y_k-\omega_y x_k\right)-\right.$$
$$\left.-z_k\left(\omega_z x_k-\omega_x z_k\right)\right]=\omega_x\sum_{k=1}^{N} m_k\left(y_k^2+z_k^2\right)-$$
$$-\omega_y\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k-\omega_z\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k. \qquad (1')$$

Проекции угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z вынесены за знаки сумм, так как они не зависят от точек тела, по которым ведется суммирование. Суммы в (1′) представляют собой соответственно осевой J_x и центробежные J_{xy}, J_{xz} моменты инерции. С учетом этого для K_x и по аналогии для K_y и K_z получаем

$$\left.\begin{aligned} K_x&=J_x\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z;\\ K_y&=-J_{yx}\omega_x+J_y\omega_y-J_{yz}\omega_z;\\ K_z&=-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y+J_z\omega_z.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

По формулам (3) вычисляются проекции на оси координат кинетического момента тела относительно его закрепленной точки. Эти проекции являются линейными функциями проекций угловой скорости вращения тела на те же оси координат. Кинетический момент $\bar{K}_O$ по проекциям определяется формулой

$$\bar{K}_O=K_x\bar{i}+K_y\bar{j}+K_z\bar{k}. \qquad (1'')$$

Проекции на оси координат кинетического момента по формулам (3) можно вычислить как для осей, относительно которых рассматривается вращение тела (неподвижные оси), так и любых других подвижных осей, например скрепленных с вращающимся телом. Для неподвижных осей осевые и центробежные моменты инерции изменяются при вращении тела и, следовательно, зависят от времени вследствие изменения положения тела относительно этих осей. Для подвижных осей, скрепленных с телом, моменты инерции являются постоянными, не зависящими от времени, так как положение тела относительно этих осей не изменяется при его вращении. В случае проецирования кинетического момента на подвижные оси координат следует иметь в виду, что кинетический момент вычисляется для движения тела относительно неподвижных осей.

Если применить тензор инерции

$$J=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z\end{pmatrix}$$

и учесть правило умножения тензора на вектор-столбец $\bar{\omega}$, то (3) можно кратко выразить формулой

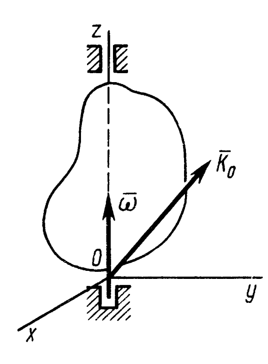


Рис. 133

$$\bar{K}_O = J\bar{\omega}.$$

Формулы (3) упрощаются для проекций кинетического момента на главные оси инерции для неподвижной точки O. Для таких осей координат $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ и из (3) получаем:

$$K_x = J_x\omega_x; \quad K_y = J_y\omega_y; \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{4}$$

В этом случае проекции кинетического момента вычисляются так же, как и в случае, если бы каждая из главных осей инерции была неподвижной осью вращения тела.

Главные оси инерции для неподвижной точки O обычно подвижные оси, скрепленные с самим вращающимся телом. Только такие оси могут быть главными в течение всего времени вращения тела. Другие подвижные или неподвижные оси могут быть главными только в отдельные моменты времени.

Частный случай. Если имеем тело, которое вращается вокруг неподвижной оси Oz (рис. 133), то в этом случае вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения и его проекции на две другие оси, перпендикулярные оси вращения, равны нулю, т. е. $\omega_x = \omega_y = 0$. Так как вращение вокруг неподвижной оси есть частный случай вращения тела вокруг неподвижной точки, то по формулам (3) в этом случае имеем:

$$K_x = -J_{xy}\omega_z; \quad K_y = -J_{yz}\omega_z; \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{5}$$

Если ось вращения Oz является главной осью инерции для ее точки O, то $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и из (5) получаем:

$$K_x = 0; \quad K_y = 0; \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{5'}$$

Кинетический момент для случая главной оси направлен по оси вращения. В других случаях он не направлен по оси вращения. Ось вращения является главной осью инерции для всех своих точек, если она является главной центральной осью инерции.

§ 2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

В соответствии с определением кинетической энергии имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k \cdot \bar{v}_k. \tag{6}$$

Если заменить один из векторов скорости $\bar{v}_k$ его значением из (2), то получим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)\cdot\bar{v}_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_k). \qquad (6')$$

В смешанном произведении трех векторов можно переставлять сомножители в круговом порядке, т. е.

$$\bar{v}_k\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)=\bar{r}_k\cdot(\bar{v}_k\times\bar{\omega})=\bar{\omega}\cdot(\bar{r}_k\times\bar{v}_k).$$

С учетом этого после вынесения вектора $\bar{\omega}$ за знак суммы получим

$$T={}^1/_2\,\bar{\omega}\cdot\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k={}^1/_2\,\bar{\omega}\cdot\bar{K}_O, \qquad (7)$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k=\bar{K}_O.$$

Итак, *кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равна половине скалярного произведения угловой скорости вращения тела и кинетического момента относительно закрепленной точки.*

Скалярное произведение можно представить в двух формах:

$$T={}^1/_2\,\bar{\omega}\cdot\bar{K}_O={}^1/_2\,\omega K_O\cos(\bar{\omega},\widehat{\ }\bar{K}_O)=$$
$$={}^1/_2\,(\omega_x K_x+\omega_y K_y+\omega_z K_z). \qquad (7')$$

Так как кинетическая энергия может иметь только положительные значения, то из (7′) следует $\cos(\bar{\omega},\widehat{\ }\bar{K}_O)>0$, т. е. угол между мгновенной осью, по которой направлен вектор угловой скорости, и кинетическим моментом относительно закрепленной точки всегда острый.

Если в (7′) величины K_x, K_y, K_z заменить их значениями из (3), то получим

$$T={}^1/_2\,(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2-2J_{yz}\omega_y\omega_z-J_{zx}\omega_z\omega_x-2J_{xy}\omega_x\omega_y), \qquad (8)$$

т. е. *кинетическая энергия тела с одной закрепленной точкой является квадратичной формой проекций угловой скорости на оси координат.*

В матричной форме, учитывая (1′), кинетическую энергию можно представить формулой

$$T={}^1/_2\,\bar{\omega}(J\bar{\omega}).$$

Если оси координат $Oxyz$ являются главными осями инерции для закрепленной точки O, то $J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0$ и (8) примет вид

$$T={}^1/_2\,(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2). \qquad (9)$$

Эта формула является обобщением выражения кинетической энергии, полученного при рассмотрении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Согласно (9), кинетическая энергия при вращении тела вокруг неподвижной точки

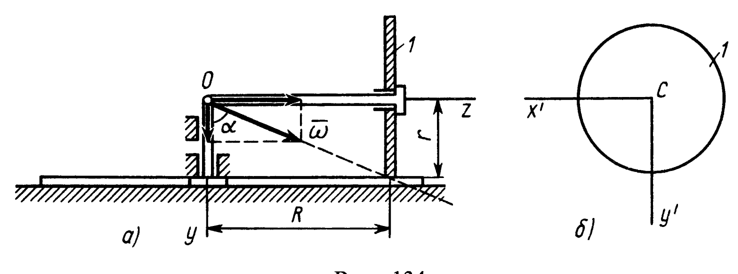


Рис. 134

получается так же, как при одновременном вращении вокруг трех неподвижных главных осей инерции, проходящих через эту точку.

Проверкой можно убедиться, что как в общем случае, так и в случае главных осей инерции справедливы формулы

$$K_x = \partial T/\partial\omega_x;\quad K_y = \partial T/\partial\omega_y;\quad K_z = \partial T/\partial\omega_z.$$

Для случая вращения тела вокруг неподвижной оси

$$K_z = \partial T/\partial\omega_z.$$

Пример. Диск *1*, имея закрепленную точку O (рис. 134, *а*), катится без скольжения по плоскости.

Вычислить кинетическую энергию диска.

Решение. Выберем за подвижные оси координат главные оси инерции для точки O, скрепленные с диском. Имеем

$$T = {}^1\!/_2\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2\right).$$

Мгновенная ось для диска *1*, по которой направлена угловая скорость $\bar{\omega}$, проходит через неподвижную точку O и точку соприкосновения диска с неподвижной плоскостью. Главными осями инерции диска являются ось симметрии Oz и две любые оси Ox и Oy, перпендикулярные ей в силу симметрии диска. Для этих осей имеем:

$$\omega_x = 0;\quad \omega_y = \omega\cos\alpha = \omega\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}};\quad \omega_z = \omega\sin\alpha = \omega\frac{R}{\sqrt{r^2+R^2}}.$$

Момент инерции

$$J_z = mr^2/2.$$

Моменты инерции относительно осей Ox и Oy вычисляем с использованием теоремы Штейнера. Имеем

$$J_x = J_{Cx'} + mR^2;\quad J_y = J_{Cy'} + mR^2.$$

Для диска (рис. 134, *б*)

$$J_{Cx'} = J_{Cy'} = mr^2/4.$$

Используя эти значения моментов инерции, получаем

$$J_x = m\left(r^2/4 + R^2\right);\quad J_y = m\left(r^2/4 + R^2\right).$$

Для кинетической энергии с учетом $\omega_x = 0$ имеем

$$T = \frac{m\omega^2}{2}\left[\left(r^2+4R^2\right)\frac{r^2}{4\left(r^2+R^2\right)} + \frac{2r^2}{4}\frac{R^2}{r^2+R^2}\right] =$$

$$= \frac{m\omega^2 r^2}{8\left(r^2+R^2\right)}\left(r^2+4R^2+2R^2\right) = \frac{m\omega^2 r^2}{8\left(r^2+R^2\right)}\left(r^2+6R^2\right).$$

§ 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Динамические уравнения Эйлера вращения тела вокруг неподвижной точки под действием сил получают из теоремы об изменении кинетического момента. Согласно этой теореме,

$$\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t = \bar{L}_O^{(e)}, \tag{10}$$

где $\bar{K}_O$ — кинетический момент тела относительно его закрепленной точки от вращения тела относительно инерциальной системы отсчета; $\bar{L}_O^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)})$ — векторная сумма моментов внешних сил, действующих на тело (рис. 135). К числу внешних сил относится также сила реакции закрепленной точки.

Если выразить (10) в проекциях на инерциальные (неподвижные) оси координат, то через K_x, K_y, K_z в полученные уравнения, согласно (3) в общем и (4) в частном случаях главных осей, войдут изменяющиеся с течением времени моменты инерции, для вычисления которых следует уже знать движение тела, которое само подлежит определению по заданным силам. Чтобы избежать этого, Эйлер предложил проецировать векторы, входящие в (10), на подвижные оси координат, скрепленные с вращающимся телом. Для таких осей моменты инерции не зависят от времени.

Подготовим векторное уравнение (10) для проецирования на подвижные оси координат, скрепленные с движущимся телом. Для этого абсолютную производную по времени от кинетического момента необходимо выразить через относительную производную, используя формулу Бура, т. е.

$$\frac{\mathrm{d}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O, \tag{11}$$

так как подвижная система осей координат имеет ту же угловую скорость, что и само тело, с которым скреплены эти оси.

Для удобства проецирования представим векторное произведение векторов в виде определителя с последующим разложением его по элементам первой строки, т. е.

$$\bar{\omega} \times \bar{K}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \bar{i}(\omega_y K_z - \omega_z K_y) +$$

$$+ \bar{j}(\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \bar{k}(\omega_x K_y - \omega_y K_x), \tag{12}$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат подвижной системы осей координат. Используя формулу (11), теорему об изменении кинетического момента (10) представим в форме

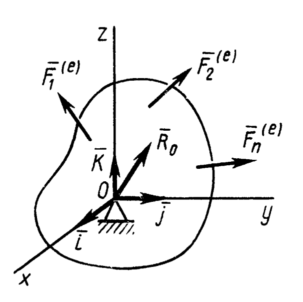


Рис. 135

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{K}_O=\bar{L}_O^{(e)}. \qquad (10')$$

В проекциях на подвижные оси координат, скрепленные с вращающимся телом, из (10′) с учетом (12) получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dK_x}{dt}+\omega_y K_z-\omega_z K_y=L_x^{(e)};\\&\frac{dK_y}{dt}+\omega_z K_x-\omega_x K_z=L_y^{(e)};\\&\frac{dK_z}{dt}+\omega_x K_y-\omega_y K_x=L_z^{(e)}.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Эти уравнения после подстановки в них значений K_x, K_y, K_z из (3) приведут к обобщенным динамическим уравнениям Эйлера. Это еще довольно сложные уравнения. Дальнейшее их упрощение получается, если использовать второе предложение Эйлера—выбрать в качестве подвижных осей координат, скрепленных с телом, главные оси инерции для точки O. В этом случае K_x, K_y, K_z определяются по формулам (4). Моменты инерции по-прежнему не будут зависеть от времени и их можно выносить за знак производных по времени. Таким образом, из (13), используя (4), получим следующие динамические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}&J_x\frac{d\omega_x}{dt}+\left(J_z-J_y\right)\omega_y\omega_z=L_x^{(e)};\\&J_y\frac{d\omega_y}{dt}+\left(J_x-J_z\right)\omega_z\omega_x=L_y^{(e)};\\&J_z\frac{d\omega_z}{dt}+\left(J_y-J_x\right)\omega_x\omega_y=L_z^{(e)}.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

К этим динамическим уравнениям Эйлера следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned}&\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi;\\&\omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi;\\&\omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi},\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

которые выражают проекции вектора угловой скорости вращения тела на подвижные оси координат, скрепленные с телом, через углы Эйлера, ψ, θ, φ и их производные по времени.

§ 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Установим зависимость проекций вектора угловой скорости на оси координат, скрепленные с телом, от углов Эйлера ψ, θ, φ и их производных по времени.

Тело, имеющее неподвижную точку O, движется относительно осей координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 136). С движущимся телом скреплена система подвижных осей координат $Oxyz$, движение которой и характеризует движение рассматриваемого твердого тела относительно осей $Ox_1y_1z_1$. Положение подвижной системы координат относительно неподвижной, а следовательно, и положение самого движущегося тела определяются тремя углами Эйлера: ψ, θ, φ.

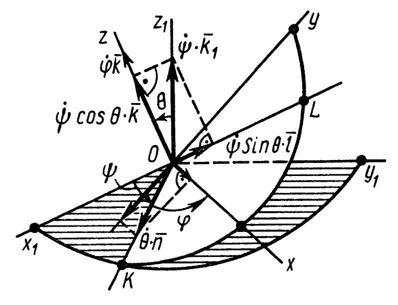


Рис. 136

Изменение угла прецессии ψ, образованного координатной осью Ox_1 и линией узлов OK, которая является линией пересечения координатных плоскостей Ox_1y_1 и Oxy, соответствует вращению тела вокруг оси прецессии Oz_1, перпендикулярной линиям, образующим угол, с угловой скоростью $\dot{\psi}\bar{k}_1$, направленной по этой оси. Здесь $\bar{k}_1$ — единичный вектор оси Oz_1.

При изменении угла нутации θ, заключенного между осями координат Oz_1 и Oz, тело вращается вокруг перпендикулярной этим осям линии узлов OK с угловой скоростью $\dot{\theta}\bar{n}$, где $\bar{n}$ — единичный вектор, направленный в положительную сторону линии узлов.

Изменение угла собственного вращения φ, образованного координатной осью Ox и линией узлов OK, приводит к вращению тела вокруг оси собственного вращения Oz, перпендикулярной этим линиям, с угловой скоростью $\dot{\varphi}\bar{k}$, где $\bar{k}$ — единичный вектор оси Oz.

При изменении углов Эйлера ψ, θ и φ движение тела можно рассматривать как сложное, состоящее из трех вращений вокруг пересекающихся осей Oz_1, OK и Oz с угловыми скоростями $\dot{\psi}k_1$, $\dot{\theta}\bar{n}$ и $\dot{\varphi}\bar{k}$ соответственно. Совокупность этих трех вращений эквивалентна вращению тела вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$, направленной по этой оси.

По теореме о сложении вращений вокруг пересекающихся осей имеем

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k}_1 + \dot{\theta}\bar{n} + \dot{\varphi}\bar{k}. \quad (16)$$

Определим проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ на подвижные оси координат $Oxyz$, скрепленные с телом. Движение тела при этом рассматривается относительно неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$. При проецировании на оси координат $Oxyz$ векторной суммы правой части (16) следует проецировать на эти оси каждый из слагаемых векторов.

Вектор угловой скорости $\dot{\varphi}\bar{k}$ направлен по оси Oz и дает проекцию на эту ось, равную $\dot{\varphi}$, так как он перпендикулярен двум другим осям: Ox и Oy.

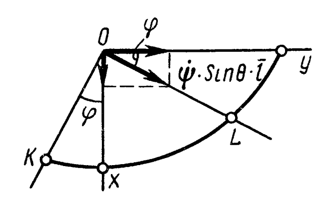


Рис. 137

Угловая скорость $\dot\theta\bar n$, направленная по линии узлов, располагается в плоскости подвижных осей Ox и Oy, и ее проекция на ось Ox равна $\dot\theta\cos\varphi$, а на ось Oy—$(-\dot\theta\sin\varphi)$. Знак минус у проекции на ось Oy поставлен потому, что при изображенном на рисунке расположении осей вектор $\dot\theta\bar n$ при разложении по осям Ox и Oy имеет составляющую в отрицательном направлении оси Oy. Проецируемый вектор $\dot\theta\bar n$ перпендикулярен оси Oz, и его проекция на эту ось равна нулю.

Для того чтобы спроецировать на оси координат $Oxyz$ вектор $\dot\psi\bar k_1$, его следует предварительно разложить на две перпендикулярные составляющие, одна из которых направлена по оси Oz, а другая перпендикулярная составляющая расположится в плоскости осей координат Ox и Oy. Имеем

$$\dot\psi\bar k_1=\dot\varphi\cos\theta\cdot\bar k+\dot\psi\sin\theta\cdot\bar l, \tag{17}$$

где $\bar l$—единичный вектор, направленный по линии OL. При проецировании вектора $\dot\psi\bar k_1$ на оси координат следует проецировать на эти оси каждый вектор из правой части (17). Вектор $\dot\psi\cos\theta\cdot\bar k$ дает проекцию $\dot\psi\cos\theta$ только на ось Oz. Остается спроецировать вектор $\dot\psi\sin\theta\cdot\bar l$, расположенный в плоскости осей координат Ox и Oy, на эти оси. В плоскости этих осей расположится также линия узлов OK (рис. 137). Линия OL, по которой направлен проецируемый вектор $\dot\psi\sin\theta\cdot\bar l$, и линия узлов взаимно перпендикулярны, так как линия узлов перпендикулярна осям координат Oz и Oz_1, а следовательно, она перпендикулярна и линии OL, расположенной в плоскости этих осей. Угол φ между осями Ox и OK является также углом между перпендикулярными к ним осями Oy и OL. Таким образом, проекция вектора $\dot\psi\sin\theta\cdot\bar l$ на ось Oy равна $\dot\psi\sin\theta\cos\varphi$, а на ось Ox—$\dot\psi\sin\theta\sin\varphi$.

Собирая вместе проекции на оси координат векторов, входящих в правую часть (16), с учетом полученных проекций векторов из правой части (17) получим кинематические уравнения Эйлера.

Выразим дополнительно косинусы углов оси прецессии Oz_1 с осями координат $Oxyz$, скрепленными с движущимся телом, через углы Эйлера. По оси прецессии Oz_1 направлен вектор угловой скорости $\dot\psi\cdot\bar k_1$. Поэтому множители при $\dot\psi$ в формулах для ω_x, ω_y, ω_z и есть искомые косинусы указанных выше углов. Обозначая их для краткости γ_1, γ_2, γ_3, получаем

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=\cos(z_1,\hat{\ }x)=\sin\theta\sin\varphi;\\ \gamma_2&=\cos(z_1,\hat{\ }y)=\sin\theta\cos\varphi;\\ \gamma_3&=\cos(z_1,\hat{\ }z)=\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

§ 5. ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Даны приложенные к телу внешние силы $\bar{F}_1^{(e)}, \bar{F}_2^{(e)}, ..., \bar{F}_n^{(e)}$, к которым следует присоединить и силу реакции закрепленной точки (см. рис. 135). Ограничимся рассмотрением случая сил, для которых проекции главного момента $L_x^{(e)}, L_y^{(e)}, L_z^{(e)}$ на подвижные оси координат, скрепленные с телом, зависят от времени, углов Эйлера φ, ψ, θ и их первых производных по времени $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ и не зависят от производных более высоких порядков от этих величин. Если тело задано, то известны его моменты инерции относительно главных осей инерции для закрепленной точки тела. Требуется определить движение тела, т. е. определить углы Эйлера в зависимости от времени. Для этого следует проинтегрировать систему шести динамических (14) и кинематических (15) уравнений Эйлера. При этом появятся шесть произвольных постоянных интегрирования, для определения которых дополнительно следует задать начальные условия, т. е. при $t=0$ задать числовые величины углов Эйлера и их первых производных. Итак, следует задать:

$$t=0; \quad \varphi=\varphi_0; \quad \psi=\psi_0; \quad \theta=\theta_0;$$
$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0; \quad \dot{\psi}=\dot{\psi}_0; \quad \dot{\theta}=\dot{\theta}_0. \tag{19}$$

Интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений (14) и (15) при общих начальных условиях (19) — задача чрезвычайно трудная. Она в общем случае начальных условий не решена даже тогда, когда внешними силами являются только сила тяжести самого тела и реакция закрепленной точки. Для тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в трех случаях была указана система первых интегралов дифференциальных уравнений, из которых неизвестные углы Эйлера в зависимости от времени определяются в квадратурах, т. е. путем вычисления интегралов. Эти частные случаи называют случаями интегрируемости уравнений Эйлера.

Случай Эйлера. Тело имеет любую форму, но закреплено в его центре масс, т. е. $L_x^{(e)}=L_y^{(e)}=L_z^{(e)}=0$. В этом случае углы Эйлера выражаются через специальные эллиптические функции.

Случай Лагранжа (случай симметричного гироскопа). Тело имеет ось симметрии, например Oz. В силу симметрии $J_x=J_y$ и эллипсоид инерции для закрепленной точки будет эллипсоидом вращения. Закрепленная точка O и центр масс C расположены на оси симметрии. В этом случае могут быть указаны шесть независимых первых интегралов, из которых углы Эйлера вычисляются в квадратурах.

Случай Ковалевской. Долгое время не удавалось указать других случаев интегрируемости, пока русский

математик С. Ковалевская, участвуя в конкурсе, объявленном Французской академией наук, не открыла еще один, получивший название случая Ковалевской. В случае Ковалевской $J_x = J_y = 2J_z$. Закрепленная точка располагается на оси симметрии Oz, а центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (плоскости Oxy) для неподвижной точки тела.

Во многих важных случаях, особенно симметричных тел, являющихся гироскопами, уравнения Эйлера интегрируются приближенно. Известен также ряд частных случаев начальных условий, для которых уравнения Эйлера при движении гироскопа под действием силы тяжести могут быть проинтегрированы точно.

§ 6. АСТАТИЧЕСКИЙ ГИРОСКОП

Гироскопом обычно называют симметричное твердое тело, совершающее движение вокруг неподвижной точки O, расположенной на оси симметрии Oz (рис. 138). Эллипсоид инерции гироскопа относительно его неподвижной точки является эллипсоидом вращения (на рисунке он изображен штриховой линией), а любая его ось в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси гироскопа (например, Ox и Oy),—главной осью инерции. Все эти оси имеют одинаковые моменты инерции. Ось гироскопа Oz является главной центральной осью инерции.

Крепление оси гироскопа в одной точке обычно осуществляется с помощью рамок той или иной формы (рис. 139). Волчок, у которого точка O движется по плоскости, совершает более сложное движение, чем гироскоп, имеющий одну закрепленную точку на оси.

Астатическим (или *уравновешенным*) гироскопом называют гироскоп с неподвижной точкой в центре масс, если на него

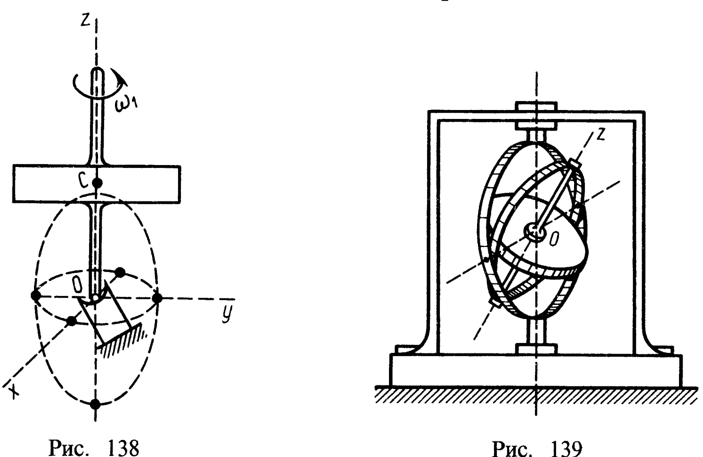


Рис. 138 Рис. 139

действуют только сила тяжести и реакция неподвижной точки. В астатическом гироскопе имеем соединение двух случаев интегрируемости — Эйлера и Лагранжа.

Если Oz — ось симметрии гироскопа, то для осей координат $Oxyz$, скрепленных с гироскопом, $J_x = J_y$. Для астатического гироскопа главный момент внешних сил относительно закрепленной точки

$$\bar{L}_O^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_O\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) = 0,$$

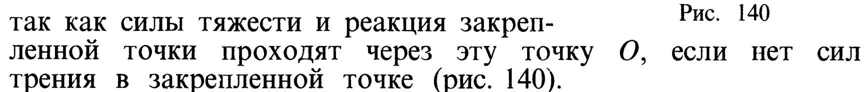


Рис. 140

так как силы тяжести и реакция закрепленной точки проходят через эту точку O, если нет сил трения в закрепленной точке (рис. 140).

Из теоремы об изменении кинетического момента для абсолютного движения гироскопа относительно неподвижных осей координат

$$\mathrm{d}\bar{K}_O / \mathrm{d}t = \bar{L}_O^{(e)} = 0$$

следует, что кинетический момент относительно неподвижной точки гироскопа $\bar{K}_O = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. В частности, постоянной величиной является модуль кинетического момента K_O.

Если одну из неподвижных осей координат Oz_1 направить по вектору кинетического момента $\bar{K}_O$, имеющему неизменное направление в пространстве осей координат $Ox_1y_1z_1$, то проекция $\bar{K}_O$ на ось Oz, как главная ось инерции для точки O и одновременно ось собственного вращения гироскопа, выразится в форме

$$K_z = K_O \cos\theta,$$

где θ — угол между осью Oz_1 и осью собственного вращения Oz. Он обозначен так же, как и угол нутации. В дальнейшем окажется, что он им и является.

С другой стороны, так как ось Oz является главной осью инерции гироскопа для неподвижной точки O, то $K_z = J_z\omega_z$. Следовательно,

$$J_z\omega_z = K_O \cos\theta \quad \text{и} \quad \cos\theta = J_z\omega_z / K_O. \tag{20}$$

Определим движение уравновешенного гироскопа, т. е. установим зависимость углов Эйлера ψ, θ, φ от времени при заданных начальных условиях. Так как $\bar{L}_O^{(e)} = 0$, то $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = L_z^{(e)} = 0$. Учитывая это и условие симметричности $J_x = J_y$, получим следующие динамические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}&J_x\frac{d\omega_x}{dt}+(J_z-J_x)\,\omega_z\omega_y=0;\\&J_y\frac{d\omega_y}{dt}+(J_x-J_z)\,\omega_x\omega_z=0;\\&J_z\frac{d\omega_z}{dt}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

К ним следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned}&\omega_x=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi;\\&\omega_y=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi;\\&\omega_z=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Вместо системы уравнений (21) удобнее использовать первые интегралы этой системы, один из которых получается умножением (21) соответственно на ω_x, ω_y, ω_z и суммированием. После преобразований получаем

$$\frac{d}{dt}\left[J_x\frac{(\omega_x^2+\omega_y^2)}{2}+J_z\frac{\omega_z^2}{2}\right]=0;$$

$$J_x(\omega_x^2+\omega_y^2)+J_z\omega_z^2=\text{const}=2h.\qquad(23)$$

Это соотношение [первый интеграл системы (21)], в котором постоянная обозначена $2h$, выражает закон сохранения механической энергии $T+\Pi=h$, где Π — потенциальная энергия — постоянная, принятая равной нулю.

Если уравнения системы (21) соответственно умножить на $J_x\omega_x$, $J_y\omega_y$, $J_z\omega_z$ и сложить, то после интегрирования получается другой первый интеграл:

$$J_x^2(\omega_x^2+\omega_y^2)+J_z^2\omega_z^2=\text{const}=K_O^2.\qquad(24)$$

Соотношение (24) является законом сохранения кинетического момента относительно закрепленной точки.

Из третьего уравнения системы (21) следует еще один первый интеграл:

$$\omega_z=\text{const}=\omega_z^{(0)},\qquad(25)$$

где $\omega_z^{(0)}$ — значение ω_z при $t=0$.

Первые интегралы (23)—(25) системы уравнений (21) можно использовать вместо самой системы уравнений. Заменяя ω_z на $\omega_z^{(0)}$ и учитывая, что $K_O=\text{const}$, из (20) получаем, что угол нутации — постоянная величина. Действительно,

$$\cos\theta=J_z\omega_z^{(0)}/K_O=\text{const}=\cos\theta_0,$$

где θ_0 — значение θ при $t=0$. Так как $\theta=\text{const}$, то угловая скорость нутации $\dot\theta=0$. С учетом этого система уравнений (22) примет вид

$$\omega_x = \dot\psi \sin\theta_0 \sin\varphi;\quad \omega_y = \dot\psi \sin\theta_0 \cos\varphi;\quad \omega_z^{(0)} = \dot\psi \cos\theta_0 + \dot\varphi. \tag{22'}$$

Возведем первые два уравнения этой системы в квадраты и сложим. Получим

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot\psi^2 \sin^2\theta_0 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \dot\psi^2 \sin^2\theta_0. \tag{26}$$

Определяя величину $\omega_x^2 + \omega_y^2$ из (23), убеждаемся, что она является постоянной, так как

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = (2h - J_z \omega_z^{(0)2})/J_x = \text{const}. \tag{27}$$

Учитывая (27), из (26) получаем

$$\dot\psi^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2)/\sin^2\theta_0 = \text{const},$$

т. е. угловая скорость прецессии $\dot\psi = \text{const} = \dot\psi_0$ и, следовательно,

$$\psi = \dot\psi_0 t + \psi_0, \tag{28}$$

где $\dot\psi_0$, ψ_0 — значения угловой скорости прецессии и угла прецессии в начальный момент времени.

Из (22') с учетом (25) и (28) получаем, что угловая скорость собственного вращения тоже постоянная величина, так как

$$\dot\varphi = \omega_z^{(0)} - \dot\psi_0 \cos\theta_0 = \text{const} = \dot\varphi_0 \tag{29}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \dot\varphi_0 t + \varphi_0, \tag{29'}$$

где $\dot\varphi_0$, $\dot\psi_0$ — постоянные величины.

Движение гироскопа с постоянной скоростью собственного вращения $\dot\varphi$, постоянной скоростью прецессии $\dot\psi$ и постоянным углом нутации θ называется *регулярной прецессией. Уравновешенный гироскоп*, следовательно, *в общем случае совершает регулярную прецессию по инерции вокруг направления кинетического момента* $\bar K_O$.

Для того чтобы уравновешенный гироскоп совершал регулярную прецессию по инерции, т. е. без действия момента внешних сил относительно его неподвижной точки, необходимо выполнение условия

$$J_z \dot\varphi = (J_x - J_z)\dot\psi \cos\theta. \tag{30}$$

Условие (30) получено в § 3 этой главы. Оно следует также из (29).

Если $\dot\varphi$, $\dot\psi$ и θ не удовлетворяют этому условию, то для поддержания регулярной прецессии требуется действие на гироскоп момента внешних сил.

Если уравновешенному гироскопу сообщить начальную угловую скорость ω_0 вокруг оси собственного вращения, то кинетический момент гироскопа $\bar K_O$, сохраняющий свое направление неизменным, будет все время направлен по этой оси. В этом случае угол нутации равен нулю и ось собственного

вращения совпадает с осью прецессии, по которой направлен кинетический момент, сохраняющий постоянное направление в неподвижном пространстве. Ось такого гироскопа тоже будет сохранять неизменным свое направление в этом пространстве. Это свойство уравновешенного гироскопа сохранять неизменным свое направление, например на какую-либо удаленную звезду, широко используется в различных гироскопических устройствах, таких, как гироскопические компасы, автопилоты и т. д.

Действие кратковременных возмущений, действующих на гироскоп, например вследствие движения объекта, на котором он установлен, с ускорением в течение короткого промежутка времени, рассматривается в приближенной теории гироскопа.

§ 7. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Если пренебречь силами сопротивления среды, в которой движется гироскоп, и силами трения в закрепленной точке или соответственно в подшипниках рамок, то кроме силы реакции в закрепленной точке на гироскоп всегда действует сила его тяжести. Пусть в этом случае гироскоп, с которым скреплена система координат $Oxyz$ (ось Oz является осью симметрии гироскопа), движется относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, у которой ось Oz_1 с единичным вектором $\bar{k}_1$ направлена вертикально вверх (рис. 141).

Для силы тяжести $\bar{P}$, направленной вертикально вниз, т. е. против положительного направления оси Oz_1, имеем $\bar{P}=-P\bar{k}_1$. Ее проекции на подвижные оси координат, скрепленные с гироскопом, выразятся в виде

$$\left.\begin{aligned} P_x&=-P\cos(z_1,\widehat{\ }x)=-P\gamma_1;\\ P_y&=-P\cos(z_1,\widehat{\ }y)=-P\gamma_2;\\ P_z&=-P\cos(z_1,\widehat{\ }z)=-P\gamma_3,\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — косинусы углов оси Oz_1 с осями координат подвижной системы $Oxyz$.

Главный момент внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$ относительно закрепленной точки сведется только к векторному моменту силы тяжести относительно этой точки. Поэтому, учитывая, что $x_C=0$, $y_C=0$, $z_C=l$, и используя (31), получим

$$\left.\begin{aligned} L_x^{(e)}&=M_x(\bar{P})=y_CP_z-z_CP_y=-z_CP_y=Pl\gamma_2;\\ L_y^{(e)}&=M_y(\bar{P})=z_CP_x-x_CP_z=z_CP_x=-Pl\gamma_1;\\ L_z^{(e)}&=M_z(\bar{P})=x_CP_y-y_CP_x=0.\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Динамические уравнения Эйлера для симметричного гироскопа ($J_x = J_y$), движущегося под действием силы тяжести, примут вид

$$\left.\begin{aligned} J_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (J_z - J_x)\omega_y\omega_z = Pl\gamma_2; \\ J_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = -Pl\gamma_1; \\ J_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

К динамическим уравнениям следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned} \omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi; \\ \omega_y = \dot\psi \cos\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi; \\ \omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

К системе уравнений (33) и (34) надо добавить формулы (18), выражающие косинусы углов γ_1, γ_2, γ_3 через углы Эйлера:

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi; \quad \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi; \quad \gamma_3 = \cos\theta. \quad (35)$$

Систему уравнений (33) и (34) с учетом (35) проинтегрируем в наиболее важном частном случае начальных условий:

$$t = 0; \quad \omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega_0; \quad \varphi = \psi = 0; \quad \theta = \theta_0. \quad (36)$$

Вместо динамических уравнений Эйлера (33) целесообразно использовать первые интегралы этих уравнений, которые можно получить из самих уравнений или из общих теорем динамики, примененных к гироскопу. Один из этих интегралов следует из последнего уравнения системы (33):

$$\omega_z = \text{const} = C_1.$$

Два других первых интеграла получим применением общих теорем динамики.

Связи, наложенные на гироскоп, при отсутствии трения в закрепленной точке являются идеальными и стационарными. Сила тяжести, действующая на него, является потенциальной. При этих условиях справедлив закон сохранения механической энергии (интеграл энергии)

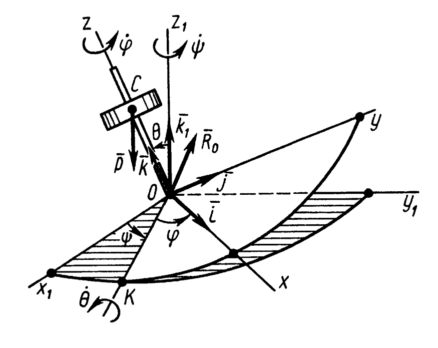


Рис. 141

$$T+\Pi=\text{const}=C_2'.$$

Кинетическая энергия гироскопа при $J_x=J_y$ вычисляется по формуле

$$T=J_x\frac{\omega_x^2+\omega_y^2}{2}+J_z\frac{\omega_z^2}{2}.$$

Потенциальная энергия Π, если принять ее равной нулю, когда центр масс находится в горизонтальной плоскости Ox_1y_1, определяется через координату центра масс z_{1C} в неподвижной системе координат выражением:

$$\Pi=Pz_{1C}.$$

Значение z_{1C} получим проецированием радиуса-вектора центра масс $\bar{r}_C=l\bar{k}$, направленного по подвижной оси Oz, на неподвижную ось Oz_1. Имеем

$$z_{1C}=r_C\cos(z_1,\widehat{\ }z)=l\gamma_3.$$

Таким образом,

$$\Pi=Pz_{1C}=Pl\gamma_3.$$

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергий в интеграл энергии, получим

$$J_x(\omega_x^2+\omega_y^2)+J_z\omega_z^2+2Pl\gamma_3=C_2.$$

Из теоремы об изменении кинетического момента в абсолютном движении гироскопа относительно неподвижной оси Oz_1 имеем

$$\mathrm{d}K_{z_1}/\mathrm{d}t=L_{z_1}^{(e)}=0,$$

так как сила тяжести $\bar{P}$ параллельна этой оси. Отсюда получаем следующий интеграл сохранения кинетического момента относительно оси Oz_1:

$$K_{z_1}=\text{const}=C_3.$$

Выразим K_{z_1} через кинетические моменты относительно подвижных главных осей инерции $Oxyz$ для точки O:

$$K_x=J_x\omega_x;\quad K_y=J_y\omega_y=J_x\omega_y;\quad K_z=J_z\omega_z.$$

Так как кинетический момент $\bar{K}_O$ можно разложить на составляющие по осям подвижной системы координат $\bar{K}_O=K_x\cdot\bar{i}+K_y\cdot\bar{j}+K_z\cdot\bar{k}$, то K_z можно получить проецированием векторной суммы на ось Oz_1. Имеем

$$K_{z_1}=K_x\cos(z_1,\widehat{\ }x)+K_y\cos(z_1,\widehat{\ }y)+K_z\cos(z_1,\widehat{\ }z)=J_x\omega_x\gamma_1+$$
$$+J_x\omega_y\gamma_2+J_z\omega_z\gamma_3.$$

Интеграл сохранения кинетического момента относительно оси Oz_1 принимает форму

$$J_x(\omega_x\gamma_1+\omega_y\gamma_2)+J_z\omega_z\gamma_3=C_3.$$

Получены следующие три первых интеграла динамических уравнений Эйлера:

$$\omega_z = C_1;$$
$$J_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z\omega_z^2 + 2Pl\gamma_3 = C_2;$$
$$J_x(\gamma_1\omega_x + \gamma_2\omega_y) + J_z\gamma_3\omega_z = C_3.$$

Согласно начальным условиям $\omega_z = \omega_0$, $\omega_x = \omega_y = 0$ при $t = 0$, из этих первых интегралов получаем следующие уравнения для определения постоянных C_1, C_2, C_3:

$$\omega_0 = C_1; \quad J_z\omega_0^2 + 2Pl\gamma_{30} = C_2; \quad J_z\gamma_{30}\omega_0 = C_3.$$

Подставляя эти значения постоянных в выражения для первых интегралов, имеем

$$\omega_z = \omega_0; \tag{37}$$
$$J_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) = 2Pl(\cos\theta_0 - \cos\theta); \tag{38}$$
$$J_x(\gamma_1\omega_x + \gamma_2\omega_y) = J_z\omega_0(\cos\theta_0 - \cos\theta), \tag{39}$$

так как, согласно (35) и начальным условиям, $\gamma_{30} - \gamma_3 = \cos\theta_0 - \cos\theta$.

Из кинематических уравнений Эйлера (34) с учетом (35) получаем соотношения

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2; \tag{40}$$
$$\gamma_1\omega_x + \gamma_2\omega_y = \dot\psi\sin^2\theta. \tag{41}$$

С учетом (40) и (41) формулы (38) и (39) примут вид

$$J_x(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) = 2Pl(\cos\theta_0 - \cos\theta); \tag{42}$$
$$J_x\dot\psi\sin^2\theta = J_z\omega_0(\cos\theta_0 - \cos\theta). \tag{43}$$

Из последнего уравнения системы (34), приняв $\omega_z = \omega_0$, имеем

$$\omega_0 = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi. \tag{44}$$

Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (42), (43) и (44), интегрированием которых можно определить углы Эйлера ψ, θ, φ в зависимости от времени при заданных начальных условиях. Это сложная для интегрирования система уравнений. Подготовим ее для приближенного интегрирования.

В (42) левая часть положительна; следовательно, должна быть положительна и правая часть, т. е. $\cos\theta_0 - \cos\theta > 0$. С учетом этого из (43) для $\dot\psi$ имеем

$$\dot\psi = \frac{J_z\omega_0}{J_x\sin^2\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta) > 0, \tag{45}$$

т. е. прецессионное движение гироскопа с угловой скоростью прецессии $\dot\psi$ происходит все время в одном и том же направлении, так как при $\dot\psi > 0$ угол ψ возрастает с течением времени.

Определяя угловую скорость нутации $\dot{\theta}$ из (42) с использованием (45), получим

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2Pl}{J_x}\left(\cos\theta_0 + \cos\theta\right) - \frac{J_z^2\omega_0^2}{J_x^2\sin^2\theta}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)^2 =$$

$$= \frac{2Pl}{J_x}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)\left[1 - \frac{J_z^2\omega_0^2}{2PlJx\sin^2\theta}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)\right]. \qquad (46)$$

Так как левая часть (46) положительна, то и правая часть должна быть положительна. Учитывая, что $\cos\theta_0 - \cos\theta > 0$, получаем, что выражение в квадратных скобках должно быть тоже положительным, т. е.

$$\frac{J_z^2\omega_0^2}{2PlJ_x\sin^2\theta}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) < 1. \qquad (47)$$

Для создания предпосылок последующих допущений приближенной теории гироскопа выполним приближенное интегрирование полученных уравнений для углов Эйлера в случае быстровращающегося гироскопа, для которого собственный кинетический момент $J_z\omega_0$ — величина достаточно большая по сравнению с наибольшей величиной знаменателя $2PlJ_x$ в (47). Этот случай представляет наибольший практический интерес. Для таких гироскопов разность $\cos\theta_0 - \cos\theta$, как это следует из (47), будет величиной малой. При этом будет малой и разность углов $\theta - \theta_0 = u$, где u — изменение угла нутации гироскопа. В этом случае приближенно можно принять, отбрасывая малые второго и более высоких порядков,

$$\cos u = 1; \quad \sin u = u;$$

$$\cos\theta = \cos\left(\theta_0 + u\right) = \cos\theta_0 - u\sin\theta_0; \quad \sin\theta = \sin\theta_0.$$

Учитывая, что $\dot{\theta} = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, из (46) получим следующее дифференциальное уравнение для определения u:

$$\left(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t\right)^2 = \alpha^2 u\left(\beta - u\right), \qquad (46')$$

где введены обозначения для постоянных

$$\alpha^2 = J_z^2\omega_0^2/J_x^2; \quad \beta = 2PlJ_x\sin\theta_0/\left(J_z^2\omega_0^2\right).$$

Из (46′) после извлечения квадратного корня и разделения переменных получим

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\alpha^2 u(\beta - u)}} = \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Пределы в интегралах поставлены с использованием начальных условий. Интеграл левой части вычисляется с помощью

подстановки $u=\beta\sin^2\xi$. Выполняя интегрирование, окончательно имеем

$$u=\theta-\theta_0=\beta\sin^2\left(\frac{\alpha t}{2}\right)=\frac{2PlJ_x\sin\theta_0}{J_z^2\omega_0^2}\sin^2\left(\frac{J_z\omega_0}{2J_x}t\right). \tag{48}$$

Подставляя значение θ из (48) в (45) с учетом принятых допущений, получим

$$\dot\psi=\frac{J_z\omega_0}{J_x\sin\theta_0}u. \tag{45'}$$

Отсюда интегрированием находится угол прецессии ψ.

Для угловой скорости собственного вращения из (44) с учетом (45′) и принятых допущений имеем

$$\dot\varphi=\omega_0-\frac{J_z\omega_0\cos\theta_0}{J_x\sin\theta_0}u. \tag{44'}$$

Из этого соотношения квадратурой получается угол φ в зависимости от времени.

Не производя вычисления интегралов, уже можно сделать следующие основные выводы о движении быстровращающегося гироскопа.

1. Модули угловых скоростей прецессии $|\dot\psi|$ и нутации $|\dot\theta|$ малы по сравнению с модулем угловой скорости собственного вращения

2. Если прецессионное движение происходит все время в одном и том же направлении ($\dot\psi>0$), то нутационное движение носит колебательный характер.

Отсюда следует, что если взять на оси гироскопа какую-либо точку A, то ее траектория на поверхности сферы, согласно (48), будет иметь вид, указанный на рис. 142. При $u=0$, как следует из (45′), $\dot\psi=0$, т. е. прецессия на мгновение прекращается. В случае очень больших значений $J_z\omega_0$ наибольшее изменение угла нутации u_{max} будет очень малым и тогда можно принять $\theta=\text{const}=\theta_0$. Если ввести постоянную среднюю угловую скорость прецессии за рассматриваемый промежуток времени, то движение гироскопа будет очень близким к регулярной прецессии, для которой угловые скорости прецессии и собственного вращения постоянны и прецессия происходит вокруг неподвижной оси при постоянном

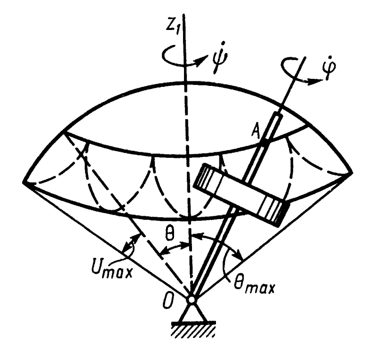


Рис. 142

угле нутации. В действительности движение гироскопа немного отличается от регулярной прецессии. Движение гироскопа, близкое к регулярной прецессии, называют *псевдорегулярной прецессией.*

§ 8. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

В технике применяются гироскопы с угловой скоростью собственного вращения порядка 2000...5000 $с^{-1}$ (20 000...50 000 об/мин). В современной технике гироскопы нашли очень широкое применение. Гироскопические явления проявляются при всех видах движения тела, когда это тело совершает сложное движение, содержащее в своих частях вращательное движение. Рассмотрим основные гироскопические явления быстровращающихся гироскопов приближенно, приняв, что гироскопу сообщена вокруг оси симметрии или оси гироскопа Oz собственная угловая скорость ω_1.

Основные допущения приближенной теории

При применении гироскопов в различных устройствах важно знать движение его оси. Собственное вращение вокруг оси обычно задано, и угловая скорость собственного вращения при этом поддерживается постоянной. Движение оси быстровращающегося гироскопа можно установить по кинетическому моменту гироскопа, вычисленному относительно неподвижной точки, так как кинетический момент можно считать приближенно направленным по оси гироскопа. Для быстровращающегося гироскопа угловая скорость прецессии мала по сравнению с угловой скоростью собственного вращения и также мало изменение угла нутации, т. е. угла между осью собственного вращения и осью прецессии.

Мгновенную угловую скорость гироскопа $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3$ от вращения вокруг неподвижной точки в первом приближении (рис. 143) можно принять

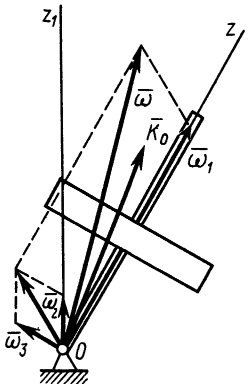


Рис. 143

$$\bar{\omega}\approx\bar{\omega}_1,$$

где $\bar{\omega}_1$ — угловая скорость собственного вращения; $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_3$ — соответственно угловые скорости прецессии и нутации.

Учитывая, что оси Ox, Oy, Oz — главные оси инерции, а $J_x=J_y$, для проекций кинетического момента на эти оси имеем:

$$K_x=J_x\omega_x;\quad K_y=J_y\omega_y;\quad K_z=J_z\omega_z.$$

Так как $\bar{\omega}$ направлена приближенно по оси собственного вращения Oz, то $\omega_x\approx 0$, $\omega_y\approx 0$ и, следовательно,

$$K_O=\sqrt{K_x^2+K_y^2+K_z^2}\approx K_z=J_z\omega_z\approx J_z\omega_1.$$

Таким образом, для быстровращающегося гироскопа с большим собственным кинетическим моментом $J_z\omega_1$ можно считать кинетический момент $\bar{K}_O$ равным по модулю собственному кинетическому моменту гироскопа $J_z\omega_1$ и направленным по оси гироскопа, т. е.

$$\bar{K}_O\approx J_z\bar{\omega}_1. \tag{49}$$

Это приближенное выражение для кинетического момента гироскопа будет точным, если ось гироскопа является его неподвижной осью вращения.

Для решения вопроса о поведении осей таких гироскопов можно пользоваться теоремой Резаля, позволяющей характеризовать движение конца вектора кинетического момента по известному главному моменту внешних сил.

Для сохранения существенных свойств гироскопа угловую скорость прецессии $\bar{\omega}_2$ следует учитывать, пренебрегая только угловой скоростью нутации, но при вычислении кинетического момента гироскопа используем формулу (49).

Особенности движения оси гироскопа

Рассмотрим особенности движения оси гироскопа по сравнению с движением оси такого же тела, не имеющего собственного вращения вокруг оси симметрии Oz. Пусть центр тяжести в обоих случаях расположен в неподвижной точке O и трением в этой точке пренебрежем. Если к покоящемуся телу перпендикулярно оси Oz приложена сила $\bar{F}$ в какой-либо точке А его оси симметрии (рис. 144), то тело начинает вращаться вокруг оси Ox, перпендикулярной плоскости расположения силы и оси симметрии, а точка A тела начнет двигаться в направлении действия силы. Если действие силы прекращается, то тело дальше вращается вокруг оси Ox по инерции с постоянной угловой скоростью, если позволяет крепление тела в точке O.

Совершенно иначе ведет себя быстровращающийся гироскоп под действием такой же силы $\bar{F}$ (рис. 145), приложенной в точке A. Точка A, согласно приближенной теории, начнет двигаться не в направлении действия силы $\bar{F}$, а, как это следует из теоремы Резаля, в направлении векторного момента этой силы относительно неподвижной точки O — параллельно оси Ox. При этом ось гироскопа вращается вокруг оси Oy. Действительно, гироскоп еще до действия силы имел кинетический момент $\bar{K}_O=J_z\bar{\omega}_1$, направленный по оси гироскопа, так как гироскоп вращался только вокруг собственной оси Oz с угловой скоростью ω_1. По теореме Резаля скорость $\bar{u}_B$ конца вектора $\bar{K}_O$ равна и параллельна $\bar{L}_O^{(e)}$ векторной сумме

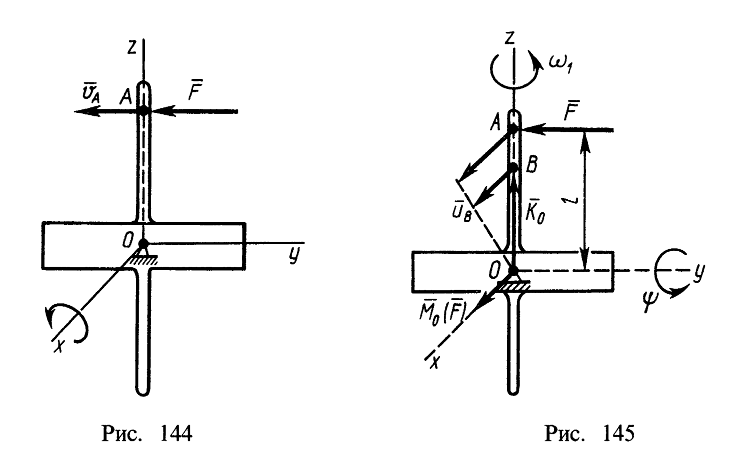


Рис. 144 Рис. 145

моментов относительно точки O всех внешних сил, т. е. $\bar{u}_B = \bar{L}_O^{(e)}$.

В данном случае

$$\bar{L}_O^{(e)} = \bar{M}_O(\bar{F}),$$

причем момент $\bar{M}_O(\bar{F})$ направлен по оси Ox.

Таким образом, скорость точки B конца вектора $\bar{K}_O$ и при принятых допущениях приближенной теории всех других точек оси гироскопа параллельна $\bar{M}_O(\bar{F})$, что соответствует вращению оси гироскопа Oz или прецессии гироскопа вокруг оси Oy. Ось гироскопа прецессирует под действием силы в направлении момента этой силы. Если момент силы в какой-либо момент времени равен нулю, то прецессия оси гироскопа тоже прекращается. Ось гироскопа не обладает инерцией. Для гироскопа не имеет существенного значения сила $\bar{F}$, так как его прецессионное движение определяется только моментом этой силы относительно неподвижной точки гироскопа. Если центр тяжести гироскопа не находится в неподвижной точке, то надо в общем суммарном моменте сил учесть момент силы тяжести.

Сформулируем следующее правило прецессии: *если к вращающемуся вокруг оси гироскопу приложить внешние силы, создающие момент сил относительно его неподвижной точки, то та часть оси гироскопа, по которой направлен кинетический момент, начнет прецессировать в направлении векторного момента этих сил.*

Выведем приближенную формулу для оценки угла прецессии ψ в рассмотренном случае действия силы $\bar{F}$. За достаточно малый промежуток времени τ точка B конца вектора $\bar{K}_O$ смещается по дуге годографа на величину

$$s_B \approx u_B \tau \doteq M_O(\bar{F})\tau = Fl\tau = F\tau l.$$

Угол поворота вокруг оси Oy

$$\psi=\frac{s_B}{OB}=\frac{M_O(\bar{F})\tau}{K_O}=\frac{F\tau l}{J_z\omega_1}, \qquad (50)$$

так как

$$OB=K_O=J_z\omega_1.$$

Из (50) следует, что угол ψ тем меньше, чем больше собственный кинетический момент гироскопа $J_z\omega_1$; угол ψ прямо пропорционален моменту импульса силы относительно неподвижной точки гироскопа. Формулу (50) применяют для оценки действия на гироскоп кратковременных сил возмущений, когда величина τ очень мала. Если собственный кинетический момент $J_z\omega_1$ достаточно велик по сравнению с моментом импульса силы, то ось гироскопа почти не отклоняется, т. е. на нее не влияют кратковременные импульсы сил или удары. Ось гироскопа устойчива к таким импульсам сил. Удары по оси гироскопа не приводят к заметному ее отклонению от первоначального направления.

Гироскопический момент

Как уже известно, если на гироскоп действуют внешние силы, создающие момент относительно неподвижной его точки, то гироскоп прецессирует с некоторой угловой скоростью. Если момент внешних сил становится равным нулю, то и прецессия гироскопа прекращается. Таким образом, для создания прецессии гироскопа по приближенной теории требуется момент внешних сил, и наоборот.

Пусть гироскоп прецессирует с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Вычислим момент внешних сил, вызывающих эту прецессию. По теореме Резаля, момент внешних сил относительно неподвижной точки гироскопа

$$\bar{L}_O^{(e)}=\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t=\bar{u}_B.$$

Так как вектор $\bar{K}_O$, направленный по оси гироскопа, вращается вокруг неподвижной точки с угловой скоростью прецессии $\bar{\omega}_2$, то скорость точки B, совпадающей с концом вектора $\bar{K}_O$, вычисляется по формуле, аналогичной векторной формуле Эйлера для скорости точки тела при сферическом движении, т. е.

$$\bar{u}_B=\bar{\omega}_2\times\overrightarrow{OB}=\bar{\omega}_2\times\bar{K}_O,$$

так как $\overrightarrow{OB}=\bar{K}_O=J_z\bar{\omega}_1$.

Для момента внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$ имеем

$$\bar{L}_O^{(e)}=\bar{\omega}_2\times\bar{K}_O=J_z(\bar{\omega}_2\times\bar{\omega}_1). \qquad (51)$$

Если к гироскопу применить одно из следствий принципа Даламбера, что сумма векторных моментов внешних сил вместе с моментом сил инерции точек гироскопа равна нулю, то

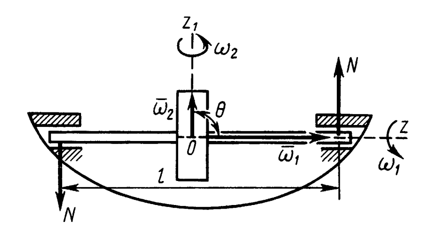


Рис. 146

$$\bar{L}+\bar{L}_O^{(e)}=0,$$

где $\bar{L}$ — момент всех сил инерции гироскопа относительно неподвижной его точки. Этот момент $\bar{L}$ называют *гироскопическим моментом*. Учитывая (51), получаем

$$\bar{L}=-\bar{L}_O^{(e)}=-J_z(\bar\omega_2\times\bar\omega_1)=$$
$$=J_z(\bar\omega_1\times\bar\omega_2),$$

или окончательно

$$\bar{L}=J_z(\bar\omega_1\times\bar\omega_2);\quad L=J_z\omega_1\omega_2\sin\theta, \tag{52}$$

где θ — угол нутации, т. е. угол между осью собственного вращения и осью прецессии.

Гироскопический момент можно представить как момент гироскопической пары сил, с которой гироскоп действует на тела, принуждающие его прецессировать под действием момента внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$. Обычно противодействие гироскопа в виде гироскопической пары сил передается на эти тела через подшипники, в которых помещена ось гироскопа. Если эти тела или одно из них могут двигаться, то гироскопическая пара сил может вызвать его движение.

Из (52) видно, что гироскопический момент может быть равен нулю, если угловая скорость прецессии ω_2 равна нулю или если ось гироскопа параллельна оси прецессии.

Действие гироскопической пары сил полностью определяется гироскопическим моментом этой пары, вычисляемым по формуле (52). Но во многих случаях более предпочтительно определять это действие по правилу Жуковского, основанному на этой же формуле.

Правило Жуковского: *если быстровращающемуся гироскопу сообщают вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии, причем так, чтобы после совпадения направления этих осей оба вращения вокруг них имели одинаковое направление.*

Если какое-либо тело препятствует гироскопу двигаться так, чтобы сделать его ось параллельной оси прецессии, то гироскоп давит на это тело и закрепленную точку гироскопа.

В том случае, когда таким гироскопом является ротор турбины, установленной на корабле, совершающем разворот вокруг вертикальной оси (рис. 146), гироскопическое давление воспринимается подшипниками турбины. Силу этого давления N определяют по формуле

$$Nl=L=J_z\omega_1\omega_2\sin\theta$$

или

$$N=L/l=J_z\omega_1\omega_2\sin\theta/l, \tag{53}$$

где l — расстояние между подшипниками турбины; ω_2 — угловая скорость поворота корабля (угловая скорость прецессии); θ — угол нутации (в рассматриваемом случае $\theta=90°$).

Техническое применение гироскопа

Из многочисленных применений прецессирующего гироскопа, движение которого легко оценить на основании правила Жуковского, рассмотрим для примера измерение угловых скоростей. Пусть гироскоп, ось которого помещена в подшипниках, расположенных на каком-либо летательном аппарате, совершает быстрое вращение вокруг своей оси. Если летательный аппарат поворачивается вокруг какой-либо мгновенной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$, то для гироскопа эта угловая скорость является угловой скоростью прецессии и ее можно оценить по силе гироскопического давления N. Эту силу, в свою очередь, можно измерить, например, по деформации пружины, на которой укреплен один из подшипников гироскопа (рис. 147). Для ω_2 по формуле (53) имеем

$$\omega_2 = Nl/(J_z\omega_1 \sin\theta). \qquad (54)$$

В практике измерения угловых скоростей обычно используют случай, когда $\theta=90°$. Если на летательном аппарате осуществить регулирующее устройство, которое бы с помощью, например, рулей стремилось создать для него угловую скорость ω_2 равной нулю, то летательный аппарат можно стабилизировать по угловой скорости относительно соответствующей оси. Создавая с помощью привода соответствующее давление N на пружинную опору, которое эквивалентно угловой скорости прецессии, этим регулирующим устройством с рулями можно управлять летательным аппаратом. Очевидно, для полной стабилизации и управления летательным аппаратом достаточно трех таких гироскопов со взаимно перпендикулярным расположением осей.

Кроме рассмотренной стабилизации с помощью регулирующих устройств, когда гироскоп применяют в качестве чувствительного элемента, его можно применять и для непосредственной стабилизации артиллерийских и иных установок на кораблях, для успокоения качки, стабилизации вагонов однорельсовой железной дороги и т. п.

Другое важное свойство гироскопа, которое нашло широкое применение,— это способность сохранять направление своей оси, если нет приложенного

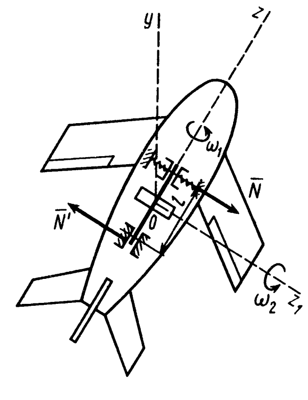


Рис. 147

к гироскопу момента внешних сил. Тогда ось гироскопа не прецессирует и сохраняет неизменным свое направление в пространстве. Это свойство уравновешенного гироскопа используют в гирокомпасах, указателях поворота, стабилизирующих устройствах и т. п. Для этой цели применяют гироскопы с тремя степенями свободы, или свободные гироскопы.

Прецессия тяжелого гироскопа по приближенной теории

Рассмотрим прецессию тяжелого гироскопа (рис. 148) под действием силы тяжести. Согласно правилу прецессии, под действием момента силы тяжести $\bar{P}$ относительно точки O гироскоп прецессирует вокруг вертикальной оси Oz_1 в направлении, указанном на рисунке дуговой стрелкой. Так как в каждый момент времени

$$\bar{L} = -\bar{L}_O^{(e)}; \quad L = L_O^{(e)},$$

то, следовательно,

$$J_z \omega_1 \omega_1 \sin\theta = Pl \sin\theta,$$

где $l = OC$ — расстояние от неподвижной точки до центра тяжести гироскопа.

Угловая скорость прецессии

$$\omega_2 = Pl/(J_z \omega_1). \tag{55}$$

Из (55) следует, что угловая скорость прецессии тяжелого гироскопа не зависит от угла наклона оси гироскопа: она обратно пропорциональна собственному кинетическому моменту гироскопа $J_z\omega_1$, прямо пропорциональна его силе тяжести и расстоянию от центра тяжести гироскопа до неподвижной точки.

Пример. Бегуны вращаются вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 149). Сила тяжести каждого бегуна — P; радиус — R; радиус инерции относительно оси собственного вращения $Oz - \rho$.

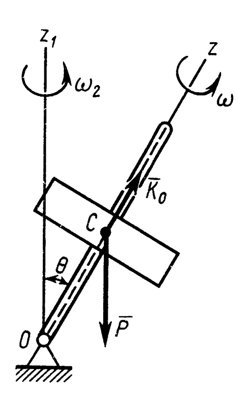


Рис. 148

Определить силу давления бегуна на дно чаши и давление бегунов на шарнир O используя приближенную теорию гироскопа.

Решение. Бегун считаем прецессирующим гироскопом с осью собственного вращения Oz и осью прецессии Oz_1. Сила давления $\bar{Q}$ бегуна на дно чаши складывается из силы тяжести бегуна и силы гироскопического давления $\bar{N}$, т. е. $\bar{Q} = \bar{P} + \bar{N}$.

Предполагая, что средняя точка A бегуна неподвижна, т. е. находится на мгновенной оси бегуна, заключаем, что OA является мгновенной осью бегуна, по которой направлена его угловая скорость, состоящая из скорости прецессии $\bar{\omega}_0$, направленной по оси Oz_1, и собственной угловой скорости бегуна $\bar{\omega}_1$, направленной по оси бегуна Oz.

Из подобия треугольников для угловых скоростей и линейных величин получаем

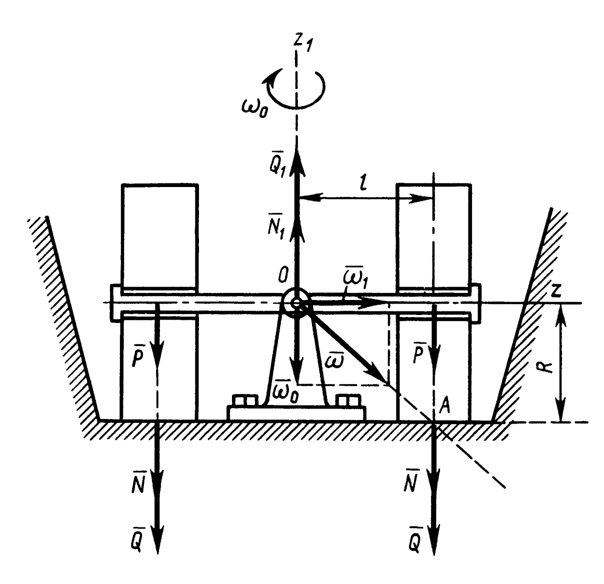


Рис. 149

$$\omega_1/\omega_0=l/R.$$

Отсюда

$$\omega_1=\omega_0 l/R.$$

Рассматривая бегун как прецессирующий гироскоп с угловой скоростью прецессии $\bar{\omega}_0$ и угловой скоростью собственного вращения $\bar{\omega}_1$, по правилу Жуковского получаем, что бегун давит вниз на дно чаши с силой $\bar{N}$, а на шарнир O — с такой же по числовому значению силой, но вверх. Так как $\theta=90°$, то по формуле (53) имеем

$$N=\frac{J_z\omega_1\omega_0}{l}=\frac{P\rho^2\omega_0^2 l}{glR}=\frac{P\rho^2\omega_0^2}{gR},$$

поскольку

$$J_z=\frac{P}{g}\rho^2.$$

Сила давления

$$Q=P+P\frac{\rho^2\omega_0^2}{gR}=P\left(1+\frac{\rho^2\omega_0^2}{gR}\right).$$

Давление на шарнир O от двух бегунов направлено вверх, и его числовое значение

$$Q_1=2N_1=2N=2P\frac{\rho^2\omega_0^2}{gR}.$$

Если бегун является однородным диском, то $\rho=R/\sqrt{2}$ и

$$Q=P\left(1+\frac{R\omega_0^2}{2g}\right);\quad Q_1=P\frac{R\omega_0^2}{g}.$$

Для получения больших давлений на дно чаши применяют бегуны большего радиуса, так как сила гироскопического давления пропорциональна радиусу бегуна.

§ 9. РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСКОПА

Как известно, уравновешенный (астатический) гироскоп может совершать регулярную прецессию по инерции без действия внешних сил. По приближенной теории получается, что прецессия может быть вызвана только действием внешних сил. Очевидно, допущения приближенной теории позволяют рассмотреть прецессионное движение гироскопа с точностью до некоторой регулярной прецессии, существовавшей до действия внешних сил. Если этой начальной прецессии по инерции нет, то приближенная теория находится в соответствии с точной теорией.

Рассмотрим случай регулярной прецессии гироскопа. Известно, что регулярной прецессией гироскопа называют такое его движение, при котором угловые скорости собственного вращения и прецессии постоянны, прецессия происходит вокруг оси постоянного направления и угол нутации, т. е. угол между осью собственного вращения и осью прецессии, тоже является постоянным.

Получим формулу для гироскопического момента при регулярной прецессии и рассмотрим ее следствия.

Гироскопический момент при регулярной прецессии

В случае регулярной прецессии мгновенная угловая скорость гироскопа

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2,$$

где $\bar{\omega}_1$ — собственная угловая скорость, направленная по оси гироскопа Oz; $\bar{\omega}_2$ — угловая скорость прецессии, направленная по неподвижной оси Oz_1 (рис. 150).

Если выбрать ось Ox в экваториальной плоскости эллипсоида инерции так, чтобы она лежала в плоскости осей Oz и Oz_1, то для проекции $\bar{\omega}$ на подвижные координатные оси $Oxyz$, жестко скрепленные с гироскопом, имеем:

$$\omega_x=\omega_2\sin\theta;\quad \omega_y=0;\quad \omega_z=\omega_1+\omega_2\cos\theta.$$

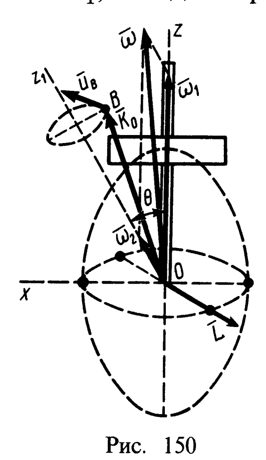


Рис. 150

Определим проекции вектора кинетического момента на оси Ox, Oy, Oz, которые являются главными осями инерции для точки O. Получаем:

$$K_x=J_x\omega_x=J_x\omega_2\sin\theta;$$

$$K_y=J_y\omega_y=0;$$

$$K_z=J_z\omega_z=J_z(\omega_1+\omega_2\cos\theta).$$

Следовательно, кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки O

$$\bar{K}_O = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k} = J_x \omega_2 \sin\theta\, \bar{i} + J_z (\omega_1 + \omega_2 \cos\theta) \bar{k}. \qquad (56)$$

Гироскопический момент $\bar{L}$ как момент сил инерции гироскопа можно вычислить по формуле

$$\bar{L} = -\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t = -\bar{u}_B.$$

При регулярной прецессии $\omega_1 = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, $\omega_2 = \mathrm{const}$; следовательно, $K_x = \mathrm{const}$, $K_y = 0$, $K_z = \mathrm{const}$, т. е. вектор кинетического момента $\bar{K}_O$ постоянен по модулю и изменяется только по направлению. Для того чтобы найти скорость конца этого вектора — точки B, надо знать угловую скорость вращения этого вектора вокруг неподвижной точки O.

Если рассмотреть плоскость, в которой лежат ось гироскопа Oz и ось прецессии Oz_1 (плоскость Oxz), то в случае регулярной прецессии ось прецессии Oz_1 является неподвижной. Лежащий в этой плоскости вектор $\bar{K}_O$ вращается вместе с этой плоскостью вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$, направленной по этой оси. Таким образом, по формуле, аналогичной формуле Эйлера для скорости точки тела при его сферическом движении,

$$\bar{u}_B = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O.$$

Тогда

$$\bar{L} = -\bar{u}_B = -\bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O = \bar{K}_O \times \bar{\omega}_2. \qquad (57)$$

Из формулы (57) следует, что момент $\bar{L}$ перпендикулярен плоскости Oxz, в которой лежат векторы $\bar{\omega}_2$ и $\bar{K}_O$, и, следовательно, параллелен оси Oy, совпадающей с линией узлов.

Если в (57) вместо $\bar{K}_O$ подставить его значение из (56), то

$$\bar{L} = J_x \omega_2 \sin\theta (\bar{i} \times \bar{\omega}_2) + J_z (\omega_1 + \omega_2 \cos\theta) (\bar{k} \times \bar{\omega}_2).$$

Гироскопический момент

$$L = -J_x \omega_2^2 \sin\theta \cos\theta + J_z (\omega_1 + \omega_2 \cos\theta) \omega_2 \sin\theta =$$
$$= [J_z \omega_1 + (J_z - J_x) \omega_2 \cos\theta] \omega_2 \sin\theta, \qquad (58)$$

так как

$$|\bar{i} \times \bar{\omega}_2| = \omega_2 \cos\theta; \quad |\bar{k} \times \bar{\omega}_2| = \omega_2 \sin\theta$$

и векторы $(\bar{i} \times \bar{\omega}_2)$ и $(\bar{k} \times \bar{\omega}_2)$ параллельны, но противоположны по направлению.

Приняв направление вектора $(\bar{k} \times \bar{\omega}_2)$ за положительное, после введения единичного вектора $\bar{\omega}_1^0 = \bar{k}$ имеем

$$\bar{L} = [J_z \omega_1 + (J_z - J_x) \omega_2 \cos\theta] (\bar{\omega}_1^0 \times \bar{\omega}_2). \qquad (59)$$

Формула (59) является выражением для *вектора гироскопического момента при регулярной прецессии.* Гироскопический момент, как это следует из (59), можно разложить на две составляющие $\bar{L}'$ и $\bar{L}''$, где

$$\bar{L}' = J_z \omega_1 (\bar{\omega}_1^0 \times \bar{\omega}_2) = J_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2; \qquad (60)$$

$$\bar{L}''=(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta(\bar{\omega}_1^0\times\bar{\omega}_2). \qquad (61)$$

Гироскопический момент $\bar{L}'$ совпадает с гироскопическим моментом, полученным по приближенной теории. Гироскопический момент $\bar{L}''$ является поправкой к гироскопическому моменту $\bar{L}'$ в случае точного вычисления кинетического момента при регулярной прецессии. Момент $\bar{L}''$ равен нулю, если $J_z=J_x$ (эллипсоид инерции является шаром), и при $\theta=90°$, т. е. когда ось гироскопа перпендикулярна оси прецессии.

Отметим, что $\bar{L}'$ и $\bar{L}''$ направлена в одну сторону, если $(J_z-J_x)\cos\theta>0$, и в противоположные стороны при $(J_z-J_x)\cos\theta<0$.

Регулярная прецессия по инерции

В случае регулярной прецессии без действия внешних сил, т. е. регулярной прецессии по инерции, имеем

$$L=L_O^{(e)}=0.$$

Отсюда, учитывая (58), получаем

$$L=[J_z\omega_1+(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta]\omega_2\sin\theta=0$$

и, следовательно,

$$\omega_2=\frac{J_z\omega_1}{(J_x-J_z)\cos\theta}. \qquad (62)$$

Таким образом, возможна регулярная прецессия по инерции с угловой скоростью, определяемой по формуле (62), если гироскоп не обладает шаровой симметрией $(J_z\neq J_x)$ и ось прецессии не перпендикулярна оси гироскопа.

Известно, что по инерции без действия сил может двигаться материальная точка с постоянной скоростью по прямой линии и вращаться твердое тело вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью. К этим случаям следует добавить *случай регулярной прецессии гироскопа по инерции.*

Итак, регулярная прецессия может происходить по инерции и быть вынужденной, т. е. происходящей под действием внешних сил. В приближенной теории рассматривается только вынужденная прецессия. В точной теории регулярной прецессии рассматривают обе эти прецессии.

Регулярная прецессия тяжелого гироскопа

Для тяжелого гироскопа

$$L=L_O^{(e)}=Pl\sin\theta$$

и, учитывая значение L, из (58) получаем

$$[J_z\omega_1+(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta]\omega_2\sin\theta=Pl\sin\theta.$$

Отсюда угловая скорость прецессии

$$\omega_2 = \frac{-J_z\omega_1 \pm \sqrt{J_z^2\omega_1^2 + 4(J_z - J_x)Pl\cos\theta}}{2(J_z - J_x)\cos\theta}. \qquad (63)$$

Таким образом, регулярная прецессия тяжелого гироскопа возможна, если

$$J_z^2\omega_1^2 + 4(J_z - J_x)Pl\cos\theta > 0. \qquad (64)$$

Условие (64) выполняется, если величина $J_z\omega_1$ достаточно велика. В этом случае, вычислив приближенное значение квадратного корня из (63) по биному Ньютона, ограничиваясь первыми степенями малых величин, получаем

$$\sqrt{J_z^2\omega_1^2 + 4(J_z - J_x)Pl\cos\theta} = J_z\omega_1\left[1 + \frac{4(J_z - J_x)Pl\cos\theta}{J_z^2\omega_1^2}\right]^{1/2} \approx$$

$$\approx J_z\omega_1\left[1 + \frac{2(J_z - J_x)Pl\cos\theta}{J_z^2\omega_1^2}\right].$$

Подставляя значение этого выражения в (63) и беря верхний и нижний знаки перед корнем, имеем два приближенных значения угловой скорости прецессии:

$$\omega_2^{(1)} = \frac{Pl}{J_z\omega_1}; \quad \omega_2^{(2)} = \frac{J_z\omega_1}{(J_x - J_z)\cos\theta}. \qquad (65)$$

Прецессия с угловой скоростью $\omega_2^{(1)}$ — медленная прецессия. Такая угловая скорость прецессии получается и по приближенной теории. Прецессия с угловой скоростью $\omega_2^{(2)}$ — быстрая прецессия. Ее получают, как и прецессию по инерции. Тяжелый гироскоп при выполнении условия (64) может совершать две прецессии — медленную и быструю, близкие к рассмотренным двум прецессиям с угловыми скоростями $\omega_2^{(1)}$ и $\omega_2^{(2)}$.

§ 10. УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ВОКРУГ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ

Представление об устойчивости вращения тела вокруг главных осей инерции можно составить на примере движения твердого тела, закрепленного в центре масс и находящегося под действием только силы тяжести и реакции закрепленной точки. Главный момент внешних сил относительно закрепленной точки в этом случае равен нулю.

Пусть оси координат Ox, Oy, Oz, скрепленные с движущимся телом, являются главными осями инерции для его неподвижной точки O. Динамические уравнения Эйлера для такого тела имеют вид

$$
\left.\begin{aligned}
J_x\dot{\omega}_x+(J_z-J_y)\omega_z\omega_y=0;\\
J_y\dot{\omega}_y+(J_x-J_z)\omega_x\omega_z=0;\\
J_z\dot{\omega}_z+(J_y-J_x)\omega_y\omega_x=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (66)
$$

Величины $\omega_x=\omega_y=0$, $\omega_z=\text{const}=\omega_0$ удовлетворяют уравнениям (66), т. е. эти значения ω_x, ω_y, ω_z являются решениями этих уравнений.

Пусть теперь телу сообщены малые возмущения в виде малых начальных угловых скоростей ω_{0x} и ω_{0y} вокруг осей Ox и Oy. Если величины ω_x и ω_y остаются малыми с изменением времени, то вращение вокруг главной оси инерции — оси вращения Oz — считают устойчивым. Если эти величины неограниченно возрастают, то вращение вокруг главной оси инерции неустойчиво. Предположив, что вращение вокруг оси Oz устойчиво, установим условия, которые определяют эту устойчивость. Если вращение вокруг оси Oz устойчиво, т. е. ω_x и ω_y малы, то в уравнениях (66) можно пренебречь слагаемыми с $\omega_x\omega_y$. Положив $\omega_z\approx\omega_0$, из (66) после отбрасывания малых второго порядка получаем

$$
\dot{\omega}_x+\frac{J_z-J_y}{J_x}\omega_0\omega_y=0;\quad \dot{\omega}_y+\frac{J_x-J_z}{J_y}\omega_0\omega_x=0. \qquad (67)
$$

Дифференциальные уравнения (67) путем дифференцирования и небольших преобразований приводим к виду

$$
\ddot{\omega}_x+\alpha\omega_x=0;\quad \ddot{\omega}_y+\alpha\omega_y=0, \qquad (68)
$$

где

$$
\alpha=\frac{(J_x-J_y)(J_z-J_x)}{J_xJ_y}\omega_0^2. \qquad (69)
$$

При $\alpha<0$ решения уравнений (68) имеют вид

$$
\omega_x=C_1e^{\sqrt{|\alpha|}\cdot t}+C_2e^{-\sqrt{|\alpha|}\cdot t};\quad \omega_y=C_3e^{\sqrt{|\alpha|}\cdot t}+C_4e^{-\sqrt{|\alpha|}\cdot t}.
$$

При $\alpha>0$ они выразятся в форме

$$
\omega_x=C'_1\cos\sqrt{\alpha}\cdot t+C'_2\sin\sqrt{\alpha}\cdot t;\quad \omega_y=C'_3\cos\sqrt{\alpha}\cdot t+C'_4\sin\sqrt{\alpha}\cdot t,
$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 — произвольные постоянные интегрирования. Следовательно, при $\alpha>0$ имеем устойчивость вращения вокруг главной оси инерции Oz. Условие $\alpha>0$ может выполняться в двух следующих случаях:

$$
J_z>J_y;\quad J_z>J_x \quad \text{и} \quad J_z<J_y;\quad J_z<J_x.
$$

Из этих условий следует, что вращение вокруг главной оси инерции Oz является устойчивым, если момент инерции относительно этой оси наибольший или наименьший. В случае $\alpha<0$ имеем неустойчивость. В этом случае J_z является средним по сравнению с J_x и J_y.

В гироскопических устройствах обычно применяют гироскопы, у которых момент инерции вокруг собственной оси вращения является наибольшим, т. е. гироскопы берутся в виде диска, а не цилиндра. Это, во-первых, при прочих равных условиях дает больший собственный кинетический момент, а во-вторых, как показывают исследования, ось вращения с наибольшим моментом инерции оказывается более устойчивой к действию сил сопротивления, зависящих линейно от угловой скорости вращения гироскопа.

ГЛАВА 9

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УДАРА

Ударом называют явление, при котором за малый промежуток времени, т. е. почти мгновенно, скорости части или всех точек системы изменяются на конечные величины по сравнению с их значениями непосредственно перед ударом или после него. Длительность удара составляет обычно десятые и меньшие части долей секунды.

Встречаются различные по характеру случаи ударных явлений. В простейших случаях удар проявляется как почти мгновенное наложение или снятие связей. Примером удара, связанного с мгновенным наложением связей, может служить столкновение поступательно движущегося тела с другим, например неподвижным, телом. Удар, обусловленный мгновенным снятием связей или их разрушением, можно представить как отрыв части тела при его быстром вращении вокруг оси и т. п. Могут быть ударные явления более сложного характера, связанные, например, с периодическим наложением и снятием связей (ковка, штамповка и др.).

Изменение скоростей точек при ударе на конечные величины связано с большими ударными ускорениями этих точек, возникновение которых требует больших ударных сил. Если $\bar{F}$ — ударная сила, τ — длительность, или время удара, то характерный график изменения ударной силы за время удара от момента t_1 до момента t_2 имеет вид, показанный на рис. 151. Ударная сила быстро возрастает от нуля в момент начала удара до максимального значения, затем так же

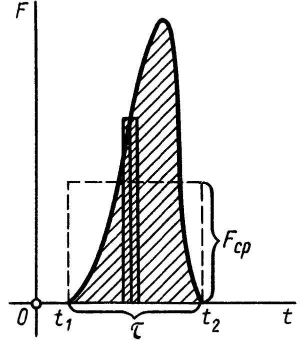


Рис. 151

быстро уменьшается обычно по другому закону до нуля в конце удара. Во многих случаях не требуется детального знания закона изменения ударной силы. Достаточно знать только суммарный импульс этой быстро меняющейся силы за время удара или ударный импульс. *Ударным импульсом* называют векторную величину

$$\bar{S} = \int_0^\tau \bar{F} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Ударный импульс графически изображается на рисунке заштрихованной площадью, ограниченной кривой линией изменения ударной силы, и осью абсцисс, по которой откладывается время.

Иногда рассматривают среднюю ударную силу — постоянную в течение удара силу, которая за время удара дает такой же ударный импульс, как и переменная ударная сила. Средняя ударная сила определяется из соотношения

$$F_{\text{ср}}\tau = S. \tag{2}$$

Большие ударные силы дают конечные ударные импульсы за малое время удара. Средняя ударная сила, согласно ее определению, имеет величину порядка $1/\tau$, т. е. при малом τ является величиной большой.

Импульс неударной силы, например силы тяжести тела, за время удара имеет порядок величины τ, т. е. является величиной малой по сравнению с ударными импульсами. Поэтому *импульсами неударных сил можно пренебрегать по сравнению с ударными импульсами.*

При ударе двух тел в месте их соприкосновения возникают деформации и, следовательно, перемещения точек тел, обусловленные деформациями. Вследствие малости деформаций по сравнению с перемещениями точек тел за конечный промежуток времени перемещения точек тел за время удара являются величинами малыми. В общем случае, если $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость за время удара какой-либо точки системы, испытывающей удар, то перемещение этой точки имеет порядок величины τ, так как средняя скорость есть величина конечная. Поэтому *перемещениями точек за время удара можно пренебрегать*. Считают, что за время удара точки системы не успевают изменить свое положение, а следовательно, не изменяются радиусы-векторы точек и их координаты. Если, например, тело падает на спиральную пружину, то за время удара величина перемещения тела равна сжатию пружины за это время. Этим перемещением можно пренебречь по сравнению, например, с перемещением тела от начала удара тела до момента наибольшей деформации пружины. При ударе пружину можно считать твердым телом в приближенных расчетах при рассмотрении перемещения тела за время удара.

Явление удара широко используется в технике при ковке, штамповке, забивке свай и т. д. Это же явление часто является нежелательным, особенно при ударе деталей в машинах друг о друга вследствие люфтов, при ударе колес транспорта о неровности дороги, стыки рельсов и т. п.

Многие величины, характеризующие удар, с достаточной точностью могут быть получены из общих теорем динамики. Рассмотрим особенности применения этих теорем к явлению удара.

§ 2. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС ДЛЯ УДАРА. ТЕОРЕМА КЕЛЬВИНА

Пусть до удара точка M массой m двигалась по участку траектории AM, имея непосредственно перед ударом скорость $\bar{v}$ (рис. 152). Под действием ударной силы $\bar{F}$ и неударной $\bar{F}^*$ точка изменила скорость, которая сразу после удара стала $\bar{u}$. После удара точка продолжает двигаться по участку траектории MB. Удар точки M характеризуется почти мгновенным изменением ее скорости от $\bar{v}$ до $\bar{u}$ по модулю и направлению и, следовательно, в общем случае резким изломом ее траектории в момент удара. По теореме об изменении количества движения для точки в интегральной форме имеем

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\int_0^\tau \bar{F}\,dt+\int_0^\tau \bar{F}^*\,dt,$$

где τ — время удара. Обозначая импульс ударной силы $\bar{S}$ и пренебрегая импульсом неударной силы за время удара по сравнению с ударным импульсом, получаем следующую **теорему об изменении количества движения точки при ударе**:

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\bar{S}, \tag{3}$$

т. е. *изменение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке*. В проекциях на оси координат имеем:

$$mu_x-mv_x=S_x;\ \ mu_y-mv_y=S_y;\ \ mu_z-mv_z=S_z. \tag{3'}$$

Изменение скорости точки при ударе $\bar{u}-\bar{v}=\bar{S}/m$, т. е. оно параллельно ударному импульсу

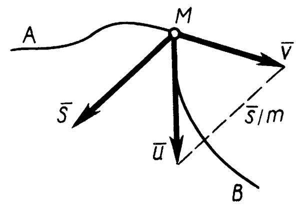


Рис. 152

Для любой механической системы, состоящей из N точек, разделим ударные силы на внешние и внутренние. Применяя теорему об изменении количества движения для удара к каждой точке системы, получаем

$$m_k\bar{u}_k - m_k\bar{v}_k = \bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(i)}, \quad i=1, 2, ..., N,$$

где $\bar{S}_k^{(e)}$ и $\bar{S}_k^{(i)}$ — ударные импульсы внешних и внутренних сил. Импульсами неударных сил за время удара пренебрегаем. Суммируя по всем точкам системы, имеем

$$\sum_k m_k\bar{u}_k - \sum_k m_k\bar{v}_k = \sum_k \bar{S}_k^{(e)} + \sum_k \bar{S}_k^{(i)}.$$

Обозначая количества движения системы после и до удара соответственно

$$\bar{Q} = \sum_k m_k\bar{u}_k; \quad \bar{Q}_0 = \sum_k m_k\bar{v}_k$$

и учитывая, что по свойству внутренних сил, в том числе и ударных, $\sum_k \bar{S}_k^{(i)} = 0$, имеем

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_k \bar{S}_k^{(e)}. \tag{4}$$

Соотношение (4) выражает теорему об изменении количества движения системы при ударе: *изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы*. В проекциях на координатные оси получаем:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_k S_{kx}^{(e)}; \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_k S_{ky}^{(e)}; \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_k S_{kz}^{(e)}. \tag{4'}$$

Применяя формулу для вычисления количества движения системы через массу системы и скорость центра масс, имеем

$$\bar{Q} = M\bar{u}_C; \quad \bar{Q}_0 = M\bar{v}_C,$$

где M — масса системы; $\bar{v}_C$ и $\bar{u}_C$ — скорости центра масс до и после удара. С учетом этого из (4) получаем следующую теорему о движении центра масс системы:

$$M(\bar{u}_C - \bar{v}_C) = \sum_k \bar{S}_k^{(e)}. \tag{5}$$

В проекциях на координатные оси она примет форму

$$\left.\begin{aligned} M(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum_k S_{kx}^{(e)}; \\ M(u_{Cy} - v_{Cy}) &= \sum_k S_{ky}^{(e)}; \\ M(u_{Cz} - v_{Cz}) &= \sum_k S_{kz}^{(e)}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Частные случаи. 1. Если $\sum_k \bar{S}_k^{(e)} = 0$, то из (4) и (5) следует

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0; \quad \bar{u}_C = \bar{v}_C, \tag{6}$$

т. е. *количество движения системы и скорость центра масс не изменяются, если векторная сумма внешних ударных им-*

пульсов, приложенных к точкам системы, равна нулю. Это законы сохранения количества движения и движения центра масс системы при ударе.

2. Если имеется координатная ось, например Ox, для которой $\sum_k S_{kx}^{(e)}=0$, то из (4′) и (5′) получаем следующие законы сохранения проекции количества движения и движения центра масс:

$$Q_x=Q_{0x};\quad u_{Cx}=v_{Cx}. \qquad (6')$$

Из (3) можно получить теорему Кельвина для работы ударной силы за время удара. Непосредственно вычислить работу ударной силы за время удара трудно, так как ударные силы очень большие, а перемещения точек системы за время удара малы и ими пренебрегают. Теорема Кельвина позволяет выразить работу силы через импульс силы и среднее значение скоростей точки, т. е. величины конечные при ударе. Умножив (3) последовательно на $\bar{u}$ и $\bar{v}$ скалярно, получим

$$mu^2-m\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{S}\cdot\bar{u};\quad m\bar{u}\cdot\bar{v}-mv^2=\bar{S}\cdot\bar{v}.$$

После сложения этих равенств и деления на 2 имеем

$$mu^2/2-mv^2/2=\frac{1}{2}\bar{S}\cdot(\bar{v}+\bar{u}).$$

По теореме об изменении кинетической энергии для точки левая часть этого равенства равна работе A, приложенной к точке силы $\bar{F}$. Поэтому

$$A=\frac{1}{2}\bar{S}\cdot(\bar{u}+\bar{v}). \qquad (7)$$

Это и есть теорема Кельвина: *работа силы, приложенной к точке, за какой-либо промежуток времени равна скалярному произведению импульса силы за тот же промежуток времени на полусумму начальной и конечной скоростей точки.*

Теорема Кельвина применима ко всем случаям движения точки, в том числе и к явлению удара.

Для механической системы теорема Кельвина получается из (7) путем суммирования по всем точкам системы, т. е.

$$\sum_k A_k=\frac{1}{2}\sum_k \bar{S}_k\cdot(\bar{u}_k+\bar{v}_k), \qquad (8)$$

где $\bar{S}_k=\bar{S}_k^{(e)}+\bar{S}_k^{(e)}$ — импульс внешней и внутренней сил, действующих на k-ю точку.

§ 3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ПРИ УДАРЕ

Пусть материальная точка под действием ударного импульса испытывает удар. По теореме об изменении количества движения для точки имеем

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\bar{S},$$

где $\bar{v}$ и $\bar{u}$ — скорости точки до и после удара. Умножим это векторное равенство слева векторно на радиус-вектор точки $\bar{r}$, который один и тот же непосредственно перед ударом и после него. Получаем

$$\bar{r}\times m\bar{u}-\bar{r}\times m\bar{v}=\bar{r}\times\bar{S}. \tag{9}$$

Это соотношение выражает теорему об изменении кинетического момента для точки при ударе. Применяя ее для каждой из N точек системы, имеем

$$\bar{r}_k\times m_k\bar{u}_k-\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k=\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(e)}+\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(i)},\quad k=1,\,2,\,...,\,N, \tag{9'}$$

где $\bar{S}_k^{(e)}$ и $\bar{S}_k^{(i)}$ — внешний и внутренний ударные импульсы, действующие на k-ю точку системы. Суммируя (9′) по всем точкам системы и вводя обозначения кинетических моментов системы до и после удара и векторной суммы моментов внешних ударных импульсов относительно точки O, получим следующую теорему об изменении кинетического момента системы при ударе:

$$\bar{K}_O-\bar{K}_O^{(0)}=\sum_k\bar{M}_O\left(\bar{S}_k^{(e)}\right), \tag{10}$$

так как

$$\bar{K}_O=\sum_k\bar{r}_k\times m_k\bar{u}_k;\quad \bar{K}_O^{(0)}=\sum_k\bar{r}_k+m_k\bar{v}_k;$$

$$\sum_k\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(e)}=\sum_k\bar{M}_O\left(\bar{S}_k^{(e)}\right);\quad \sum_k\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(i)}=\sum_k\bar{M}_O\left(\bar{S}_k^{(i)}\right)=0$$

по свойству внутренних сил. Таким образом, *изменение кинетического момента системы относительно точки за время удара равно векторной сумме моментов относительно той же точки внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.* В проекциях на оси координат векторное равенство (10) принимает следующую форму:

$$K_x-K_x^{(0)}=\sum_k M_x\left(\bar{S}_k^{(e)}\right);\quad K_y-K_y^{(0)}=\sum_k M_y\left(\bar{S}_k^{(e)}\right);$$
$$K_z-K_z^{(0)}=\sum_k M_z\left(\bar{S}_k^{(e)}\right). \tag{10'}$$

Если удар испытывает твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Oz, и ω_0 и ω — угловые скорости до и после удара, то, учитывая, что

$$K_z=J_z\omega;\quad K_z^{(0)}=J_z\omega_0,$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения, из (10) получаем следующее изменение угловой скорости тела:

$$J_z(\omega-\omega_0)=\sum_k M_z\left(\bar{S}_k^{(e)}\right),$$

или

$$\omega-\omega_0=\sum_k M_z\left(\bar{S}_k^{(e)}\right)/J_z. \tag{11}$$

В (11) не входят моменты ударных импульсов реакций закрепленных точек оси вращения, так как они пересекают ось вращения, если не возникают ударные импульсы сил трения в местах закрепления оси.

Частные случаи. 1. Если $\sum_k \bar{M}_O(\bar{S}_k^{(e)})=0$, то из (10) следует закон сохранения кинетического момента системы относительно точки при ударе:

$$\bar{K}_O=\bar{K}_O^{(0)}=\overrightarrow{\text{const}}. \tag{12}$$

2. Если имеется ось, например Ox, относительно которой $\sum_k M_x(\bar{S}_k^{(e)})=0$, то из (10′) получаем закон сохранения кинетического момента системы относительно оси при ударе:

$$K_x=K_x^{(0)}=\text{const}. \tag{12′}$$

§ 4. УДАР ТОЧКИ О НЕПОДВИЖНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Прямой удар. Удар называют *прямым*, если скорость точки $\bar{v}$ перед ударом направлена по нормали к поверхности в точке удара M (рис. 153). После удара материальная точка отделится от поверхности, имея в общем случае скорость $\bar{u}$, направленную тоже по нормали к поверхности.

Для оценки ударных свойств поверхности и тела, принимаемого за материальную точку, введем коэффициент восстановления k. Коэффициентом восстановления называют отношение числового значения скорости точки после удара к числовому значению ее до удара, т. е.

$$k=|\bar{u}|/|\bar{v}|=u/v. \tag{13}$$

Если $k=1$, то удар называется *абсолютно упругим*. В этом случае $u=v$ и при ударе точки изменяется только направление скорости на противоположное. При $k=0$ удар считается *абсолютно неупругим*. Скорость точки при таком ударе о неподвижную поверхность после удара $u=0$. В более общем случае абсолютно неупругого удара точки по движущейся поверхности точка после удара движется вместе с соответствующей точкой поверхности. В случаях, при которых $0<k<1$, удар называют *просто упругим* (или *частично упругим*).

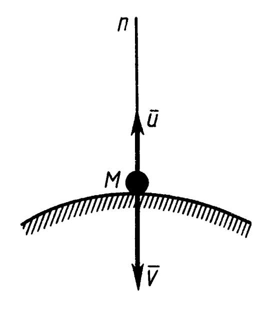


Рис. 153

Процесс удара точки о неподвижную поверхность можно разделить на ф а з у д е ф о р м а ц и и и ф а з у в о с с т а н о в л е н и я. Фаза деформации продолжительностью τ_1 отсчитывается от момента начала удара до момента наибольшей деформации тела, которое принимается за материальную

точку. В конце этой фазы скорость точки при ударе о неподвижную поверхность равна нулю. В течение фазы восстановления τ_2 материальная точка от момента наибольшей деформации до ее отделения от поверхности частично восстанавливает свою первоначальную форму при упругом ударе. При абсолютно упругом ударе форма тела восстанавливается полностью. В случае абсолютно неупругого удара форма тела совсем не восстанавливается, удар имеет только одну фазу деформации. Общее время удара $\tau=\tau_1+\tau_2$. При абсолютно неупругом ударе $\tau_2=0$ и $\tau=\tau_1$.

На точку при ее прямом ударе о неподвижную поверхность со стороны поверхности действует ударная сила реакции поверхности $\bar{N}$. Она изменяется по величине в течение удара, но все время направлена по нормали к поверхности.

Применим к первой и второй фазам удара точки теорему об изменении количества движения в проекции на направление внешней нормали к поверхности, за которое принимаем направление, противоположное скорости точки до удара. Для первой фазы имеем

$$0-(-mv)=S_1,$$

где $S_1=\int_0^{\tau_1} N\mathrm{d}t$ — ударный импульс силы реакции поверхности за первую фазу удара. Для второй фазы соответственно

$$mu-0=S_2,$$

где $S_2=\int_0^{\tau_2} N\mathrm{d}t$ — ударный импульс силы реакции поверхности за вторую фазу удара. Действием импульсов неударных сил за время удара, например силы тяжести, пренебрегаем.

Итак, имеем

$$mv=S_1;\quad mu=S_2.$$

Отсюда

$$k=u/v=S_2/S_1. \tag{14}$$

Формула (14) дает выражение коэффициента восстановления через ударные импульсы: *коэффициент восстановления при прямом ударе точки о неподвижную поверхность равен отношению числовых значений ударных импульсов за вторую и первую фазы удара.* Выражение коэффициента восстановления через ударные импульсы, полученное при ударе точки о неподвижную поверхность, считают справедливым и в случае прямого удара точки по движущейся поверхности.

Полный ударный импульс S складывается из импульсов S_1 и S_2, т. е.

$$S=S_1+S_2=mv\left(1+\frac{u}{v}\right)=mv(1+k).$$

При $k=1$ $S=2mv$; при $k=0$ $S=mv$. Ударный импульс при абсолютно неупругом ударе в два раза меньше ударного импульса при абсолютно упругом ударе.

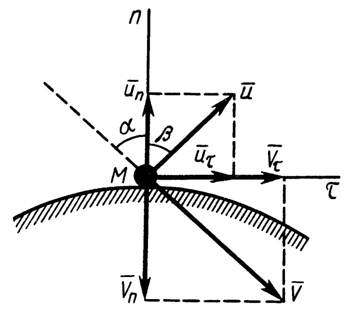


Рис. 154

Косой удар. Удар называется непрямым или косым, если скорость точки перед ударом направлена под углом α к нормали поверхности. При $\alpha=0$ имеем прямой удар. Угол α (рис. 154) называют *углом падения*. В общем случае скорость точки $\bar{u}$ после удара составит с нормалью к поверхности угол β, который называют *углом отражения*.

Разложим скорости до и после удара на нормальные и касательные составляющие:

$$\bar{v}=\bar{v}_n+\bar{v}_\tau;\quad \bar{u}=\bar{u}_n+\bar{u}_\tau.$$

Коэффициентом восстановления при косом ударе называют величину $k=|\bar{u}_n|/|\bar{v}_n|=u_n/v_n$. Применение теоремы об изменении количества движения в проекции на нормаль к поверхности приводит к выражению коэффициента восстановления через ударные импульсы

$$k=u_n/v_n=S_{2n}/S_{1n},$$

где S_{2n} и S_{1n} — проекции ударных импульсов на нормаль к поверхности за вторую и первую фазы удара.

В случае не идеально гладкой поверхности $u_\tau<v_\tau$. В дальнейшем принимаем, что поверхность не обладает ударным трением и поэтому $u_\tau=v_\tau$. В этом случае

$$\operatorname{tg}\beta=u_\tau/u_n=v_\tau/u_n;\qquad \operatorname{tg}\alpha=v_\tau/v_n,$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha.$$

Эта формула выражает зависимость между углом падения и углом отражения при различных коэффициентах восстановления и отсутствии ударного трения.

Экспериментальное определение коэффициента восстановления. Коэффициент восстановления можно определить экспериментально, измеряя высоту, на которую поднимется тело, обычно в форме небольшого шара, после прямого удара о поверхность (рис. 155) при падении с заданной высоты. Если шарик падает на неподвижную поверхность с высоты h_1, то его скорость непосредственно перед ударом $v=\sqrt{2gh_1}$. Сразу после удара скорость u шарика через высоту подъема его над поверхностью выражается зависимостью $u=\sqrt{2gh_2}$. Для коэффициента восстановления имеем

$$k=u/v=\sqrt{h_2/h_1}.$$

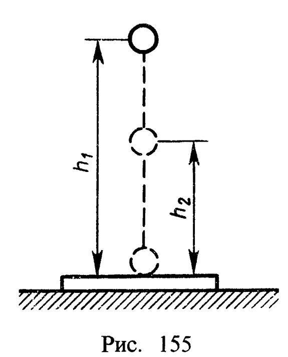


Рис. 155

Измеряя h_2 при заданном h_1, получают значения коэффициентов восстановления для различных материалов шарика и поверхности.

Многочисленные опыты показали, что коэффициент восстановления зависит не только от материала соударяющихся тел, но и от их масс, формы тел, скоростей соударения и других факторов. Использование коэффициента восстановления в расчетах (в предположении, что он зависит только от материала соударяющихся тел) допустимо лишь в очень грубом приближении к действительности. В более точных расчетах следует учитывать не только деформации, возникающие при ударе, но в некоторых случаях и процесс их возникновения и восстановления. Учет деформаций при ударе производится в задачах теории упругости. Методы теории упругости позволяют более глубоко проникать в явления удара. В теоретической механике обычно рассматриваются предельные случаи абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.

§ 5. ТЕОРЕМА КАРНО

При абсолютно упругом ударе точки о неподвижную поверхность в отсутствие ударного трения скорость точки может изменяться только по направлению. Числовое значение ее остается неизменным. Кинетическая энергия точки и системы точек, находящихся в таких условиях, не изменяется за время удара. При упругом и абсолютно неупругом ударах кинетическая энергия изменяется.

Установим изменение кинетической энергии в случае абсолютно неупругого удара при мгновенном наложении связей для точки и системы в отсутствие ударного трения. По теореме об изменении количества движения для точки (рис. 156) имеем

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\bar{S}, \tag{15}$$

где m — масса точки; $\bar{v}$ и $\bar{u}$ — ее скорости непосредственно до и после удара; $\bar{S}$ — ударный импульс от действия поверхности. При отсутствии ударного трения ударный импульс направлен по нормали к поверхности. Скорость точки после такого удара направлена по касательной к поверхности, т. е. ее проекция на нормаль $u_n=0$. В рассматриваемом случае ударный импульс $\bar{S}$ и скорость точки после удара $\bar{u}$ взаимно перпендикулярны и поэтому удовлетворяют условию

$$\bar{S}\cdot\bar{u}=0.$$

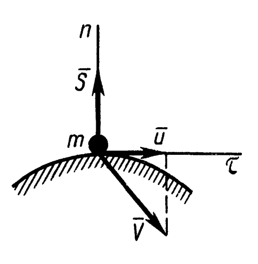


Рис. 156

Учитывая это, умножим обе части (15) скалярно на $\bar{u}$. Получим вспомогательное соотношение

$$-m\bar{v}\cdot\bar{u}+m\bar{u}^2=0. \qquad (16)$$

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия точки уменьшится на $m\bar{v}^2/2-m\bar{u}^2/2$. Добавляя в это выражение величину, равную нулю в форме (16), получим

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mu^2}{2}=\frac{m\bar{v}^2}{2}-\frac{m\bar{u}^2}{2}+\left(-m\bar{v}\cdot\bar{u}+m\bar{u}^2\right)=$$

$$=\frac{m\bar{v}^2}{2}+\frac{m\bar{u}^2}{2}-m\bar{v}\cdot\bar{u}=\frac{m}{2}\left(\bar{v}-\bar{u}\right)^2.$$

Получена теорема Карно для точки о потере кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе и отсутствии ударного трения:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mu^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\bar{v}-\bar{u}\right)^2. \qquad (17)$$

Векторную величину $\bar{v}-\bar{u}$ называют *потерянной скоростью*. Теорему Карно для точки можно сформулировать в следующей форме: *потеря кинетической энергии точки при абсолютно неупругом ударе и отсутствии ударного трения в случае мгновенного наложения связей равна кинетической энергии от потерянной скорости.*

Имея (17) для точки, получим теорему Карно для системы в случае абсолютно неупругого удара и отсутствия ударного трения. Необходимо при этом, чтобы связи для точек системы, испытывающих удар, создавали ударные импульсы $\bar{S}_k$, перпендикулярные скоростям точек после удара $\bar{u}_k$, т. е. чтобы для каждой точки выполнялось условие $\bar{S}_k\cdot\bar{u}_k=0$. Тогда для каждой точки справедлива теорема (17)

$$\frac{m_k v_k^2}{2}-\frac{m_k u_k^2}{2}=\frac{m_k}{2}\left(\bar{v}_k-\bar{u}_k\right)^2, \qquad (17')$$

где $\bar{v}_k-\bar{u}_k$ — потерянная скорость k-й точки системы. Суммируя (17′) по всем точкам системы и обозначая кинетическую энергию системы до удара T_0, а после удара — T, получим

$$T_0-T=\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\bar{v}_k-\bar{u}_k\right)^2,$$

$$\text{где}\quad T_0=\sum_k \frac{m_k v_k^2}{2};\qquad T=\sum_k \frac{m_k u_k^2}{2}. \qquad (18)$$

Для справедливости теоремы Карно для системы при мгновенном наложении связей вместо условия $\bar{S}_k \cdot \bar{u}_k = 0$ для каждой точки достаточно выполнения менее ограничительного условия

$$\sum_k \bar{S} \cdot \bar{u}_k = 0.$$

Получена теорема Карно для системы: *потеря кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе в случае мгновенного наложения связей и отсутствия ударного трения равна кинетической энергии от потерянных скоростей точек системы.*

Теорему Карно для точки и системы можно получить также для удара, который возникает при мгновенном снятии связей. При этом кинетическая энергия после удара больше кинетической энергии до удара. Потеря кинетической энергии становится отрицательной. Ударный импульс $\bar{S}_k$ при снятии связи должен быть перпендикулярен скорости точки $\bar{v}_k$ до удара, так как точка двигалась согласно со связью до удара при абсолютно неупругом ударе. Вспомогательное соотношение для точки при снятии связей принимает форму

$$m\bar{u} \cdot \bar{v} - m\bar{v}^2 = 0, \qquad (16')$$

а теорема Карно в этом случае имеет вид

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\bar{v} - \bar{u})^2.$$

Для системы она выразится в форме

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2. \qquad (18')$$

При этом для каждой точки системы, испытывающей удар, должно выполняться условие $\bar{S}_k \cdot \bar{v}_k = 0$, или $\sum_k \bar{S}_k \cdot \bar{v}_k = 0$.

§ 6. УДАР ДВУХ ТЕЛ

В прикладных задачах обычно встречается удар двух тел, движущихся поступательно или вращающихся вокруг параллельных или совпадающих осей. Рассмотрим некоторые особенности применения общих теорем и теоремы Карно в этих случаях.

Пусть два тела *1* и *2* массами m_1 и m_2 непосредственно до и после удара движутся поступательно (рис. 157). Их скорости перед ударом $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$; после удара — соответственно $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$. У соударяющихся тел отсутствует ударное трение. Ударные импульсы в этом случае направлены по общей

нормали в месте соприкосновения, т. е. по так называемой линии удара. В случае **центрального** удара линия удара проходит через центры масс тел. Применим теорему об изменении количества движения при ударе к каждому телу в отдельности. Имеем

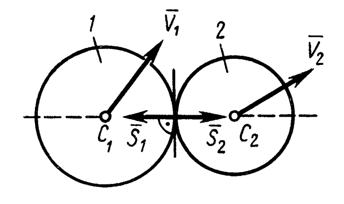


Рис. 157

$$m_1\bar{u}_1 - m_1\bar{v}_1 = \bar{S}_1;\quad m_2\bar{u}_2 - m_2\bar{v}_2 = \bar{S}_2. \tag{19}$$

При ударе двух тел $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$ по закону о равенстве действия и противодействия, поэтому из (19) получаем

$$m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2, \tag{20}$$

т. е. *количество движения при ударе двух тел не изменяется.* Если удар абсолютно неупругий, то скорости тел после удара одинаковы и равны $\bar{u}$. Из (20) тогда имеем

$$\bar{u} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{21}$$

При **прямом ударе** двух тел скорости их $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ до удара направлены по линии удара и тогда из (21), проецируя на линию удара, получаем

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{21'}$$

Здесь u, v_1, v_2 — алгебраические значения скоростей. Для того чтобы удар произошел, скорости тел $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ должны быть направлены в одну и ту же сторону, а их числовые значения — удовлетворять условию $v_1 > v_2$.

Для прямого центрального удара двух тел к каждому телу для первой и второй фаз применим теорему об изменении количества движения в проекции на ось Ox, направленную по линии удара (рис. 158). Получим

$$\left.\begin{aligned} &m_1 u - m_1 v_1 = -S'_1;\\ &m_1 u_1 - m_1 u = -S''_1;\\ &m_2 u - m_2 v_2 = -S'_2;\\ &m_2 u_2 - m_2 u = S''_2;\\ &S'_1 = S'_2;\quad S''_1 = S''_2, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где u — общая скорость тел в конце первой фазы; S'_1, S'_2 и S''_1, S''_2 — ударные импульсы соответственно за первую и вторую фазы удара. К уравнениям (22) следует присоединить выражение для коэффициента восстановления через ударные импульсы. Имеем

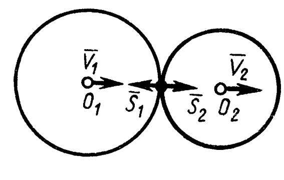


Рис. 158

$$k = S_1''/S_1' = S_2''/S_2'. \qquad (22')$$

Получили семь алгебраических уравнений (22) и (22′), из которых можно определить u, u_1, u_2, S_1', S_2', S_1'', S_2'', если известны скорости до удара v_1, v_2 и коэффициент восстановления k. Из уравнений (22) и (22′), в частности, можно получить формулы

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}, \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 - v_1 &= -(1+k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2); \\ u_2 - v_2 &= (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Используя (22) и (22′) и следствия из них, можно вычислить потерю кинетической энергии тел $T_0 - T$ при ударе:

$$T_0 - T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - k^2)(v_1 - v_2)^2. \qquad (25)$$

При абсолютно упругом ударе двух тел $k = 1$ и $T_0 = T$, т. е. потери кинетической энергии не происходит. При абсолютно неупругом ударе $k = 0$ и

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \qquad (25')$$

Если использовать потерянные телами за время удара скорости $v_1 - u$ и $v_2 - u$, то потерю кинетической энергии можно также получить в форме теоремы Карно для удара двух тел:

$$T_0 - T = \frac{m_1}{2}(v_1 - u)^2 + \frac{m_2}{2}(v_2 - u)^2. \qquad (25'')$$

При абсолютно неупругом ударе двух поступательно движущихся тел для каждого тела налагаемая связь не является стационарной и условия $\bar S_1 \cdot \bar u = 0$ и $\bar S_2 \cdot \bar u = 0$ по отдельности не выполняются. Они использовались при выводе теоремы Карно для системы. Но выполняется условие для двух тел

$$\bar S \cdot \bar u = \bar S_1 \cdot \bar u + \bar S_2 \cdot \bar u = (\bar S_1 + \bar S_2) \cdot \bar u = 0, \qquad (26)$$

так как

$$\bar S = \bar S_1 + \bar S_2 = 0,$$

поэтому теорема Карно (25″) остается справедливой. Ее можно получить непосредственно преобразованием потерянной энер-

гии, применяя следствия из (22) и (22′) без использования условия (26). Условие (26) для удара двух поступательно движущихся тел расширяет область применения теоремы Карно.

Из теоремы Карно (25″) для двух тел можно получить общую скорость тел после удара при прямом центральном ударе этих тел:

$$u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

Частные случаи. 1. Пусть m_1, m_2 и v_1, v_2 — соответственно массы и скорости первого и второго тела до удара, причем $v_2=0$.

Кинетическая энергия тел до удара в этом случае

$$T_0=m_1v_1^2/2.$$

Общая скорость после абсолютно неупругого прямого удара

$$u=m_1v_1/(m_1+m_2).$$

Кинетическая энергия тел после удара

$$T=(m_1+m_2)\,\frac{u^2}{2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\,T_0. \tag{27}$$

Потеря кинетической энергии, затраченная на деформацию тел,

$$T_0-T=\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)T_0=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,T_0. \tag{28}$$

Если $m_2\gg m_1$, то, полагая $m_2/(m_1+m_2)\approx 1$, согласно (28), имеем

$$T_0-T\approx T_0,$$

т. е. почти вся энергия тел, которую они имели до удара, затрачивается на деформацию тел. Такой случай имеет место при ковке и в других аналогичных случаях. В этом случае m_2 — масса наковальни вместе с поковкой (они покоятся перед ударом), а m_1 и v_1 — соответственно масса и скорость молота до удара по поковке. Энергия тел при ковке, которая затрачивается на преодоление различных сопротивлений при последующем движении,

$$T=\frac{m_1}{m_1+m_2}\,T_0\approx 0,$$

т. е. на преодоление сопротивлений энергия не тратится. Очевидно, чем больше m_2 по сравнению с m_1, тем эффективнее работа молота.

2. Если $m_1\gg m_2$, то для потери кинетической энергии на сам удар, считая $m_2/(m_1+m_2)\approx 0$, имеем

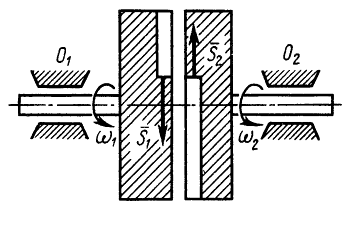


Рис. 159

$$T_0 - T = \frac{m_2}{m_1+m_2} T_0 \approx 0.$$

В этом случае потери энергии на удар почти нет и вся первоначальная энергия затрачивается на преодоление сопротивления движению тел после удара, так как

$$T = \frac{m_1}{m_1+m_2} T_0 \approx T_0.$$

Такой случай имеет место при забивке свай, костылей, гвоздей и т. п. Для наибольшей эффективности этих процессов должно выполняться условие $m_1 \gg m_2$. В этом случае m_1 — масса бабы или кувалды (молотка), v_1 — их скорость до удара, а m_2 и $v_2 = 0$ — соответственно масса сваи или костыля (гвоздя) и скорость до удара. Их масса, чтобы рационально использовалась энергия, должна быть много меньше массы бабы или кувалды. Вся кинетическая энергия бабы или кувалды при таком ударе не тратится на деформации при ударе, а передается свае или костылю, которые движутся вместе с забивающими их бабой и кувалдой. Эта энергия расходуется на преодоление сопротивления движению сваи или костыля при последующем движении в среде, в которую они забиваются.

При рассмотрении удара двух тел, вращающихся вокруг одной оси или параллельных осей, следует применять теорему об изменении кинетического момента к каждому телу или теорему Карно. При применении теоремы об изменении кинетического момента к двум телам вместе при вращении тел вокруг параллельных осей войдут моменты неизвестных ударных импульсов в местах закрепления по крайней мере одной из осей вращения. Эти моменты сами являются неизвестными. Применение общих теорем при ударе к одному телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, рассмотрено в следующем параграфе. Здесь отметим только некоторые особенности применения теоремы Карно к системе двух вращающихся тел.

При вращении двух тел вокруг одной оси (рис. 159) O_1O_2 с угловыми скоростями до удара ω_1 и ω_2 в одном и том же направлении и моментами инерции относительно этой оси J_1 и J_2 можно применить теорему Карно, если удар тел выступами при сближении абсолютно неупругий. Здесь выполняется условие применимости этой теоремы для двух тел $\bar{S} \cdot \bar{u} = 0$, так как $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 0$, хотя для каждого тела в отдельности $\bar{S}_1 \cdot \bar{u} \neq 0$ и $\bar{S}_2 \cdot \bar{u} \neq 0$. Согласно теореме Карно, имеем

$$\frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} - (J_1 + J_2)\frac{\omega^2}{2} = \frac{J_1}{2}(\omega_1 - \omega)^2 + \frac{J_2}{2}(\omega_2 - \omega)^2, \qquad (29)$$

где ω — общая угловая скорость тел после удара; $\omega_1-\omega$ и $\omega_2-\omega$ — потерянные угловые скорости тел. После несложных преобразований из (29) получим следующую формулу для угловой скорости тел после удара:

$$\omega=\frac{J_1\omega_1+J_2\omega_2}{J_1+I_2}. \qquad (30)$$

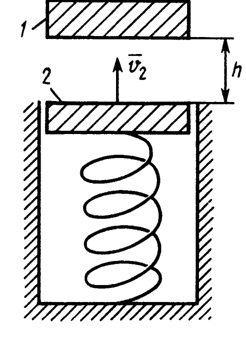


Рис. 160

Это же значение ω можно получить применяя теорему об изменении кинетического момента относительно оси вращения для двух тел, так как в этом случае сумма моментов ударных импульсов от действия подшипников и от выступов относительно оси вращения равна нулю, если отсутствует ударное трение в подшипниках и на выступах.

Если тела до удара вращались в противоположных направлениях, то в (30) следует брать алгебраические значения угловых скоростей тел.

Пример 1. Груз *1* массой m_1 до удара о плиту *2* массой m_2 падал с высоту h без начальной скорости (рис. 160). Плита *2*, закрепленная на пружине с коэффициентом жесткости c, совершает колебания и в момент удара имеет скорость $v_2=\sqrt{2gh}$, направленную вверх. Пружина при этом деформирована на величину $\lambda_0=\frac{m_2 g}{c}$.

Определить наибольшую величину деформации пружины, считая удар тел абсолютно неупругим.

Решение. Груз *1* перед ударом вследствие падения с высоту h имеет скорость $v_1=\sqrt{2gh}$, направленную вниз. В результате абсолютно неупругого удара оба тела приобретут одинаковую скорость $\bar{u}$ и будут дальше двигаться вместе как одно тело. Для определения этой скорости применим теорему Карно для мгновенного наложения связей

$$T-T^{(0)}=\sum_k \frac{1}{2}\,(\bar{v}_k-\bar{u}_k)^2. \qquad (a)$$

Условия применения этой теоремы выполняются, т. е.

$$\bar{S}_1\cdot\bar{u}+\bar{S}_2\cdot\bar{u}=(\bar{S}_1+\bar{S}_2)\cdot\bar{u}=0,$$

так как $\bar{S}_1+\bar{S}_2=0$ и ударный импульс от пружины равен нулю.

В рассматриваемом случае кинетическая энергия перед ударом

$$T^{(0)}=m_1 v_1^2/2+m_2 v_2^2/2.$$

После удара кинетическая энергия

$$T=(m_1+m_2)u^2/2.$$

Потерянные при ударе скорости для тел соответственно равны (v_1-u) и $(-v_2-u)$.

Кинетическая энергия от этих скоростей

$$\sum_k \frac{1}{2}\,(\bar{v}_k-\bar{u}_k)^2=m_1(v_1-u)^2/2+m_2(-v_2-u)^2/2.$$

Подставляя полученные значения величин в (а) после несложных преобразований, получаем

$$u=\frac{m_1v_1+m_2(-v_2)}{m_1+m_2}=\frac{(m_1-m_2)\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}. \quad (б)$$

Если масса плиты $m_2=0$, то $u=v_1$ и изменения скорости груза при ударе по пружине не происходит.

Скорость u можно вычислить также применяя к удару теорему об изменении количества движения для груза и плиты в проекции на ось Ox, направленную вниз. Имеем

$$Q_x-Q_x^{(0)}=\sum_k S_{kx}^{(e)}. \quad (в)$$

Количества движения перед ударом и после удара соответственно равны

$$Q_x^{(0)}=m_1v_1+m_2(-v_2); \qquad Q_x=(m_1+m_2)u.$$

Внешний ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, может создать только пружина. Импульсами неударных сил за время удара следует пренебречь. Пружина создает силу упругости, а следовательно импульс, вследствие деформации, которая за время удара произойти не успевает. Таким образом, $\sum_k S_{kx}^{(e)}=0$ и из (в) получаем опять

$$u=\frac{m_1v_1+m_2(-v_2)}{m_1+m_2}.$$

Имея скорость u, тела, двигаясь, будут деформировать пружину. Наибольшая деформация ее произойдет при скорости тел $v=0$. По теореме об изменении кинетической энергии от момента после удара до остановки тел при изменении направления движения имеем

$$T-T_0=\sum_k A_k^{(e)}. \quad (г)$$

В момент наибольшей деформации $T=0$, а после удара

$$T_0=(m_1+m_2)u^2/2=(m_1+m_2)\frac{(m_1-m_2)^2 2gh}{2(m_1+m_2)^2}=\frac{(m_1-m_2)^2gh}{m_1+m_2}.$$

Работу внешних сил тяжести и упругости на перемещении s вычисляем по формуле

$$\sum_k A_k^{(e)}=(m_1+m_2)gs-\frac{c}{2}(\lambda^2-\lambda_0^2),$$

где $\lambda=\lambda_0+s$, $\lambda_0=m_2g/c$.

Подставляя вычисленные значения величин в (г), получим

$$\frac{-(m_1-m_2)^2gh}{m_1+m_2}=(m_1+m_2)gs-\frac{c}{2}(\lambda_0^2+s^2+2\lambda_0 s-\lambda_0^2).$$

Так как $c\lambda_0=m_2g$, то после сокращений имеем

$$\frac{-(m_1-m_2)^2gh}{m_1+m_2}=m_1gs-\frac{cs^2}{2},$$

или

$$s^2-\frac{2m_1g}{c}s-\frac{2gh(m_1-m_2)^2}{c(m_1+m_2)}=0.$$

Решая квадратное уравнение и отбрасывая знак минус перед квадратным корнем, дающий отрицательное значение s, получаем

$$s=\frac{m_1g}{c}+\sqrt{\frac{m_1^2g^2}{c^2}+\frac{2gh(m_1-m_2)^2}{c(m_1+m_2)}}.$$

Наибольшая деформация пружины будет

$$\lambda=\lambda_0+s=\frac{(m_1+m_2)g}{c}+\sqrt{\frac{m_1^2g^2}{c^2}+\frac{2gh(m_1-m_2)^2}{c(m_1+m_2)}}.$$

При $m_2=0$

$$\lambda=\frac{m_1g}{c}+\sqrt{\frac{m_1^2g^2}{c^2}+\frac{2ghm_1}{c}}.$$

Учитывая это в случае $m_1g/c=\lambda_{\text{ст}}$, получаем

$$\lambda=\lambda_{\text{ст}}+\sqrt{\lambda_{\text{ст}}^2+2\lambda_{\text{ст}}h},$$

что совпадает со значением, полученным в примере 1 (см. § 5 гл. 4).

Пример 2. Однородный прямоугольный контейнер высотой h и шириной l находится на платформе, движущейся по прямолинейному пути со скоростью v (рис. 161).

Определить условие для скорости платформы, при выполнении которого не произойдет опрокидывания контейнера вокруг его закрепленного ребра при мгновенной остановке платформы. Крепление ребра контейнера не оказывает сопротивления его повороту вокруг этого ребра.

Решение. Применим к контейнеру при остановке платформы теорему об изменении кинетического момента относительно закрепленного ребра Oz при ударе:

$$K_{Oz}-K_{Oz}^{(0)}=\sum_k M_{Oz}(\bar{S}_k^{(e)}). \quad \text{(а)}$$

Внешними ударными импульсами является только ударный импульс $\bar{S}_0$ от действия крепления ребра контейнера. Он пересекает ось Oz, поэтому при отсутствии ударного трения

$$\sum_k M_{Oz}(\bar{S}_k^{(e)})=M_{Oz}(\bar{S}_0)=0.$$

После мгновенной остановки платформы контейнер начнет вращаться вокруг оси Oz с угловой скоростью ω. Для кинетического момента контейнера относительно закрепленного ребра имеем

$$K_{Oz}=J_{Oz}\omega, \quad \text{(б)}$$

где J_{Oz} — момент инерции контейнера относительно закрепленного ребра. До остановки контейнер двигался вместе с платформой поступательно. Его кинетический момент относительно оси Oz определяют суммированием кинетических моментов малых частиц, на которые мысленно разбиваем контейнер. Имеем

$$K_{Oz}^{(0)}=\sum_k m_k v y_k=v\sum_k m_k y_k, \quad \text{(в)}$$

где m_k — масса элементарной частицы контейнера; y_k — координата этой частицы по оси Oy. Но

$$\sum_k m_k y_k=My_C=Mh/2, \quad \text{(г)}$$

где $y_C=h/2$ — координата центра масс контейнера по оси Oy. Подставляя значения величин из (б), (в) и (г) в уравнение (а), получим

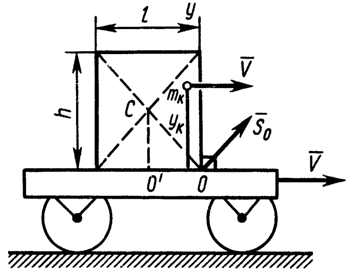


Рис. 161

$$J_{Oz}\omega - M\frac{h}{2}v=0. \qquad (a')$$

Для угловой скорости контейнера в момент остановки платформы имеем

$$\omega=\frac{Mhv}{2J_{Oz}}. \qquad (д)$$

Применим к контейнеру после получения им угловой скорости ω теорему об изменении кинетической энергии

$$T-T_0=\sum_k A_k^{(e)}. \qquad (е)$$

За начальное положение примем положение контейнера сразу после остановки платформы по окончании удара. В этом положении кинетическая энергия выразится как

$$T_0=J_{Oz}\omega^2/2.$$

В качестве конечного примем положение контейнера при наивысшем положении его центра масс, т. е. положение после поворота контейнера на 45°. Чтобы контейнер не опрокинулся, необходимо, чтобы угловая скорость его в этом положении была равна нулю, т. е. $T=0$.

Внешними силами для контейнера являются сила его тяжести $P=Mg$ и реакция $\bar{N}$ ребра Oz. Поэтому работа внешних сил сведется только к работе силы тяжести при подъеме центра масс на высоту $(OC-h/2)$. Работа силы реакции $\bar{N}$ равна нулю. Имеем

$$\sum_k A_k^{(e)}=-P(OC-h/2),$$

где $OC=\sqrt{l^2+h^2}/2$. Подставляя все вычисленные величины в (e), получим

$$-J_{Oz}\omega^2/2=-P(\sqrt{l^2+h^2}-h)/2,$$

или

$$J_{Oz}\left(\frac{Mhv}{2J_{Oz}}\right)^2=Mg(\sqrt{l^2+h^2}-h).$$

Отсюда получаем для скорости платформы следующее условие, при котором не произойдет опрокидывания контейнера:

$$v\leqslant 2\sqrt{\frac{J_{Oz}g}{Mh}\left(\sqrt{\frac{l^2}{h^2}+1}-1\right)}. \qquad (ж)$$

Для момента инерции J_{Oz} по теореме о моментах инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, имеем

$$J_{Oz}=J_{Cz}+M(OC)^2.$$

Аналогично для оси $O'z$, параллельной Oz,

$$J_{O'z}=J_{Cz}+M(O'C)^2.$$

Исключая из этих двух выражений J_{Cz}, получим

$$J_{Oz}-J_{O'z}=M[(OC)^2-(O'C)^2]; \quad J_{Oz}=J_{O'z}+M[(OC)^2-(OC)^2]. \qquad (з)$$

Момент инерции $J_{O'z}$ определяем по формуле (13) (см. § 4 гл. 3) для однородной прямоугольной пластины. Эта формула справедлива в рассматриваемом случае, только в ней надо поменять местами h и l. Имеем

$$J_{O'z}=M(h^2/3+l^2/12); \quad (OC)^2=(h^2+l^2)/4; \quad (O'C)=h^2/4.$$

После этого

$$J_{Oz}=M(h^2/3+l^2/12)+M(h^2+l^2-h^2)/4=M(h^2+l^2)/3. \qquad \text{(и)}$$

Подставляя выражение (и) в (ж), получаем

$$v \leqslant 2\sqrt{\frac{gh}{3}(1+l^2/h^2)(\sqrt{1+l^2/h^2}-1)}.$$

Для случая $l=h$ $v \leqslant \sqrt{1{,}1gh}$. Если $h=2$ м, то

$$v \leqslant 4{,}6 \text{ м/с} \approx 16{,}6 \text{ км/ч}.$$

§ 7. ЦЕНТР УДАРА

Если по твердому телу, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, произвести удар, приложив ударный импульс $\bar{S}$, то при выполнении некоторых условий не возникнет ударных реакций в подшипниках оси вращения. Получим эти условия.

Пусть твердое тело с неподвижной осью AB, по которой направлена координатная ось Oz, имеет до удара угловую скорость ω_0 (рис. 162). К телу приложен ударный импульс $\bar{S}$; угловая скорость изменяется и становится равной ω. Освободив тело от связей и заменив их импульсами реакций $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$, применим к явлению удара теоремы об изменении количества движения и кинетического момента. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \bar{Q}-\bar{Q}_0&=\sum_k \bar{S}_k^{(e)}=\bar{S}+\bar{S}_A+\bar{S}_B; \\ \bar{K}-\bar{K}_0&=\sum_k \bar{M}_0(\bar{S}_k^{(e)})=\bar{M}_0(\bar{S})+\bar{M}_0(\bar{S}_A)+\bar{M}_0(\bar{S}_B), \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

где $\bar{Q}$ и $\bar{K}_0$ — количество движения и кинетический момент после удара, а $\bar{Q}_0$ и $\bar{K}_0$ — соответственно те же величины перед ударом.

Скорости точек при вращении тела вычисляем по формуле Эйлера:

$$\bar{v}_k=\bar{\omega}\times\bar{r}_k.$$

Следовательно, количество движения

$$\bar{Q}=M\bar{v}_C=M(\bar{\omega}\times\bar{r}_C),$$

где M — масса тела; $\bar{r}_C$ — радиус-вектор центра масс. Так как $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$ направлены по оси вращения, то

$$\bar{Q}=\bar{Q}_0=M\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega-\omega_0 \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}=$$

$$=\{\bar{i}[-y_C(\omega-\omega_0)]+\bar{j}[x_C(\omega-\omega_0)]+\bar{k}\cdot 0\}M. \qquad (32)$$

Проекции кинетического момента на оси координат можно определить по формулам для тела, имеющего одну закрепленную точку, но при условии, что $\omega_x=\omega_y=0$ и $\omega_z=\omega$. Имеем:

$$K_x=J_x\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z=-J_{xz}\omega;$$
$$K_y=-J_{yx}\omega_x+J_y\omega_y-J_{yz}\omega_z=-J_{yz}\omega;$$
$$K_z=-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y+J_z\omega_z=J_z\omega.$$

Используя эти формулы, получим:

$$K_x - K_{0x} = -J_{xz}(\omega - \omega_0);$$
$$K_y - K_{0y} = -J_{yz}(\omega - \omega_0); \qquad (33)$$
$$K_z - K_{0z} = -J_z(\omega - \omega_0).$$

Проецируя (31) на оси координат и учитывая (32) и (33), получаем

$$\left.\begin{aligned}
&-My_C(\omega-\omega_0) = S_x + S_{Ax} + S_{Bx};\\
&Mx_C(\omega-\omega_0) = S_y + S_{Ax} + S_{By};\\
&0 = S_z + S_{Az};\\
&-J_{xz}(\omega-\omega_0) = M_x(\bar S) + M_x(\bar S_A) + M_x(\bar S_B);\\
&-J_{yz}(\omega-\omega_0) = M_y(\bar S) + M_y(\bar S_A) + M_y(\bar S_B);\\
&J_z(\omega-\omega_0) = M_z(\bar S) + M_z(\bar S_A) + M_z(\bar S_B).
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Из системы уравнений (34) определяем импульсы реакций $\bar S_A$ и $\bar S_B$ и изменение угловой скорости при ударе $\omega - \omega_0$ для заданного тела и внешнего ударного импульса $\bar S$.

Определим условия, при которых удар по телу не вызывает ударных реакций в подшипниках, т. е. когда $\bar S_A = \bar S_B = 0$. Из системы уравнений (34) в этом случае получаем:

$$\left.\begin{aligned}
-My_C(\omega-\omega_0) &= S_x;\\
Mx_C(\omega-\omega_0) &= S_y;\\
0 &= S_z;\\
-J_{xz}(\omega-\omega_0) &= M_x(\bar S);\\
-J_{yz}(\omega-\omega_0) &= M_y(\bar S);\\
J_z(\omega-\omega_0) &= M_z(\bar S).
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

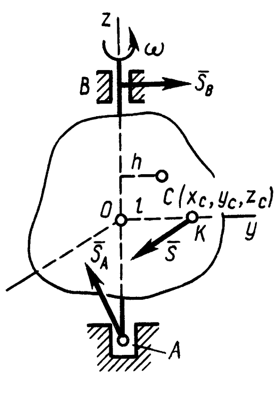
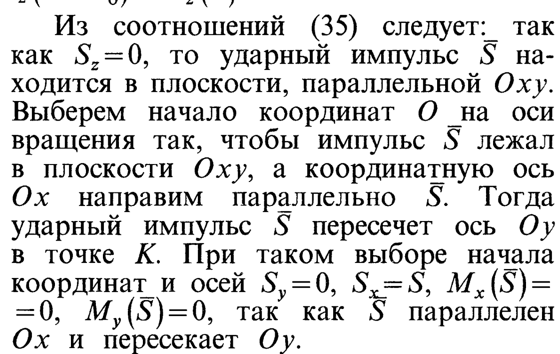


Рис. 162


Из соотношений (35) следует: так как $S_z = 0$, то ударный импульс $\bar S$ находится в плоскости, параллельной Oxy. Выберем начало координат O на оси вращения так, чтобы импульс $\bar S$ лежал в плоскости Oxy, а координатную ось Ox направим параллельно $\bar S$. Тогда ударный импульс $\bar S$ пересечет ось Oy в точке K. При таком выборе начала координат и осей $S_y = 0$, $S_x = S$, $M_x(\bar S) = 0$, $M_y(\bar S) = 0$, так как $\bar S$ параллелен Ox и пересекает Oy.

Учитывая это, из условий (35) получаем из второго уравнения $x_C = 0$, из четвертого $J_{xz} = 0$, из пятого $J_{yz} = 0$, т. е.

центр масс находится в плоскости Oyz и ось вращения Oz является главной осью инерции для точки O. Так как ударный импульс $\bar{S}$ параллелен оси Ox, то, следовательно, он перпендикулярен плоскости Oyz, проходящей через ось вращения и центр масс.

Если ввести длину $l=OK$, то $M_z(\bar{S})=-lS$ при направлении $\bar{S}$ в положительную сторону оси Ox. С учетом этого, исключая S из первого и шестого уравнений (35), получаем

$$l=OK=J_z/My_C. \tag{36}$$

При сделанном выборе осей координат y_C — расстояние от оси вращения Oz до центра масс. Если его обозначить h, то $l=J_z/(Mh)$.

Получена формула, по которой вычисляется приведенная длина физического маятника.

Точка пересечения K линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс при отсутствии ударных реакций в подшипниках, называется *центром удара*. Любой по числовой величине ударный импульс $\bar{S}$, линия действия которого проходит через точку K перпендикулярно плоскости, содержащей ось вращения и центр масс, не вызывает ударных реакций в подшипниках; если ось вращения является главной осью инерции для точки O — точки пересечения оси вращения с перпендикулярной плоскостью, содержащей ударный импульс $\bar{S}$; если расстояние от оси вращения до линии действия ударного импульса l равно приведенной длине физического маятника; если центр удара K и центр масс C лежит по одну сторону от оси вращения.

Если центр масс находится на оси вращения, то $h=y_C=0$ и расстояние l от оси вращения до центра удара K равно бесконечности. В этом случае центра удара не существует.

Так как для центра масс, находящегося на оси вращения, $\bar{u}_C=\bar{v}_C=0$, то $\bar{Q}-\bar{Q}_0=M(\bar{u}_C-\bar{v}_C)=0$ и из первого уравнения (31) получаем

$$0=\bar{S}+\bar{S}_A+\bar{S}_B,$$

откуда

$$\bar{S}_A+\bar{S}_B=-\bar{S},$$

т. е. ударный импульс, приложенный к телу, целиком передается на подшипники.

Пример. Дверь, имеющая форму прямоугольной пластины (рис. 163), закреплена в точке A с помощью подпятника, а в точке B — подшипника. Ширина двери h. Определить положение центра удара двери, если она открывается приложением ударного импульса.

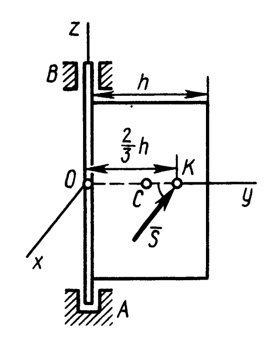


Рис. 163

Решение. Ударный импульс $\bar{S}$ должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс двери, т. е. плоскости самой

двери. Плоскость, перпендикулярная оси вращения, в которой расположен ударный импульс, должна дать точку пересечения O на оси вращения, для которой эта ось является главной осью инерции. Таким свойством обладает точка, расположенная на оси Oz, в которой пересекаются плоскость двери с плоскостью ее симметрии для однородной двери.

Расстояние $OK=l$ до центра удара K определяем по формуле для приведенной длины физического маятника

$$l=\frac{J_z}{My_C}.$$

В рассматриваемом случае

$$y_C=h/2; \quad J_z=Mh^2/3.$$

Следовательно,

$$l=\frac{Mh^2/3}{Mh/2}=\frac{2}{3}h.$$

Любой по числовой величине ударный импульс, линия действия которого перпендикулярна плоскости двери и проходит через центр удара K на расстоянии от оси $l=\frac{2}{3}h$, не передается на подпятник A и подшипник B.

ГЛАВА 10
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОСМИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Космические корабли различного назначения выводятся на орбиту (траекторию) с помощью ракет-носителей. Каждая ступень ракеты-носителя имеет двигатели, баки с топливом и другие устройства. Остатки использованной ступени обычно отделяют от остальной части ракеты. Последней ступенью служит космический корабль или эквивалентное ему устройство, которые в конце работы двигателей предпоследней ступени получают скорость $\bar{v}_0$ под углом α к горизонту вследствие запрограммированного отклонения ракеты-носителя с помощью рулевого устройства.

Движение космического корабля после его отделения от остатков ракеты-носителя совершается под действием силы тяготения Земли при старте с ее поверхности. Высота над Землей, где космический корабль начинает свое автономное движение после работы двигателей, достаточно велика и силой сопротивления воздуха можно пренебречь. Можно пренебречь также силами тяготения Солнца и других планет, если движение космического корабля происходит вблизи Земли.

Для рассмотрения движения центра масс космического корабля в рассматриваемом случае хорошей моделью является движение материальной точки под действием силы тяготения земного шара. Эта задача известна как задача Ньютона.

Движение точки в задаче Ньютона рассматривается относительно системы отсчета, скрепленной с Землей, принимаемой за инерциальную вследствие малости поправок на неинерциальность по сравнению с силой тяготения. Земной шар в задаче Ньютона считается однородной сферой. В этом случае он притягивает материальную точку как одна точка, центр шара, имеющая массу всего земного шара. В более точных расчетах учитывают несферичность Земли и ее неоднородность.

Об особенностях движения космического корабля вместе с ракетой-носителем при работе двигателей одной из ступеней можно составить приближенное представление рассмотрев движение точки переменной массы, являющейся упрощенной моделью движения центра масс тела, на движение которого существенное влияние оказывает процесс изменения массы.

§ 2. ЗАДАЧА НЬЮТОНА

Имеем материальную точку массой m, движущуюся под действием силы тяготения земного шара, массой M и радиусом R. Земной шар считаем однородной сферой. Силу тяготения, действующую на материальную точку, согласно закону тяготения Ньютона, можно выразить в форме

$$\bar{F} = -\frac{k}{r^2}\bar{r}^0, \qquad (1)$$

где r — расстояние точки до центра земного шара; k — постоянный коэффициент; $\bar{r}^0$ — единичный вектор, направленный от центра Земли к рассматриваемой точке.

Коэффициент k из закона Ньютона равен

$$k = GMm,$$

где G — универсальная постоянная тяготения. Другое выражение для k получается, если применить формулу (1) к материальной точке, находящейся на поверхности земного шара, где сила F переходит в силу тяжести $P = mg$. Приравнивая эти две силы при $r = R$ получаем

$$\frac{k}{R^2} = mg; \qquad k = mgR^2$$

где g — ускорение земного тяготения.

При рассмотрении движения точки под действием центральной силы доказано, что траектория точки является плоской кривой, т. е. в этом случае у точки только две степени свободы. Сила тяготения однородного шара относится к числу центральных сил. Задачу о движении точки под действием таких сил удобно решать в полярных координатах.

Ограничим решение задачи Ньютона нахождением уравнения траектории движения точки в полярных координатах

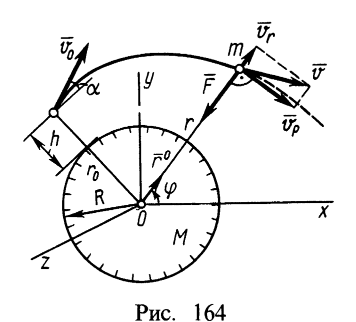


Рис. 164

$r = f(\varphi)$, где φ — полярный угол (рис. 164).

Для решения поставленной задачи следовало бы использовать уравнения движения точки в проекциях на полярные оси координат. Удобнее применять следствия из этих уравнений в форме теорем об изменении кинетической энергии и кинетического момента точки.

По теореме об изменении кинетической энергии точки,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \tag{2}$$

где работа силы в потенциальном силовом поле тяготения Земли равна

$$A = U - U_0 = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}, \tag{3}$$

так как $U = \frac{k}{r}$ (см. § 6 гл. 4); r_0 — расстояние материальной точки до центра земного шара в момент, когда точка имеет скорость v_0.

Для квадрата скорости в полярных координатах имеем

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2 = \dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2, \tag{4}$$

где v_r и v_p — радиальная и трансверсальная скорости. Используя (3) и (4), из (2) получаем

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2k}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right); \quad \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = v_0^2 + \frac{2k}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{2'}$$

По теореме об изменении кинетического момента относительно оси Oz, перпендикулярной плоскости траектории и проходящей через центр земного шара, имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z(\bar F) = 0,$$

так как сила тяготения $\bar F$ пересекает ось Oz. Следовательно,

$$K_z = \text{const}. \tag{5}$$

Но

$$K_z = mrv_p = mr\dot\varphi,$$

так как $v_p = r\dot\varphi$.

В начальный момент движения по орбите

$$K_z = mr_0 v_0 \cos\alpha = Cm,$$

где

$$C = \text{const} = r_0 v_0 \cos\alpha.$$

Таким образом, из (5) получаем

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=C. \qquad (5')$$

Исключим из (2′) и (5′) dt. Из (5′) имеем

$$dt=\frac{r^2}{C}d\varphi.$$

Подставляя значение dt в (2′), получаем:

$$v^2=\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\frac{C^2}{r^4}+\frac{C^2}{r^2}; \quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\frac{C^2}{r^4}+\frac{C^2}{r^2}=v_0^2+\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \qquad (6)$$

Уравнение (6) является дифференциальным уравнением траектории точки в полярных координатах. Интегрируя его, найдем уравнение траектории в конечной форме. Введем новые обозначения для постоянных величин

$$H=v_0^2-\frac{2k}{mr_0}=v_0^2-\frac{2gR}{r_0}; \qquad \mu=\frac{k}{m}=gR^2.$$

Тогда из (6) имеем

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\cdot\frac{C^2}{r^4}+\frac{C^2}{r^2}=H+\frac{2\mu}{r},$$

или

$$\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=\sqrt{H+\frac{2\mu}{r}-\frac{C^2}{r^2}}; \qquad d\varphi=-\frac{d\left(\frac{C}{r}\right)}{\sqrt{H+\frac{2\mu}{r}-\frac{C^2}{r^2}}}. \qquad (6')$$

Преобразуя подкоренное выражение в (6′) и выполняя интегрирование, получаем

$$\varphi-\varphi_0=-\int\frac{d\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)}{\sqrt{\left(H+\frac{\mu^2}{C^2}\right)-\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)^2}}, \qquad (6'')$$

где

$$\int\frac{d\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)}{\sqrt{\left(H+\frac{\mu^2}{C^2}\right)-\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arccos\frac{x}{a};$$

$$a^2=H+\frac{\mu^2}{C^2}; \qquad x=\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C};$$

φ_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, из (6″), учитывая, что косинус — четная функция, имеем

$$\frac{\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}}{\sqrt{H+\frac{\mu^2}{C^2}}}=\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Отсюда

$$\frac{C}{r}=\frac{\mu}{C}+\sqrt{H+\frac{\mu^2}{C^2}}\cos(\varphi-\varphi_0),$$

или окончательно

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}, \qquad (7)$$

где постоянные величины имеют следующие значения:

$$p=\frac{C^2}{\mu}=\frac{r_0^2v_0^2\cos^2\alpha}{R^2g}; \qquad e=\sqrt{1+H\frac{C^2}{\mu^2}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{(v_0^2r_0-2gR^2)\,r_0^2v_0^2\cos^2\alpha}{r_0g^2R^4}}=\sqrt{1+v_0^2\cos^2\alpha\,\frac{r_0^2}{g^2R^4}\left(v_0^2-2\frac{gR^2}{r_0}\right)}.$$

Приняв приближенно $r_0\approx R$, получим

$$e=\sqrt{1+\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g^2R^2}(v_0^2-2gR)}. \qquad (8)$$

Формула (7) является уравнением конического сечения в полярных координатах с параметрами p и e. При различных значениях параметров получаются разные конические сечения, являющиеся траекториями движущейся точки под действием силы тяготения Земли. В зависимости от значения параметра e возможны следующие три типа траекторий:

1) $e<1$, что получается, согласно (8), при $v_0^2<2gR$ или $v_0<\sqrt{2gR}$; траекториями точки являются различные эллипсы в зависимости от параметра p;

2) $e=1$, или $v_0=\sqrt{2gR}=11{,}2$ км/с; траекториями будут параболы;

3) $e>1$, или $v_0>\sqrt{2gR}=11{,}2$ км/с; траектории имеют форму гипербол;

4) $e=0$; траекториями являются окружности, радиус которых согласно (8) $r=p$. При $\alpha=0°$ в этом случае, приравнивая e нулю, получаем

$$0=g^2R^2+v_0^4-2gRv_0^2,$$

или

$$v_0=\sqrt{gR}=7{,}9 \text{ км/с}.$$

Можно показать, что при $v_0<\sqrt{gR}$ траекториями точки являются дуги эллипса, которые начинаются на некоторой высоте над Землей и обязательно оканчиваются на земном

шаре, т. е. точка, брошенная с Земли, в этом случае обязательно упадет на Землю. Наименьшая скорость точки, для того чтобы ее траектория не пересекала земной шар, если движение ее начинается на некоторой высоте над поверхностью Земли, получается в том случае, если траекторией точки является окружность, т. е. при $v_0^{(1)}=\sqrt{gR}=7{,}9$ км/с при $\alpha=0°$. Эту скорость называют первой космической скоростью. По мере увеличения v_0 сверх первой космической скорости окружность деформируется в эллипсы и при $v_0^{(2)}=\sqrt{2gR}=11{,}2$ км/с получается траектория в форме параболы. Эту скорость, при которой эллипс переходит в параболу, называют второй космической скоростью. Парабола является незамкнутой кривой. Двигаясь по ней, точка покинет окрестности Земли. Для скоростей $v_0>\sqrt{2gR}=11{,}2$ км/с парабола превращается в гиперболы различной формы. На рис. 165 показаны траектории точки в зависимости от ее начальной скорости, если точка начинает движение на некоторой высоте h над поверхностью Земли при $\alpha=0°$.

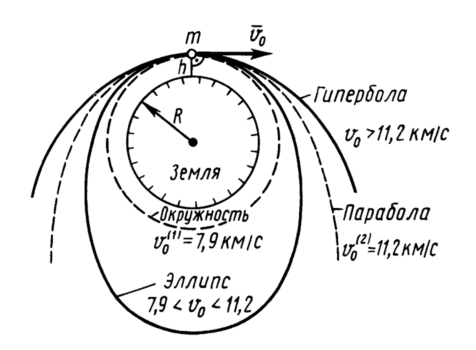


Рис. 165

Формула (7) для траектории материальной точки, движущейся под действием тяготения однородного шара, справедлива не только для земного шара, но и любого другого однородного шара, например Луны, Солнца и т. п., только для них параметры g и R будут иметь свои значения.

Материальная точка, имея начальную скорость $v_0^{(2)}=11{,}2$ км/с, может покинуть окрестности Земли. Молекулы газов, входящих в состав земной атмосферы, приобретая от взаимных столкновений скорости, равные или большие второй космической скорости, покидают пределы Земли. Такие скорости могут приобрести прежде всего молекулы самого легкого газа, т. е. водорода. Земная атмосфера постоянно теряет преимущественно водород.

Минимальная скорость, которую необходимо иметь точке, начинающей движение с Земли, чтобы преодолеть силу притяжения Солнца и покинуть Солнечную систему, составляет 16,7 км/с. Эту скорость называют третьей космической скоростью.

Законы движения центров масс искусственных и естественных спутников Земли не отличаются от законов движения спутников других планет, например Юпитера, и движения планет вокруг Солнца или какой-либо другой звезды. Полное решение задачи Ньютона дает все данные о движении центров

масс искусственных и естественных спутников. Из этих данных, в частности, можно вывести законы Кеплера (1571—1630), которые им впервые были получены, используя астрономические наблюдения Тихо Браге (1546—1601). Приведем законы Кеплера в современной формулировке без вывода:

1) *все планеты описывают вокруг Солнца плоские орбиты, следуя закону площадей*;

2) *орбиты планет являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце*;

3) *квадраты звездных времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

§ 3. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В современной технике возникают случаи, когда масса точки и системы не остается постоянной в процессе движения, а изменяется. Так, при полете космических ракет вследствие выбрасывания продуктов сгорания и отделения ненужных частей ракет изменения массы достигают 90...95% общей начальной величины. Довольно значительно изменяется масса при полете современных реактивных самолетов вследствие расхода топлива при работе двигателей и в ряде других случаев. Даже в такой области техники, как текстильное производство, происходят значительные изменения массы различных веретен, шпуль и рулонов при современных скоростях работы станков и машин.

Рассмотрим главные особенности, связанные с изменением массы, на примере движения одной точки переменной массы. Точку переменной массы примем за геометрическую точку с конечной массой, непрерывно изменяющейся в процессе движения. Вместо точки можно рассматривать также тело переменной массы, если оно совершает поступательное движение.

Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы

К точке переменной массы нельзя непосредственно применить основной закон динамики точки постоянной массы.

Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы получим, применяя закон независимого действия сил и теорему об изменении количества движения системы. Известно, что действующая на точку сила сообщает ей такое ускорение, которое не зависит от действия других сил. В случае точки переменной массы кроме приложенной к точке силы $\bar{F}$ действуют силы, вызванные отделением от точки частицы массой $d'M$.

Считаем, что изменения скорости $\bar{v}$ точки переменной массы от действия силы $\bar{F}$ и от изменения массы точки не зависят друг от друга, или общее изменение скорости $d\bar{v}$

в течение времени $\mathrm{d}t$ складывается из изменения скорости $\mathrm{d}\bar{v}_1$ от действия силы $\bar{F}$ при постоянной массе точки и изменения скорости $\mathrm{d}\bar{v}_2$, вызванного изменением массы точки в отсутствие силы $\bar{F}$.

Имеем точку переменной массы M. От действия силы $\bar{F}$ скорость точки постоянной массы изменяется за время $\mathrm{d}t$ в соответствии с основным законом динамики точки постоянной массы на

$$\mathrm{d}\bar{v}_1 = \frac{\bar{F}}{M}\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Изменение скорости точки $\mathrm{d}\bar{v}_2$ за время $\mathrm{d}t$, вызванное изменением ее массы в отсутствие действия силы $\bar{F}$, определяют по теореме об изменении количества движения системы постоянной массы. Так как механическая система, состоящая из точки переменной массы и отделившихся от нее частиц, свободна от действия внешних сил, то ее количество движения является постоянной величиной. Внутренние силы взаимодействия точки с отделяющимися частицами не изменяют количества движения рассматриваемой системы. Применяя закон сохранения количества движения за промежуток времени от t до $t+\mathrm{d}t$, имеем

$$\bar{Q}_t = \bar{Q}_{t+\mathrm{d}t}. \tag{10}$$

Учитываем только взаимодействие точки переменной массы с отделившейся от нее частицей массы $\mathrm{d}'M$ за время $\mathrm{d}t$ и пренебрегаем действием на точку и эту частицу ранее отделившихся частиц (рис. 166). Получаем $\bar{Q}_t = M\cdot\bar{v}$, так как в момент t имеется одна точка массой $M(t)$, движущаяся со скоростью $\bar{v}$ относительно системы координат $Oxyz$.

В момент $t+\mathrm{d}t$ имеются точка массой $M-\mathrm{d}'M$, скорость которой $\bar{v}+\mathrm{d}\bar{v}_2$, и отделившаяся частица массой — $\mathrm{d}'M$, скорость которой $\bar{u}$ относительно той же системы координат $Oxyz$. Количество движения их в момент $t+\mathrm{d}t$

$$\bar{Q}_{t+\mathrm{d}t} = (M-\mathrm{d}'M)(\bar{v}+\mathrm{d}\bar{v}_2) + \bar{u}\mathrm{d}'M.$$

Приравнивая, согласно (10), количества движения после сокращения и отбрасывания малого слагаемого второго порядка $\mathrm{d}M'\mathrm{d}\bar{v}_2$ по сравнению со слагаемыми первого порядка, получаем

$$\mathrm{d}\bar{v}_2 = -\frac{\mathrm{d}'M}{M}(\bar{u}-\bar{v})$$

при $\mathrm{d}'M>0$ или, включая знак минус в $\mathrm{d}M$ (тогда $\mathrm{d}M<0$), имеем

$$\mathrm{d}\bar{v}_2 = \frac{\mathrm{d}M}{M}(\bar{u}-\bar{v}). \tag{11}$$

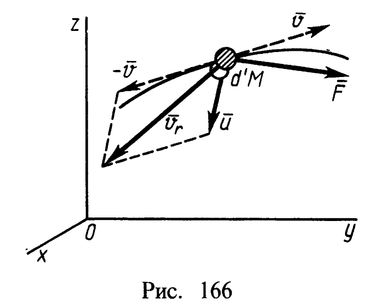


Рис. 166

Общее изменение скорости

$$d\bar{v}=d\bar{v}_1+d\bar{v}_2,$$

или, учитывая (1) и (3),

$$d\bar{v}=\frac{\bar{F}}{M}dt+\frac{dM}{M}(\bar{u}-\bar{v}).$$

После умножения обеих частей этого уравнения на массу точки M и деления на dt получаем следующее дифференциальное уравнение движения точки переменной массы в векторной форме:

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\frac{dM}{dt}(\bar{u}-\bar{v}). \tag{12}$$

Выражение (12) называют *дифференциальным уравнением Мещерского*. Оно было получено им впервые в 1897 г.

Если с точкой переменной массы связать подвижную систему координат, поступательно движущуюся относительно системы координат $Oxyz$, то абсолютную скорость $\bar{u}$ отделившейся частицы массой dM по теореме о сложении скоростей можно выразить как $\bar{u}=\bar{v}_e+\bar{v}_r$.

Так как в данном случае $\bar{v}_e=\bar{v}$, то относительная скорость отделившейся частицы

$$\bar{v}_r=\bar{u}-\bar{v}.$$

Подставляя значение $\bar{u}-\bar{v}$ в (4), имеем

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\frac{dM}{dt}\bar{v}_r. \tag{12'}$$

Если ввести обозначение $\bar{\Phi}_r=\frac{dM}{dt}\bar{v}_r$, то (4′) примет вид

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\bar{\Phi}_r. \tag{12''}$$

Величину $\bar{\Phi}_r$ называют *реактивной силой*, а dM/dt является скоростью изменения массы. Она характеризует изменение массы точки за единицу времени, например за 1 с. Поэтому реактивная сила равна произведению секундного изменения массы точки на относительную скорость отделения частиц массы от точки переменной массы.

В случае уменьшения массы точки с изменением времени величина dM/dt является отрицательной, а при возрастании ее массы — положительной. При уменьшении массы точки вследствие отделения от нее частиц реактивная сила $\bar{\Phi}_r$ направлена в сторону, противоположную относительной скорости отделяющихся частиц $\bar{v}_r$, а при увеличении массы точки величина dM/dt больше нуля и реактивная сила $\bar{\Phi}_r$ направлена в сторону относительной скорости частиц $\bar{v}_r$. Для реактивного двигателя скорость изменения массы dM/dt является от-

рицательной, равной секундному расходу массы, а $\bar{v}_r$ — скорость вылета газа из сопла двигателя.

Реактивная сила является тягой двигателя, обусловленной выбросом газа через сопло. Она направлена противоположно скорости вылета газа из сопла двигателя.

Проецируя обе части (12″) на прямоугольные декартовы оси координат, получаем дифференциальные уравнения движения точки переменной массы в проекциях на эти оси:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=F_x+\Phi_{rx};\quad M\frac{d^2y}{dt^2}=F_y+\Phi_{ry};\quad M\frac{d^2z}{dt^2}=F_z+\Phi_{rz}. \tag{13}$$

Из (12″) или (13) следует, что *дифференциальные уравнения движения точки переменной массы имеют такой же вид, как и для точки постоянной массы, только кроме приложенных к точке сил действует дополнительно реактивная сила, обусловленная изменением массы точки.*

Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы превращаются в аналогичные уравнения для точки постоянной массы, если величина dM/dt равна нулю. Из дифференциальных уравнений движения точки переменной массы, аналогично тому, как и в случае точки и системы постоянной массы, можно вывести общие теоремы для точки и системы переменной массы.

§ 4. ЗАДАЧИ ЦИОЛКОВСКОГО

Рассмотрим две задачи Циолковского: прямолинейное движение точки переменной массы под действием только одной реактивной силы и вертикальное движение точки вблизи Земли в однородном поле силы тяжести. Эти задачи впервые рассматривались К. Э. Циолковским.

Первая задача Циолковского

Пусть точка переменной массы или ракета движется прямолинейно в таком называемом, по терминологии Циолковского, свободном пространстве под действием только одной реактивной силы. Считаем, что относительная скорость $\bar{v}_r$ отделения частиц постоянна и направлена в сторону, противоположную скорости $\bar{v}$ движения точки переменной массы (рис. 167). Тогда, проецируя (12″) на ось Ox, направленную по скорости движения точки, дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки переменной массы принимает вид

$$M\frac{dv}{dt}=-\frac{dM}{dt}v_r.$$

Разделяя переменные и беря интегралы от обеих частей, имеем

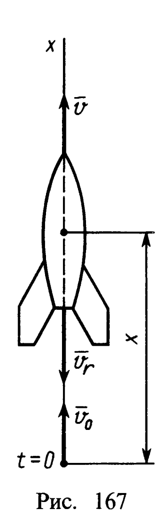


Рис. 167

$$\frac{1}{v_r}\int_{v_0}^{v} dv = -\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M},$$

где $\bar{v}_0$ — начальная скорость, направленная по реактивной силе; M_0 — начальная масса точки.

Выполняя интегрирование, получаем

$$v = v_0 + v_r \ln\frac{M_0}{M}. \tag{14}$$

Если в формулу (14) подставить значения величин, характеризующих конец горения, когда масса точки (ракеты) состоит только из массы несгоревшей части (массы приборов и корпуса ракеты) $M_р$, то, обозначая через m массу топлива, для скорости движения v_1 в конце горения имеем

$$v_1 = v_0 + v_r \ln\left(1 + \frac{m}{M_р}\right).$$

Вводя число Циолковского $Z = m/M_р$, получаем следующую формулу Циолковского:

$$v_1 = v_0 + v_r \ln(1 + Z). \tag{15}$$

Из формулы Циолковского следует, что *скорость в конце горения не зависит от закона горения, т. е. закона изменения массы*. Скорость в конце горения можно увеличить двумя путями. Одним из этих путей является увеличение относительной скорости отделения частиц v_r или для ракеты увеличения скорости истечения газа из сопла реактивного двигателя.

Современные химические топлива позволяют получать скорости истечения газа из сопла реактивного двигателя порядка 2...2,3 км/с. Создание ионного и фотонного двигателей позволит значительно увеличить эту скорость. Другой путь увеличения скорости ракеты в конце горения связан с увеличением так называемой массовой, или весовой, отдачи ракеты, т. е. с увеличением числа Z, что достигается рациональной конструкцией ракеты. Можно значительно увеличить массовую отдачу ракеты $M_0/M_р$ путем применения многоступенчатой ракеты, у которой после израсходования топлива первой ступени отбрасываются баки и двигатели от оставшейся части ракеты. Так происходит со всеми баками и двигателями уже отработавших ступеней ракеты. Это значительно повышает число Циолковского для каждой последующей ступени, так как уменьшается $M_р$ за счет отброшенных масс баков и двигателей.

Для определения уравнения движения точки переменной массы из (14) имеем

$$\frac{dx}{dt}=v_0+v_r\ln\frac{M_0}{M},$$

или, выполняя интегрирование после разделения переменных и считая $x=0$ при $t=0$, получаем

$$x=v_0t+v_r\int_0^t\ln\frac{M_0}{M}\,dt. \qquad (16)$$

В теоретических работах по ракетодинамике обычно рассматривают два закона изменения массы: линейный и показательный. При линейном законе масса точки с течением времени изменяется так:

$$M=M_0(1-\alpha t), \qquad (17)$$

где $\alpha=\text{const}$ (α — удельный расход), а M_0 — масса точки в начальный момент времени.

При показательном законе изменение массы

$$M=M_0e^{-\alpha t}. \qquad (18)$$

Выполняя интегрирование в (16) при линейном законе изменения массы (17), получаем следующее уравнение движения:

$$x=v_0t+\frac{v_r}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]. \qquad (19)$$

При показательном законе изменения массы (18) соответственно

$$x=v_0t+\frac{\alpha v_r t^2}{2}. \qquad (20)$$

Отметим, что при линейном законе изменения массы (17), если $v_r=\text{const}$, секундный расход массы

$$(-dM/dt)=\alpha M_0=\text{const}$$

и реактивная сила

$$\Phi_r=(-dM/dt)v_r=\alpha M_0v_r=\text{const}.$$

При показательном законе секундный расход массы и реактивная сила являются переменными, но ускорение точки переменной массы $\bar{a}_r$, вызванное действием на точку одной реактивной силы Φ_r, является постоянным, т. е.

$$a_r=\Phi_r/M=\alpha v_r=\text{const}.$$

Вторая задача Циолковского

Если точка переменной массы (ракета) движется по вертикали вверх вблизи Земли (см. рис. 167), то, считая поле земного притяжения однородным ($g=\text{const}$) и пренебрегая

сопротивлением воздуха, а также учитывая все предположения первой задачи Циолковского, получаем следующее дифференциальное уравнение движения точки:

$$M\frac{dv}{dt}=-Mg-\frac{dM}{dt}v_r.$$

После выполнения интегрирования имеем

$$v=v_0-gt+v_r\ln\frac{M_0}{M}.$$

Для x в зависимости от времени, если, как и в первой задаче Циолковского, отсчитывать x от начального положения точки, получаем следующую формулу:

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}+v_r\int_0^t\ln\frac{M_0}{M}\,dt. \tag{21}$$

Из (21) при линейном законе изменения массы (17) получаем

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}+\frac{v_r}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right].$$

При показательном законе изменения массы (18) соответственно

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}+\frac{\alpha v_r t^2}{2}.$$

ГЛАВА 11
ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Для сплошной среды важное значение имеет уравнение сохранения массы, или уравнение неразрывности. Для его вывода введем понятие плотности сплошной среды. Плотностью ρ в точке M пространства называют предел отношения массы Δm в элементарном объеме ΔV к этому объему, охватывающему точку M, при стягивании его в эту точку, т. е.

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Получим уравнение неразрывности. Выберем в пространстве неподвижную замкнутую поверхность, ограничивающую объем V (рис. 168). Сплошная среда при своем движении относительно рассматриваемой системы отсчета частично входит в объем,

ограниченный поверхностью, частично из него выходит. Считается, что сама выбранная поверхность не влияет на движение сплошной среды. Через элемент площади поверхности $\mathrm{d}S$ за единицу времени входит или выходит количество массы сплошной среды $\rho v_n \mathrm{d}S$ (определяется знаком потока), где $\bar{n}$ — направление внешней по отношению к объему нормали. Через всю поверхность войдет или выйдет количество массы $\iint\limits_{(S)} \rho v_n \mathrm{d}S$. Если это величина положительная, то получим уменьшение плотности в точках объема в единицу времени на $-\partial\rho/\partial t$. В малом объеме $\mathrm{d}V$ это уменьшение составит $-\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$. Во всем объеме оно равно $-\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$. Если масса сплошной среды сохраняется, то поток ее через поверхность должен компенсироваться изменением плотности в рассматриваемом объеме, т. е.

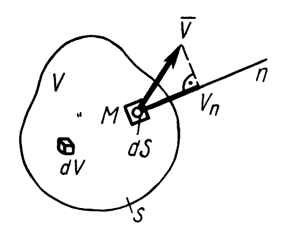


Рис. 168

$$\iint\limits_{(S)} \rho v_n \mathrm{d}S + \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V = 0. \qquad (1)$$

Это и есть уравнение неразрывности, или сохранения массы, в интегральной форме.

От интегральной формы уравнения неразрывности для объема можно перейти к уравнению неразрывности в каждой точке пространства. Для этого следует интеграл по поверхности в (1) преобразовать в интеграл по объему, ограниченному замкнутой поверхностью, по формуле Гаусса — Остроградского:

$$\iint\limits_{(S)} \left[\left(p\cos(\bar{n},\hat{\ }x) + q\cos(\bar{n},\hat{\ }y) + r\cos(\bar{n},\hat{\ }z)\right)\right]\mathrm{d}S = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

В рассматриваемом случае

$$v_n = \bar{v}\cdot\bar{n} = v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z = v_x\cos(\bar{n},\hat{\ }x) + v_y\cos(\bar{n},\hat{\ }y) + v_z\cos(\bar{n},\hat{\ }z).$$

Полагая в формуле Гаусса — Остроградского $p = \rho v_x$, $q = \rho v_y$, $r = \rho v_z$, получим

$$\iint\limits_{(S)} \rho v_n \mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} (\rho\bar{v})\cdot\bar{n}\mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} \left[(\rho v_x)\cos(\bar{n},\hat{\ }x) + (\rho v_y)\cos(\bar{n},\hat{\ }y) + (\rho v_z)\cos(\bar{n},\hat{\ }z)\right]\mathrm{d}S = \iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}V. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и объединяя интегралы в один, имеем

$$\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}V=0. \qquad (1')$$

Так как (1′) выполняется для произвольного объема, то это может быть только в том случае, если подынтегральное выражение равно нулю в каждой точке, т. е.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0. \qquad (3)$$

Это и есть уравнение неразрывности сплошной среды в дифференциальной форме.

Для несжимаемой сплошной среды, для которой плотность $\rho=\mathrm{const}$, из (3) получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \qquad (4)$$

или

$$e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=0.$$

Величина $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$, как известно, называется *дивергенцией вектора скорости* $\bar{v}$. Уравнение неразрывности для несжимаемой сплошной среды кратко можно выразить в форме

$$\operatorname{div}\bar{v}=0. \qquad (4')$$

В более общем случае оно имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\bar{v})=0. \qquad (3')$$

§ 2. СИЛЫ ОБЪЕМНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ

Силы, действующие на рассматриваемую частицу сплошной среды, разделяют на силы объемные, или массовые, и поверхностные. Объемными силами называют силы, которые действуют на точки объема сплошной среды со стороны других материальных объектов, в том числе и со стороны точек самой выделенной частицы сплошной среды. Объемную силу обычно характеризуют ее интенсивностью.

В окрестности точки M пространства рассмотрим малую частицу сплошной среды объемом ΔV. Тогда масса этой частицы приближенно имеет значение $\rho\Delta V$, где ρ — плотность в точке M. Если на все точки выделенной малой частицы сплошной среды действует объемная сила $\Delta\bar{F}$, то интенсивностью этой силы в точке пространства M является предел отношения $\Delta\bar{F}$ к массе частицы при стягивании ее объема в точку M, т. е.

$$\bar{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\bar{F}}{\rho\Delta V}.$$

Объемными силами являются силы гравитационного тяготения, силы инерции и некоторые другие силы.

Поверхностными силами считают силы, которые действуют со стороны остальной сплошной среды на выделенную частицу через ее поверхность. Поверхностную силу в каждой точке поверхности характеризуют ее напряжением, т. е. силой, приходящейся на единицу площади. Если через площадь ΔS малого элемента поверхности выделенной частицы остальная среда действует с силой $\Delta\bar{P}$, то напряжением $\bar{p}$ в точке поверхности является предел отношения $\Delta\bar{P}$ к ΔS при стягивании ΔS в точку M, т. е.

$$\bar{p}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta S}.$$

§ 3. СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

Поверхностные силы для выделенной частицы сплошной среды являются аналогом распределенных по поверхности сил реакций связей для твердого тела, которые рассматривались в статике. Через каждую точку пространства могут проходить поверхности многих выделенных частиц сплошной среды. Возникает задача определения таких величин в рассматриваемой точке, через которые можно выразить напряжение на элементе поверхности любой из частиц, проходящих через эту точку. Для этого достаточно знать в точке так называемый тензор напряжений.

Поверхности различных частиц, проходящих через рассматриваемую точку, характеризуют направлениями внешних нормалей к поверхностям этих частиц. У каждой частицы в какой-либо точке ее поверхности имеется своя внешняя нормаль, направленная во внешнюю сторону объема частицы.

Выделим из сплошной среды малую частицу в форме тетраэдра $OABC$ с вершиной в точке O — начале координат декартовой системы (рис. 169). Внешняя нормаль n к наклонной площадке ABC площадью ΔS_n образует с осями координат углы α, β, γ соответственно. Внешней нормалью к площадке OBC является отрицательное направление оси координат Ox, а ее площадь — ΔS_x. Аналогично, для площадки OAC площадью ΔS_y внешней нормалью будет отрицательное направление оси Oy. Для площадки OAB

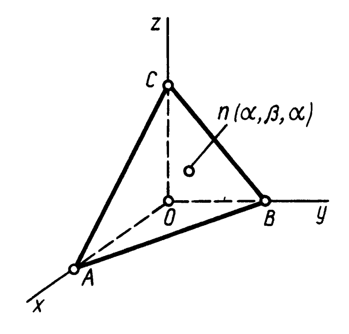


Рис. 169

внешняя нормаль — отрицательное направление оси Oz, площадь ΔS_z.

Применим к выделенному малому тетраэдру следствие из принципа Даламбера для системы, согласно которому векторная сумма всех сил, действующих на точки сплошной среды в выделенном тетраэдре, вместе с силами инерции этих точек относительно инерциальной системы отсчета равна нулю. На точки сплошной среды в выделенном тетраэдре действуют объемные силы. Их векторная сумма $\bar{F}_{ср}\rho_{ср}\Delta V$, где $\bar{F}_{ср}$ — средняя интенсивность объемной силы; $\rho_{ср}$ — средняя плотность; ΔV — объем тетраэдра. Для поверхностных сил, действующих на выделенный тетраэдр через поверхность грани OBC, действует сила $\bar{p}_{-x}\Delta S_x$, где $\bar{p}_{-x}$ — среднее напряжение на этой поверхности. Аналогично, для грани OAC поверхностная сила равна $\bar{p}_{-y}\Delta S_y$, для грани OAB — $\bar{p}_{-z}\Delta S_z$ и для ABC — $\bar{p}_n\Delta S_n$. Силы инерции для всех точек сплошной среды в тетраэдре равны $(-\rho_{ср}\bar{a}_{ср}\Delta V)$, где $\bar{a}_{ср}$ — среднее ускорение. Векторная сумма сил должна быть равна нулю, т. е.

$$\bar{F}_{ср}\rho_{ср}\Delta V-\rho_{ср}\bar{a}_{ср}\Delta V+\bar{p}_n\Delta S_n+\bar{p}_{-x}\Delta S_x+\bar{p}_{-y}\Delta S_y+\bar{p}_{-z}\Delta S_z=0. \tag{5}$$

Площади ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z на основании теоремы о связи площадей проекции и проецируемой фигуры выражаются через площадь наклонной площади ΔS_n соотношениями

$$\Delta S_x=\Delta S_n\cos\alpha;\quad \Delta S_y=\Delta S_n\cos\beta;\quad \Delta S_z=\Delta S_n\cos\gamma.$$

Объем $\Delta V={}^1/_3 h\Delta S_n$, где h — высота тетраэдра, опущенная из его вершины O на наклонную грань ABC. Поделим обе части (5) на ΔS_n и перейдем к пределу, устремив высоту тетраэдра h к нулю. Получим

$$\bar{p}_n+\bar{p}_{-x}\cos\alpha+\bar{p}_{-y}\cos\beta+\bar{p}_{-z}\cos\gamma=0, \tag{5'}$$

так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta S_n}={}^1/_3\lim_{h\to 0}h=0$$

и слагаемые с объемными силами обращаются в нуль, если другие величины, входящие в их выражение, остаются конечными во всех точках тетраэдра. В (5′) входят напряжения (после перехода к пределу) уже не средние, а те, которые действуют в точке O. Условие (5′) для поверхностных сил показывает, что главный вектор поверхностных сил для элементарного тетраэдра в пределе (при стягивании тетраэдра в точку) равен нулю. Это справедливо для частицы любой формы, так как отношение ее объема к площади поверхности в пределе стремится к нулю.

На основании закона о равенстве сил действия и противодействия для напряжений имеем:

$$\bar{p}_{-x}=-\bar{p}_x;\quad \bar{p}_{-y}=-\bar{p}_y;\quad \bar{p}_{-z}=-\bar{p}_z. \tag{6}$$

Например, $\bar{p}_{-x}$ есть напряжение от действия отброшенной части сплошной среды на выделенный тетраэдр через поверхность грани OBC. Напряжение $\bar{p}_x$ следует считать действием тетраэдра через ту же грань на остальную сплошную среду, так как для нее внешней нормалью является положительное направление оси Ox. Аналогично обосновываются два других соотношения из (6).

С учетом (6) после переноса слагаемых со знаком минус в правую часть (5') примет форму

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x \cos\alpha + \bar{p}_y \cos\beta + \bar{p}_z \cos\gamma. \tag{7}$$

Формула (7) выражает напряжение на наклонной площадке в точке O через напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через ту же точку.

Если сплошной средой является идеальная жидкость, в которой напряжениями являются только давления, параллельные нормалям к площадкам, то, проецируя (7) последовательно на оси координат Ox, Oy, Oz и считая напряжения направленными в отрицательные стороны внешних нормалей, получим:

$$-|\bar{p}_n|\cos\alpha = -|\bar{p}_x|\cos\alpha; \quad -|\bar{p}_n|\cos\beta = -|p_y|\cos\beta;$$
$$-|p_n|\cos\gamma = -|\bar{p}_z|\cos\gamma.$$

Таким образом,

$$|\bar{p}_x| = |\bar{p}_y| = |\bar{p}_z| = |\bar{p}_n| = p,$$

т. е. давление p в какой-либо точке идеальной жидкости не зависит от ориентации площадки в этой точке. Это хорошо известный закон Паскаля.

§ 4. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Напряжение на наклонной площадке с нормалью $\bar{n}$ через напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, нормалями к которым являются оси координат, определяется по формуле (7). В общем случае любой сплошной среды $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$, $\bar{p}_z$ не направлены по нормалям к площадкам, т. е. по осям координат Ox, Oy, Oz, так же как $\bar{p}_n$ не направлено по нормали к наклонной площадке. В проекциях на оси координат из (7) получаем

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\cos\alpha + p_{yx}\cos\beta + p_{zx}\cos\gamma; \\ p_{ny} &= p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{zy}\cos\gamma; \\ p_{nz} &= p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Отметим, что первый индекс у проекции напряжений обозначает нормаль к площадке, на которой рассматривается напряжение.

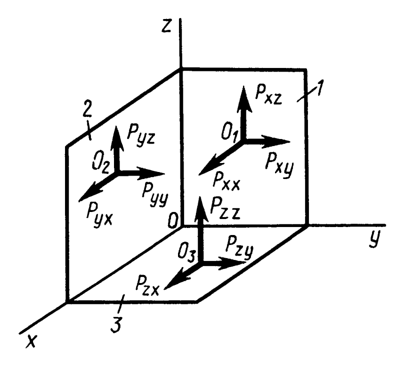


Рис. 170

Второй индекс указывает координатную ось, на которую проецируется это напряжение.

Чтобы иметь возможность определить $\bar{p}_n$, необходимо кроме углов α, β, γ, определяющих направление нормали к площадке, знать девять компонентов тензора напряжений p_{xx}, p_{xy}, ..., p_{zz} в рассматриваемой точке. Тензор напряжений Π удобно выразить в виде таблицы или матрицы:

$$\Pi=\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Значение компонентов тензора напряжений для случая, когда они все положительны, видно из рис. 170, на котором точки O_1, O_2, O_3, расположенные в плоскостях *1*, *2*, *3*, следует совместить в одной точке O. Например, p_{xx} — проекция напряжения на площадке, нормалью к которой является ось Ox, на эту же ось; p_{xy} — проекция на ось Oy напряжения $\bar{p}_x$ и т. д.

Компоненты тензора напряжений, характеризующие напряжения по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, в общем случае зависят от выбора точки и направления осей координат.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Выберем в пространстве, в котором движется сплошная среда, неподвижную относительно инерциальной системы отсчета, замкнутую поверхность площадью S, ограничивающую объем V. Эта воображаемая поверхность не препятствует движению сплошной среды. Применим к сплошной среде, которая находится в выделенном объеме в момент времени t, первое следствие из принципа Даламбера для системы. Согласно этому следствию, векторная сумма всех действующих на точки сплошной среды объемных и поверхностных сил вместе с силами инерции точек относительно инерциальной системы отсчета равна нулю. На элементарный объем сплошной среды действует объемная сила $\bar{F}\rho\,\mathrm{d}V$ и сила инерции для него соответственно $(-\bar{a}\rho\,\mathrm{d}V)$, где $\bar{F}$ — интенсивность объемной силы; $\bar{a}$ — ускорение относительно инерциальной системы отсчета; ρ — плотность. Для всего выделенного объема

векторная сумма этих сил выразится интегралом по объему $\iiint\limits_{(V)}(\bar{F}-\bar{a})\;\rho \mathrm{d}V$ (рис. 171).

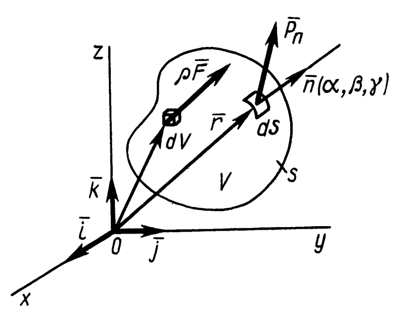


Рис. 171

На элемент $\mathrm{d}S$ поверхности выделенной части сплошной среды действует поверхностная сила $\bar{p}_n \mathrm{d}S$, где $\bar{p}_n$ — напряжение поверхностной силы в точке поверхности с внешней нормалью, имеющей углы α, β, γ с осями координат Ox, Oy, Oz. Векторная сумма всех поверхностных сил выразится интегралом по поверхности $\iint\limits_{(S)} \bar{p}_n \mathrm{d}S$.

Согласно первому следствию из принципа Даламбера, для выделенной части сплошной среды в объеме V имеем

$$\iiint\limits_{(V)}(\bar{F}-\bar{a})\,\rho \mathrm{d}V+\iint\limits_{(S)}\bar{p}_n \mathrm{d}S=0. \tag{9}$$

Преобразуем интеграл по поверхности в интеграл по объему. По формуле Гаусса — Остроградского, заменив $\bar{p}_n$ его значением из (7), получим

$$\iint\limits_{(S)}\bar{p}_n \mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)}(\bar{p}_x\cos\alpha+\bar{p}_y\cos\beta+\bar{p}_z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9) и объединяя два интеграла в один, имеем

$$\iiint\limits_{(V)}\left(-\bar{a}\rho+\bar{F}\rho+\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=0. \tag{9'}$$

Условие (9′) выполняется для произвольного объема, поэтому подынтегральное выражение обращается в нуль в каждой точке этого объема. Приравнивая его нулю, получаем у р а в н е н и е д в и ж е н и я с п л о ш н о й с р е д ы в н а п р я ж е н и я х в векторной форме, если слагаемое $(-\bar{a}\rho)$ перенести в другую часть уравнения:

$$\rho\bar{a}=\rho\bar{F}+\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}. \tag{11}$$

В проекциях на оси координат имеем

$$\left.\begin{aligned}\rho a_x&=\rho F_x+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z};\\ \rho a_y&=\rho F_y+\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z};\\ \rho a_z&=\rho F_z+\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(11')$$

При равновесии сплошной среды ускорение $\bar{a}=0$ и из (11) получим следующее условие равновесия для сил:

$$\rho\bar{F}+\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}=0.\qquad(12)$$

В проекциях на оси координат из (12) имеем

$$\left.\begin{aligned}\rho F_x+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}&=0;\\ \rho F_y+\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}&=0;\\ \rho F_z+\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(12')$$

§ 6. СИММЕТРИЧНОСТЬ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Применим к выделенной части сплошной среды (см. рис. 171) второе следствие из принципа Даламбера, согласно которому векторная сумма моментов относительно неподвижной точки O всех объемных и поверхностных сил вместе с силами инерции равна нулю. Моменты объемной силы и силы инерции для элементарного объема $\mathrm{d}V$ равны

$$\bar{r}\times(\rho\bar{F}-\rho\bar{a})\,\mathrm{d}V,$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в какую-либо точку элементарного объема. Для всей сплошной среды в выделенном объеме это дает

$$\iiint\limits_{(V)}[\bar{r}\times(\rho\bar{F}-\rho\bar{a})]\,\mathrm{d}V.$$

Аналогично для поверхностных сил получим $\iint\limits_{(S)}(\bar{r}\times\bar{p}_n)\,\mathrm{d}S$.

Согласно второму следствию из принципа Даламбера, имеем

$$\iiint\limits_{(V)}[\bar{r}\times(\rho\bar{F}-\rho\bar{a})]\,\mathrm{d}V+\iint\limits_{(S)}(\bar{r}\times\bar{p}_n)]\,\mathrm{d}S=0.\qquad(13)$$

Преобразовав поверхностный интеграл в объемный по формуле Гаусса — Остроградского и используя (7), получим

$$\iint\limits_{(S)}(\bar{r}\times\bar{p}_n)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)}[(\bar{r}\times\bar{p}_x)\cos\alpha+(\bar{r}\times\bar{p}_y)\cos\beta+(\bar{r}\times\bar{p}_y)\cos\beta+$$

$$+(\bar{r}\times\bar{p}_z)\cos\gamma]\,dS=\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{\partial(\bar{r}\times\bar{p}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{r}\times\bar{p}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{r}\times\bar{p}_z)}{\partial z}\right]dV.$$

Выполняя дифференцирование векторных произведений под знаком интеграла по объему, получим

$$\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{\partial(\bar{r}\times\bar{p}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{r}\times\bar{p}_y)}{\partial z}+\frac{\partial(\bar{r}\times\bar{p}_z)}{\partial z}\right]dV=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\times\bar{p}_x+\frac{\partial\bar{r}}{\partial y}\times\bar{p}_y+\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\times\bar{p}_z+\bar{r}\times\left(\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}\right)\right]dV. \qquad (14)$$

Подставляя значение интеграла (14) в (13), после объединения слагаемых имеем

$$\iiint\limits_{(V)}\left[\bar{r}\times\left(-\rho\bar{a}+\rho\bar{F}+\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\times\bar{p}_x+\frac{\partial\bar{r}}{\partial y}\times\bar{p}_y+\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\times\bar{p}_z\right)\right]dV=0. \qquad (13')$$

Согласно уравнению движения в напряжениях $-\rho\bar{a}+\rho\bar{F}+\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+$ $+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}=0$, из (13′) получим

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\times\bar{p}_x+\frac{\partial\bar{r}}{\partial y}\times\bar{p}_y+\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\times\bar{p}_z\right)dV=0. \qquad (13'')$$

Условие (13″) выполняется для произвольного объема, поэтому подынтегральное выражение равно нулю в каждой точке, т. е.

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\times\bar{p}_x+\frac{\partial\bar{r}}{\partial y}\times\bar{p}_y+\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\times\bar{p}_z=0. \qquad (15)$$

Так как $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, то

$$\partial\bar{r}/\partial x=\bar{i};\quad \partial\bar{r}/\partial y=\bar{j};\quad \partial\bar{r}/\partial z=\bar{k},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы декартовой системы осей координат.

Разлагая напряжения $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$, $\bar{p}_z$ на составляющие по осям координат, имеем:

$$\bar{p}_x=p_{xx}\bar{i}+p_{xy}\bar{j}+p_{xz}\bar{k};\quad \bar{p}_y=p_{yx}\bar{i}+p_{yy}\bar{j}+p_{yz}\bar{k};\quad \bar{p}_z=p_{zx}\bar{i}+p_{zy}\bar{j}+p_{zz}\bar{k}. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и выражая векторные произведения в виде определителей, получим

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix} = 0. \qquad (15')$$

После разложения определителей по элементам первых строк и компоновки слагаемых с множителями $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ имеем

$$(p_{yz}-p_{zy})\bar{i}+(p_{zx}-p_{xz})\bar{j}+(p_{xy}-p_{yx})\bar{k}=0. \qquad (15'')$$

Если вектор равен нулю, то равны нулю его составляющие по осям координат, т. е.

$$p_{yz}=p_{zy};\quad p_{zx}=p_{xz};\quad p_{xy}=p_{yx}. \qquad (17)$$

Соотношения (17) являются условиями симметрии тензора напряжений сплошной среды. Оно получено в предположении, что среди поверхностных сил нет пар сил, моменты которых следует дополнительно учитывать в (13).

Проведем в какой-либо точке две площадки с единичными векторами $\bar{n}$ и $\bar{m}$ по нормалям к ним и напряжениями $\bar{p}_n$ и $\bar{p}_m$. Проецируя напряжение $\bar{p}_n$ на направление $\bar{m}$, получим p_{nm}, а проецируя $\bar{p}_m$ на направление $\bar{n}$, получим p_{mn}. Используя условия симметрии тензора напряжений, можно получить условие взаимности напряжений по двум любым площадкам, проходящим через общую точку:

$$p_{nm}=p_{mn}. \qquad (18)$$

В частности, приняв последовательно за нормаль $\bar{m}$ оси координат Ox, Oy, Oz, из (18) получим:

$$p_{nx}=p_{xn};\quad p_{ny}=p_{yn};\quad p_{nz}=p_{zn}.$$

§ 7. ЭЛЛИПСОИД НАПРЯЖЕНИЙ

Тензору напряжений, как и любому другому тензору с двумя индексами (тензору второго ранга), можно поставить в соответствие геометрический образ — поверхность второго порядка, так же как тензору с одним индексом (тензору первого ранга, или вектору) можно поставить в соответствие прямолинейный отрезок, а числу (тензору нулевого ранга) — точку на числовой оси.

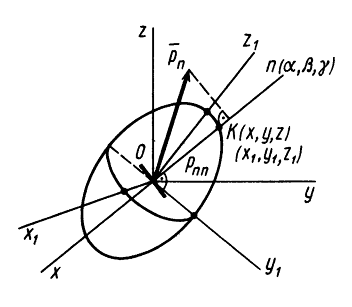


Рис. 172

Пусть имеем в точке O площадку с нормалью On, углы которой с осями координат есть α, β, γ (рис. 172). Разложим напряжение $\bar{p}_n$, действующее на выбранной площадке, на составляющие, параллельные осям координат. Получим

$$\bar{p}_n=p_{nx}\bar{i}+p_{ny}\bar{j}+p_{nz}\bar{k}, \qquad (19)$$

где p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} — проекции напряжения $\bar{p}_n$ на оси координат. Спроецируем напряжение $\bar{p}_n$ на направление нормали On, используя (19). Имеем

$$p_{nn}=p_{nx}\cos\alpha+p_{ny}\cos\beta+p_{nz}\cos\gamma. \tag{20}$$

Подставляя в (20) значения p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} из (7′), получим

$$p_{nn}=p_{xx}\cos^2\alpha+p_{yy}\cos^2\beta+p_{zz}\cos^2\gamma+2p_{yz}\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+2p_{zx}\cos\gamma\cos\alpha+p_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \tag{21}$$

Отложим на нормали On отрезок OK, величина которого обратно пропорциональна корню квадратному из модуля p_{nn}, т. е.

$$OK=1/\sqrt{|p_{nn}|}. \tag{22}$$

Если x, y, z — координаты точки K, то

$$\cos\alpha=\frac{x}{OK}=\sqrt{|p_{nn}|}\,x;\quad \cos\beta=\frac{y}{OK}=\sqrt{|p_{nn}|}\,y;\quad \cos\gamma=\frac{z}{OK}=\sqrt{|p_{nn}|}\,z. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (21) и сокращая на $|p_{nn}|$, получим

$$p_{xx}x^2+p_{yy}y^2+p_{zz}z^2+2p_{yz}yz+2p_{zx}zx+2p_{xy}xy=\pm 1. \tag{24}$$

Это и есть уравнение эллипсоида напряжений. Получаем действительно эллипсоид, если ни по одному из направлений, проходящему через точку O, p_{nn} не обращается в нуль. В этом случае расстояние от точки O до точек эллипсоида не равно бесконечности. В правой части (24) следует взять знак плюс в случае растяжения $(p_{nn}>0)$ и знак минус — при сжатии $(p_{nn}<0)$.

Эллипсоид имеет три взаимно перпендикулярные главные оси. Компоненты касательных напряжений для площадок, перпендикулярных главным осям, равны нулю. Для главных осей Ox_1, Oy_1, Oz_1 уравнение эллипсоида напряжений принимает вид

$$p_1x_1^2+p_2y_1^2+p_3z_1^2=\pm 1, \tag{24′}$$

где p_1, p_2, p_3 — нормальные напряжения для главных осей, или главные напряжения. Тензор напряжений при переходе к главным осям принимает диагональную форму:

$$\Pi=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Для различных осей координат, проходящих через рассматриваемую точку, сохраняет свою величину сумма диагональных компонентов, т. е.

$$p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}=p_1+p_2+p_3. \tag{25}$$

Она является инвариантом, не зависящим от выбора осей координат в рассматриваемой точке.

Если известны компоненты тензора напряжений для любых координатных осей, то главные напряжения p_1, p_2, p_3 определяются как корни уравнения собственных значений тензора напряжений:

$$\begin{vmatrix} p_{xx}-p & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy}-p & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz}-p \end{vmatrix}=0. \qquad (26)$$

Это кубическое уравнение для p имеет корни p_1, p_2, p_3. Оно аналогично уравнениям собственных значений тензоров инерции и скоростей деформаций. Все эти тензоры второго ранга.

Можно получить также формулы, по которым вычисляются компоненты тензора напряжений для любых прямоугольных осей координат, если известны их направления относительно главных осей и главные напряжения p_1, p_2, p_3. Приведем их без вывода:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=p_1\cos^2\alpha_1+p_2\cos^2\alpha_2+p_3\cos^2\alpha_3;\\ p_{yy}&=p_1\cos^2\beta_1+p_2\cos^2\beta_2+p_3\cos^2\beta_3;\\ p_{zz}&=p_1\cos^2\gamma_1+p_2\cos^2\gamma_2+p_3\cos^2\gamma_3;\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} &p_{xy}=p_{yx}=p_1\cos\alpha_1\cos\beta_1+p_2\cos\alpha_2\cos\beta_2+\\ &+p_3\cos\alpha_3\cos\beta_3;\\ &p_{yz}=p_{zy}=p_1\cos\beta_1\cos\gamma_1+p_2\cos\beta_2\cos\gamma_2+\\ &+p_3\cos\beta_3\cos\gamma_3;\\ &p_{zx}=p_{xz}=p_1\cos\gamma_1\cos\alpha_1+p_2\cos\gamma_2\cos\alpha_2+\\ &+p_3\cos\gamma_3\cos\alpha_3.\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

В этих формулах ось Ox имеет с главными осями Ox_1, Oy_1, Oz_1 углы α_1, α_2, α_3; ось Oy — соответственно углы β_1, β_2, β_3; ось Oz — углы γ_1, γ_2, γ_3. Формулы (27) полностью аналогичны формулам (31) для моментов инерции относительно осей координат, а (28) — формулам для центробежных моментов инерции (35) § 9 гл. 3. Это и естественно, так как компоненты тензоров второго ранга преобразуются по единым формулам при переходе от главных осей к другим осям координат, повернутым относительно главных.

§ 8. РЕОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Для различных сплошных сред зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций отличаются друг от друга. Для упругих сплошных сред тензор напряжений зависит от тензора деформаций. Зависимость между тензорами напряжений и скоростей деформаций часто называют *реологическим уравнением*. Сформулируем реологическое уравнение

в тензорной форме для сплошных сред, называемых жидкостями, для которых тензор напряжений не зависит от тензора деформаций. К жидкостям относятся обычные капельные жидкости, например вода и газы. Примером газа является воздух при нормальных атмосферных условиях.

В каждой точке пространства, занятого движущейся жидкостью, имеем тензор напряжений Π и тензор скоростей деформаций S. Первоначально были сформулированы и экспериментально проверены простейшие частные случаи зависимости компонентов этих двух тензоров, как, например, закон Ньютона для касательных напряжений. Эти зависимости оказались линейными. Это привело к предположению, что линейная зависимость соблюдается и в общем случае. Для жидкостей эта линейная зависимость тензора напряжений от тензора скоростей деформаций носит название обобщенного закона Ньютона или закона Навье-Стокса.

Линейная зависимость между тензорами Π и S в общем случае изотропной жидкости выражается в форме

$$\Pi = aS + bI, \qquad (29)$$

где I — единичный тензор; a и b — скалярные коэффициенты. Так как зависимость между компонентами тензоров Π и S предполагается линейной, то скалярный коэффициент a не должен зависеть от компонентов этих тензоров. Он должен характеризовать жидкость. Обозначим этот коэффициент 2μ. Коэффициент μ называют *коэффициентом динамической вязкости*. В общем случае он может иметь различные значения в разных точках и изменяться с течением времени.

Скалярный коэффициент b может линейно зависеть от компонентов тензоров Π и S, но только от таких комбинаций, которые не зависят от направления осей координат в рассматриваемой точке, т. е. он может зависеть от линейных инвариантов тензоров Π и S. Эту зависимость можно получить из (29), приравняв линейные инварианты обеих частей. Получим

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + b \cdot 3, \qquad (30)$$

так как линейный инвариант единичного тензора

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 3. Линейный инвариант тензора S для сокращения записи обозначим θ, т. е.

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial v_x}{dx} + \frac{\partial v_y}{dy} + \frac{\partial v_z}{dz} = \operatorname{div} \bar{v}.$$

Коэффициент θ называют также *относительной скоростью объемного расширения*. Для b имеем

$$b = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) - \frac{2}{3}\mu\theta. \tag{31}$$

Дальнейшее преобразование связано с определением статического давления в жидкости или просто давления. Для идеальной жидкости (жидкость без сил трения) было доказано, что $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$. Абсолютную величину p этого общего отрицательного напряжения и называют *давлением в рассматриваемой точке*. В вязкой жидкости нормальные напряжения p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} не равны друг другу. Естественно определить давление p в этом случае как среднее арифметическое нормальных напряжений, взятое с обратным знаком, т. е.

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \tag{32}$$

Подставляя (32) в (31), получаем

$$b = -p - {}^2/_3\,\mu\theta. \tag{33}$$

При таком определении давления вязкие свойства жидкости характеризуются одним коэффициентом μ. Для некоторых жидкостей этого недостаточно. Тогда предполагают, что давление зависит еще линейно и от относительной скорости объемного расширения θ, т. е.

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) + \lambda'\theta, \tag{34}$$

где λ' — второй коэффициент вязкости. В этом случае

$$b = -p + \lambda\theta, \tag{33'}$$

где $\lambda = \lambda' - \frac{2}{3}\mu$. Если $\lambda' = 0$, то $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. В дальнейшем для b используем величину из (33′), как более общую. Из (33′) значение b, определяемое соотношением (33), получается как частный случай при $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

Давление p нельзя определить произвольно, так как оно должно соответствовать определению давления в термодинамике через кинетическую энергию движения молекул.

Подставляя b из (33′) в (29), получаем следующее реологическое уравнение для жидкостей в тензорной форме:

$$\Pi = 2\mu S + (-p + \lambda\theta) I \tag{29'}$$

или

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = (-p + \lambda\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}. \tag{29''}$$

Тензорные равенства, справедливые в одной системе координат, выполняются в любой другой системе координат, не только в декартовой, но и в криволинейной, так как все тензоры при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по одним и тем же общим правилам.

Тензорное уравнение (29″) эквивалентно шести уравнениям для компонентов. Имеем

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=-p+\lambda\theta+2\mu e_{xx};\ p_{xy}=p_{yx}=2\mu e_{xy};\\ p_{yy}&=-p+\lambda\theta+2\mu e_{yy};\ p_{yz}=p_{zy}=2\mu e_{yz};\\ p_{zz}&=-p+\lambda\theta+2\mu e_{zz};\ p_{zx}=p_{xz}=2\mu e_{zx}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &e_{xx}=\frac{\partial v_x}{\partial x};\ e_{yy}=\frac{\partial v_y}{\partial y};\ e_{zz}=\frac{\partial v_z}{\partial z};\\ &e_{xy}=e_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right);\ e_{yz}=e_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right);\\ &e_{zx}=e_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right);\\ &\theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\operatorname{div}\bar{v}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Шесть скалярных уравнений (35) выражают обобщенный закон Ньютона или Навье—Стокса для жидкостей.

В частном случае движение несжимаемой жидкости $(\theta=$ $=\operatorname{div}\bar{v}=0)$ параллельно оси Ox, при котором $v_y=v_z=0$ и $v_x=v(y)$ (рис. 173), для касательных компонентов тензора напряжений из (35) с учетом (36) имеем

$$p_{xy}=p_{yx}=2\mu e_{xy}=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}=\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y};$$

$$p_{yz}=p_{zx}=0.$$

Обозначим p_{xy} через τ. Тогда закон для касательных напряжений выразится в форме

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

Это и есть закон Ньютона для касательных напряжений в жидкости. Для некоторых жидкостей линейной зависимости между тензорами напряжений и скоростей деформаций недостаточно. Такие жидкости называют *неньютоновскими жидкостями*.

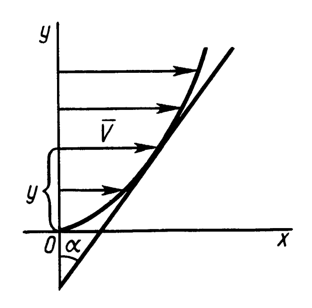


Рис. 173

Обобщенный Закон Гука для упругих сплошных сред тоже получают как линейную зависимость между тензором напряжений Π и тензором деформаций S', компоненты которого выражаются

по формулам (36), только вместо вектора скорости $\bar{v}$ используется вектор смещения $\bar{u}$, характеризующий деформацию сплошной среды. Тензор деформаций и обобщенный закон Гука для упругих сплошных сред подробно рассматриваются в теории упругости и курсах сопротивления материалов с элементами теории упругости. Здесь ограничимся только краткими сведениями, относящимися к обобщенному закону Гука.

Для упругих сплошных сред линейная зависимость между тензором напряжений Π и тензором деформаций S', который тоже является симметричным, аналогична (29) и выражается в форме

$$\Pi = 2\mu S' + bI, \tag{37}$$

где

$$b = {}^1/_3\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right) - {}^2/_3\,\mu\theta'; \quad \theta' = \operatorname{div}\bar{u}.$$

Величина θ' называется *относительным объемным расширением*. Дополнительно принимают, что среднее арифметическое значение осевых напряжений линейно зависит от относительного объемного расширения, т. е.

$${}^1/_3\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right) = \lambda'\theta'. \tag{38}$$

С учетом (38) тензорная зависимость (37) принимает вид

$$\Pi = \lambda\theta' I + 2\mu S'. \tag{39}$$

Если (39) выразить в компонентах, то получим обобщенный закон Гука в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = \lambda\theta' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} e'_{xx} & e'_{xy} & e'_{xz} \\ e'_{yx} & e'_{yy} & e'_{yz} \\ e'_{zx} & e'_{zy} & e'_{zz} \end{pmatrix}, \tag{39'}$$

или

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \lambda\theta' + 2\mu e'_{xx}; \; p_{xy} = p_{yx} = 2\mu e'_{xy}; \\ p_{yy} &= \lambda\theta' + 2\mu e'_{yy}; \; p_{yz} = p_{zy} = 2\mu e'_{yz}; \\ p_{zz} &= \lambda\theta' + 2\mu e'_{zz}; \; p_{zx} = p_{xz} = 2\mu e'_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Коэффициенты λ и μ, характеризующие упругую сплошную среду, называются *параметрами Ламэ*. Они связаны с модулем упругости Юнга E и коэффициентом Пуассона σ соотношениями

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

В том случае, если деформации не малы, используется нелинейная зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформаций.

§ 9. МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В механике ньютоновских жидкостей рассматривают различные их модели. Наиболее простой моделью жидкости является несжимаемая идеальная жидкость, для которой плот-

ность $\rho = \text{const}$ (несжимаемая) и коэффициент динамической вязкости $\mu = 0$ (идеальная). Другой моделью является вязкая несжимаемая жидкость. Для нее $\rho = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$. Самой простой моделью сжимаемой жидкости является идеальная сжимаемая жидкость, или идеальный газ. Для него $\mu = 0$, а плотность уже не является постоянной. Она для совершенного газа связана с давлением p и температурой T уравнением состояния (уравнением Клапейрона)

$$p = R\rho T,$$

где R — газовая постоянная, зависящая от рода газа. Это уравнение, справедливое для обратимых процессов, считается справедливым и при движении газа. Более сложной моделью сжимаемой жидкости является вязкий газ, или вязкая сжимаемая жидкость. В этом случае от давления и температуры зависит не только плотность, но и коэффициент динамической вязкости (величина переменная). Коэффициент динамической вязкости зависит главным образом от температуры.

Если в рассмотренных моделях жидкостей учесть электромагнитные силы, действующие на точки сплошной среды, то получим модели жидкостей магнитной гидродинамики.

В случае вязкого газа полная система уравнений, характеризующая его движение и различные процессы в нем, слишком сложна и содержит много уравнений. В качестве примеров получим полную систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, а также уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости и идеального газа.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Если жидкость вязкая и несжимаемая, то $\mu = \text{const}$, $\theta = \operatorname{div}\bar{v} = 0$ и слагаемые с параметром λ из (35) выпадают. Подставляя в них значения величин из (36), получим

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x};\ p_{xy} = p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right);\\
p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y};\ p_{yz} = p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right);\\
p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z};\ p_{xz} = p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Используя (41), получаем

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta v_x,$$

где введено обозначение

$$\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

и использовано условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

С помощью аналогичных преобразований получим

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y;$$

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z.$$

С учетом этого уравнения движения сплошной среды в напряжениях для вязкой несжимаемой жидкости вместе с уравнением неразрывности дают следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_x; \\ &\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_y; \\ &\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_z; \\ &\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Имеем четыре уравнения для определения четырех неизвестных v_x; v_y; v_z; p в зависимости от x; y; z; t. Для интегрирования этой системы уравнений следует дополнительно задать начальные и граничные условия. Начальные условия считаются заданными, если, например, при $t=0$ известны во всем пространстве функции

$$\begin{aligned} &v_x = v_x(x, y, z, 0); \; v_y = v_y(x, y, z, 0); \\ &v_z = v_z(x, y, z, 0); \; p = p(x, y, z, 0). \end{aligned} \qquad (43)$$

Для установившихся движений задавать начальные условия не требуется, так как в этом случае неизвестные от времени не зависят.

В качестве граничных условий для вязкой жидкости используются условия прилипания жидкости к поверхности тел, находящихся в потоке. Если эти тела неподвижны, то скорости жидкости на их поверхности равны нулю, а следовательно, равны нулю касательные и нормальные по отношению к поверхности тел составляющие скоростей.

Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости. Для того чтобы получить уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости, следует в (42) принять $\mu=0$. Получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};\\
&\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

Первые три уравнения (44) называются *уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости* или *уравнениями Эйлера*. Начальные условия в этом случае задаются так же, как и в случае вязкой жидкости. Существенно изменяются граничные условия. Вместо условий прилипания вязкой жидкости используется условие отсутствия проникания жидкости через поверхность твердого тела, при котором обращаются в нуль нормальные составляющие скоростей в точках поверхности неподвижного тела, т. е. принимается, что вектор скорости направлен по касательной к поверхности обтекаемого тела.

Уравнения движения идеального газа. Первые три уравнения движения идеального газа (или просто газа) совпадают с аналогичными уравнениями несжимаемой идеальной жидкости. При их выводе не использовалось условие несжимаемости. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

Слагаемые с λ выпадают из уравнений, так как принимается, что $\lambda=-2\mu/3$, а $\mu=0$ для идеального газа. В уравнениях (45) плотность ρ является для газа переменной. К этим уравнениям следует присоединить уравнение неразрывности для газа в форме

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0.$$

Четыре уравнения связывают пять величин v_x; v_y; v_z; p; ρ, зависящих от переменных x; y; z; t. Для замыкания системы уравнений следует добавить еще одно уравнение,

характеризующее процесс, связанный с движением газа. Наиболее часто встречающимся процессом является баротропный процесс, при котором давление есть только функция плотности, т. е. $p=f(\rho)$. Типичным баротропным процессом является адиабатический процесс, при котором $p=c\rho^{\varkappa}$, где c — константа; $\varkappa=c_p/c_V$ — показатель адиабаты, зависящий от теплоемкостей газа при постоянном давлении (c_p) и объеме (c_V).

В более общем случае давление и плотность считаются связанными уравнением состояния Клапейрона. Появится новая неизвестная — температура T, требующая для своего определения дополнительного уравнения. Этим уравнением является уравнение баланса энергии.

В магнитной гидродинамике (при учете электромагнитных сил) к рассмотренным выше уравнениям для различных моделей жидкостей следует добавить уравнения Максвелла для электромагнитных полей, а также дополнить начальные и граничные условия для жидкости условиями для электромагнитных величин.

§ 10. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Из уравнений движения жидкости как в общем, так и в частных случаях можно получить критерии подобия, которые позволяют устанавливать зависимости между величинами, характеризующими поток и обтекаемое тело, в наиболее целесообразной, критериальной форме.

Два явления называются подобными, если величины одного могут быть получены из соответствующих величин другого умножением на одинаковые коэффициенты подобия для всех сходственных точек и моментов времени, т. е. подобные явления отличаются только масштабами величин, их характеризующих.

Для подобия плавного обтекания двух тел вязкой несжимаемой жидкостью должны быть геометрически подобны сами тела и одинаковы безразмерные уравнения движения жидкости и безразмерные начальные и граничные условия.

Преобразуем уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости к безразмерному виду введением в уравнения безразмерных величин как независимых переменных, так и искомых. Для независимых переменных, имеющих размерность длины, выберем характерную длину l, или масштаб длин. Для тела в форме шара в качестве масштаба длин можно взять радиус шара. Для крыла самолета за характерную длину обычно выбирают среднюю хорду крыла, являющуюся его характерной шириной. В качестве масштаба времени возьмем T, для скоростей — V, давления — P. Постоянные величины сами являются для себя масштабами.

Для безразмерных величин имеем:

$$x'=x/l;\ y'=y/l;\ z'=z/l;\ t'=t/T;\ p'=p/P;\ v'_x=v_x/V;\ v'_y=v_y/V;$$
$$v'_z=v_z/V;\ \bar{v}'=\bar{v}/V.$$

Дополнительно примем, что объемными силами являются только силы тяжести, и ось Oz с единичным вектором $\bar{k}$ направлена вертикально вверх, т. е. $\bar{F}=-g\bar{k}$.

Переходя в уравнениях движения вязкой несжимаемой жидкости (42) к безразмерным величинам и выразив для краткости первые три уравнения в векторной форме, имеем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{V}{T}\frac{\partial\bar{v}'}{\partial t'}+\frac{V^2}{l}\left(v'_x\frac{\partial\bar{v}'}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial\bar{v}'}{\partial y'}+v'_z\frac{\partial\bar{v}'}{\partial z}=\right.\\&=-g\bar{k}-\frac{P}{\rho l}\nabla p'+\frac{\nu V}{l^2}\left(\frac{\partial^2\bar{v}'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\bar{v}'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\bar{v}'}{\partial z'^2}\right);\\&\frac{V}{l}\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}+\frac{\partial v'_z}{\partial z}\right)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(42')$$

где

$$\nabla p'=\frac{\partial p'}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial p'}{\partial y}\bar{j}+\frac{dp'}{dz}\bar{k}$$

— градиент давления. Разделив первое векторное уравнение (42) на V^2/l, а второе скалярное — на V/l, получим

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sh}\frac{\partial\bar{v}'}{\partial t'}+v'_x\frac{\partial\bar{v}'}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial\bar{v}'}{\partial y'}+v'_z\frac{\partial\bar{v}'}{\partial z'}=\\&=-\frac{1}{\mathrm{Fr}}\bar{k}-\mathrm{Eu}\nabla p'+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\bar{v}'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\bar{v}'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\bar{v}'}{\partial z'^2}\right);\\&\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}+\frac{\partial v'_z}{\partial z'}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(42'')$$

Здесь введены следующие обозначения для чисел подобия: $\mathrm{Sh}=\frac{l}{TV}$ — число Струхаля; $\mathrm{Eu}=\frac{P}{\rho V^2}$ — число Эйлера; $\mathrm{Re}=\frac{Vl}{\nu}$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Fr}=\frac{V^2}{gl}$ — число Фруда.

Получены уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерной форме. Для подобия течений такой жидкости должны быть одинаковы полученные уравнения в безразмерной форме, а для этого необходимо выполнение критериев подобия, т. е. чтобы были одинаковы для подобных течений числа Струхаля, Эйлера, Рейнольдса, Фруда.

Критерии подобия имеют важное значение не только при теоретических, но и при экспериментальных исследованиях течений вязкой несжимаемой жидкости. Если, например, необходимо определить силу сопротивления R, действующую на тела одинаковой формы при обтекании их потоком несжимаемой вязкой жидкости, то целесообразно ввести безразмерный коэффициент этой силы (безразмерную силу сопротивления)

$$C_R = \frac{R}{\rho V^2 S/2},$$

где S — характерная площадь тела, например площадь поперечного сечения (наибольшая) в направлении, перпендикулярном потоку жидкости.

Для всех тел одинаковой формы имеется общая критериальная зависимость безразмерной силы сопротивления от чисел подобия:

$$C_R = f(\mathrm{Sh}, \mathrm{Eu}, \mathrm{Re}, \mathrm{Fr}). \qquad (46)$$

Вид функции f полностью определяется формой рассматриваемых тел. Аналогичные критериальные зависимости получаются для других безразмерных величин.

Критериальная зависимость (46) может быть получена путем использования результатов интегрирования уравнений (42) при заданных начальных и граничных условиях или из экспериментальных данных, получаемых обычно на модели тела, уменьшенной по сравнению с его натуральной величиной.

Если движение жидкости установившееся, то число Струхаля не войдет в число критериев подобия, так как в этом случае $\partial \bar{v}'/\partial t = 0$. При пренебрежении силами тяжести выпадает из критериев подобия число Фруда. Критериальная зависимость (46) тогда примет вид

$$C_R = f(\mathrm{Eu}, \mathrm{Re}). \qquad (46')$$

Во многих случаях число Эйлера несущественно. Оно может оказаться зависящим от числа Рейнольдса. В таких случаях

$$C_R = f(\mathrm{Re}) = f\left(\frac{Vl}{\nu}\right), \qquad (46'')$$

т. е. безразмерная сила сопротивления зависит только от числа Рейнольдса.

При установлении критериальной зависимости (46″) по результатам эксперимента на модели обтекаемого тела в диапазоне чисел Рейнольдса, имеющих место для натуры, характерный размер которой может быть в десятки раз больше соответствующего размера модели, большие числа Re приходится получать за счет увеличения скорости или уменьшения коэффициента кинематической вязкости ν или, наконец, и того и другого вместе. Для критериальной зависимости несущест-

венно, за счет чего на модели будут достигнуты числа Re, характерные для натуры. Кинематическую вязкость для некоторых жидкостей $\nu=\mu/\rho$ можно уменьшить путем увеличения плотности, если коэффициент динамической вязкости от плотности не зависит или зависит от нее слабо.

При учете сжимаемости жидкости появится новое число подобия: число Маха $M=V/a$, где a—скорость звука в жидкости. Это число подобия тоже войдет в критериальную зависимость типа (46).

Критериальные зависимости можно также получать используя теорию размерностей физических величин. Теория размерностей позволяет установить параметры, от которых зависит искомая безразмерная величина. Вид функции f и с помощью теории размерностей удается установить лишь в редких случаях.

§ 11. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим ламинарное (слоистое) течение вязкой несжимаемой жидкости в гладкой цилиндрической трубе. Примем, что движение установившееся. На этом примере покажем, как устанавливается критериальная зависимость сопротивления трубы от числа Рейнольдса. Решение поставленной задачи важно и само по себе как случай точного интегрирования уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.

Для установившегося движения жидкости, пренебрегая силами тяжести, имеем из (42) следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x;\\ &v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v_y;\\ &v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z;\\ &\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

К этим уравнениям следует добавить граничное условие прилипания вязкой жидкости к стенкам трубы, т. е. обращение в нуль скорости жидкости на стенках трубы.

Направим координатную ось Oz по оси трубы, тогда оси Ox и Oy расположатся в поперечном сечении трубы, имеющем форму круга, радиусом R (рис. 174).

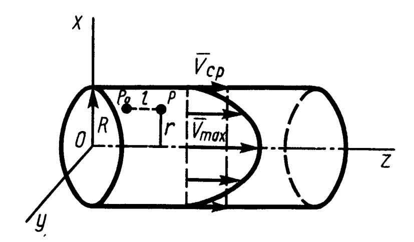


Рис. 174

Ищем решение уравнений (47), удовлетворяющее условиям $v_x = v_y = 0$. Тогда дальнейшему определению подлежит только $v_z = v_z(x, y, z)$, если решение такого вида удовлетворяет уравнениям движения жидкости. Из первых двух уравнений (47) получим $\partial p/\partial x = 0$; $\partial p/\partial y = 0$, т. е. $p = p(z)$, или что давление в каждом поперечном сечении одно и то же во всех точках и изменяется только вдоль трубы. Из уравнения неразрывности при принятом допущении получаем, что $\partial v_z/\partial z = 0$, т. е. $v_z = v(x, y)$. После этого третье уравнение системы (47) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).$$

Левая часть этого уравнения может зависеть только от z, а правая — только от x и y. Это возможно только в том случае, если и правая и левая части этого уравнения постоянны, т. е.

$$\frac{\partial p}{dz} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \mathrm{const}; \quad \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \mathrm{const}.$$

Так как $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = \mathrm{const}$, то давление, приходящееся на единицу расстояния вдоль трубы, можно выразить в виде

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{p_0 - p}{l} = -\frac{\Delta p}{l} = \mathrm{const},$$

где $p_0 - p = \Delta p$ — перепад давлений на длине l между двумя сечениями трубы вдоль ее оси. Знак минус поставлен потому, что движение жидкости происходит только в направлении убывания давления.

Для определения v имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}. \tag{48}$$

Будем искать решение уравнения (48) в форме

$$v = A\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right). \tag{49}$$

Это значение удовлетворяет граничному условию прилипания на стенках трубы, так как $v = 0$ при $x^2 + y = R^2$. Остается дополнительно определить только константу A путем подстановки выражения (49) в (48).

Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{A\cdot 2x}{R^2};\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{A\cdot 2y}{R^2};\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{2A}{R};\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{2A}{R^2},$$

то уравнение (48) примет вид

$$-\frac{4A}{R^2}=-\frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Отсюда

$$A=\frac{\Delta p\cdot R^2}{4\mu l}.$$

Используя это значение A и вводя переменную $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние до рассматриваемой точки от оси трубы, решение (49) можно выразить в форме

$$v=\frac{\Delta p\cdot R^2}{4\mu l}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=v_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), \qquad (49')$$

где $v_{\max}=\Delta p\cdot R^2/(4\mu l)$ — значение скорости при $r=0$, т. е. на оси трубы.

Полученное выражение для v является решением поставленной задачи.

Определим секундный объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы (рис. 175). Он для всех сечений одинаков, так как скорость v не изменяется вдоль трубы. Секундный объем жидкости, проходящей через заштрихованную площадь тонкого кольца, равен площади этого кольца, умноженной на скорость движения жидкости, т. е. $2\pi rv\mathrm{d}r$. Через все поперечное сечение трубы за 1 с пройдет объем жидкости

$$Q=\int_0^R 2\pi rv\mathrm{d}r.$$

Используя для v выражение (49′), после вычисления интеграла получим

$$Q=-\frac{2\pi\Delta p\cdot R^2}{4\mu l R^2}\int_0^R\left(R^2-r^2\right)\mathrm{d}\left(R^2-r^2\right)=\frac{\pi v_{\max}}{R^2}\,\frac{R^4}{2}=-\frac{\pi v_{\max}R^2}{2},$$

так как $\mathrm{d}\left(R^2-r^2\right)=-2r\mathrm{d}r$, т. е.

$$Q=\frac{\pi v_{\max}R^2}{2}=\frac{\pi\Delta p\cdot R^4}{8\mu l}. \qquad (50)$$

Это известный *закон Гагена — Пуазейля*. Секундный объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы, оказался пропорциональным величине R^4, что неожиданно. Кажется, что он должен был быть пропорционален площади поперечного сечения, т. е. R^2.

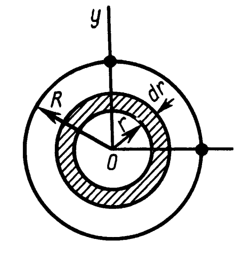


Рис. 175

Введем среднюю скорость течения жидкости $v_{\text{ср}}$ как постоянную по сечению трубы скорость, при которой получается тот же секундный объемный расход жидкости Q, что и при переменной скорости. Используя уравнение (50), имеем

$$v_{\text{ср}}=\frac{Q}{\pi R^2}=\frac{v_{\max}}{2}=\frac{\Delta p\cdot R^2}{8\mu l}. \quad (51)$$

Сопротивление трубы можно охарактеризовать перепадом давления, приходящегося на единицу длины вдоль трубы, т. е. отношением $\Delta p/l$. Чем больше эта величина, тем больше сопротивление трубы, обусловленное силами трения между слоями жидкости. Введем безразмерный коэффициент сопротивления трубы λ как безразмерную величину перепада давления на единицу длины $\Delta p/l$. Получим

$$\frac{\Delta p}{l}=\lambda\frac{1}{2R}\frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}, \quad (52)$$

где $\rho v_{\text{ср}}^2/2$ — скоростной напор; $2R$ — диаметр трубы. Из (51) для $\Delta p/l$ имеем

$$\frac{\Delta p}{l}=\frac{8\mu v_{\text{ср}}}{R^2}. \quad (51')$$

Приравнивая значения $\Delta p/l$ из (51) и (52), получаем

$$\frac{\lambda}{2R}\frac{\rho v_{\text{ср}}}{2}=\frac{8\mu v_{\text{ср}}}{R^2}.$$

Отсюда имеем

$$\lambda=\frac{64}{2Rv_{\text{ср}}}\frac{\mu}{\rho}=\frac{64}{\text{Re}}, \quad (53)$$

так как $2Rv_{\text{ср}}/\nu=\text{Re}$ — число Рейнольдса, отнесенное к диаметру трубы.

Получена критериальная зависимость коэффициента сопротивления трубы от числа Рейнольдса, которая была предсказана теорией подобия течений вязкой несжимаемой жидкости.

Логарифмируя уравнение (53), получим

$$\lg\lambda=\lg 64-\lg\text{Re}. \quad (53')$$

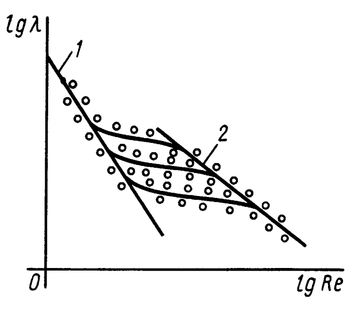


Рис. 176

В логарифмическом масштабе зависимость (53) выражается графически отрезком прямой линии *1* (рис. 176). Эта линейная зависимость подтверждена многочисленными экспериментами. Но она выполняется примерно до чисел $\text{Re}\leqslant 2\cdot 10^3$. Затем после некоторого переходного участка экспериментальные точки соответствуют прямой *2*. Прямая *1* дает закон со-

противления при ламинарном режиме течения жидкости в трубе, а прямая *2* — при турбулентном, характеризующемся интенсивным перемешиванием жидкости в поперечном к течению направлении.

До чисел $Re \leqslant 2 \cdot 10^3$ устойчивой формой течения в трубе является ламинарная форма, а для $Re > 2 \cdot 10^3$ — турбулентная. Коэффициент сопротивления при турбулентном режиме течения во много раз больше, чем при ламинарном, для одних и тех же чисел Рейнольдса.

§ 12. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ. СКОРОСТЬ ЗВУКА

Рассмотрим движение газа (сжимаемой жидкости) параллельно оси Ox. Такое движение газа называют одномерным. В случае одномерного движения $v_y = v_z = 0$; $v_x = v(x, t)$ и уравнения (45) в случае баротропного процесса принимают форму

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0;\\ &p = f(\rho). \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Предположим, что имеем покоящийся газ с параметрами $v = v_0 = 0$; $p = p_0$; $\rho = \rho_0$, где p_0 и ρ_0 — постоянные величины. В начальный момент в газе создано такое малое возмущение, при котором дальнейшее движение газа происходит параллельно оси Ox и все величины, характеризующие движущийся газ, зависят только от координаты x и времени t. В произвольный момент времени для скорости, давления и плотности имеем:

$$v = v'(x, t); \quad p = p_0 + p'(x, t); \quad \rho = \rho_0 + \rho'(x, t),$$

где v'; p'; ρ' — малые возмущения скорости, давления и плотности. Допуская, что производные от малых возмущений тоже величины малые, линеаризируем систему уравнений (54), отбрасывая в них малые слагаемые второго и более высокого порядка. Для производных в рассматриваемом случае имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v'}{\partial t}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial x}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho'}{\partial x}.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_0+\rho'}=\frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{-1}=\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}+\ldots\right);$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\frac{\partial \rho'}{\partial x}.$$

Разлагая в степенной ряд производную $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$ по ρ', получим

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_0+\left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\rho^2}\right)_0\rho'+\ldots .$$

Введем обозначение $\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_0=a_0^2$. Эта постоянная величина действительно положительна, так как с возрастанием давления плотность возрастает, а при убывании давления — убывает для баротропных процессов.

После этого, отбрасывая в (54) малые величины второго и более высокого порядка, имеем

$$\frac{\partial v'}{\partial t}=-\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x};\quad \frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial v'}{\partial x}=0. \tag{55}$$

Получена система уравнений (линейных) для малых возмущений скорости и плотности (v' и ρ').

Линеаризация уравнения $p=f(\rho)$ приведет к выражению для возмущения давления $p'=a_0^2\rho'$.

Дифференцируя первое уравнение системы (55) по t, а второе — по x и вычитая после этого из первого второе, которое умножено на a_0^2/ρ_0 имеем

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}-a_0^2\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}=0. \tag{56}$$

Аналогичным способом для ρ' получим такое же по виду уравнение

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-a_0^2\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}=0. \tag{56'}$$

Возмущение давления p' удовлетворяет аналогичному уравнению.

Уравнение (56) называется *волновым уравнением*. Если бы движение газа не было параллельным оси Ox, то после линеаризации уравнений (45) получили бы для ρ' уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-a_0^2\left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2}\right)=0,$$

или

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2}\right)=0.$$

При $a_0 \to \infty$ и конечных значениях производных оно перейдет в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2}=0.$$

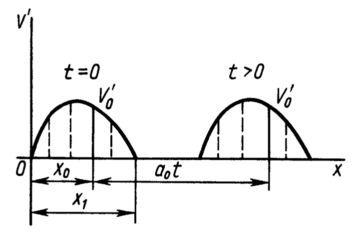


Рис. 177

Волновое уравнение и уравнение Лапласа являются двумя из трех типов основных уравнений математической физики. Они дают математическое описание многих физических процессов.

Волновое уравнение (56) решают или методом разделения переменных (метод Фурье), или используют решение Даламбера, которое для v' выражается в форме

$$v'(x, t)=f_1(\xi_1)+f_2(\xi_2), \tag{57}$$

где новые переменные ξ_1 и ξ_2 связаны с x и t следующими зависимостями: $\xi_1=x-a_0t$; $\xi_2=x+a_0t$, а f_1 и f_2 — произвольные функции, которые следует определять по начальным и граничным условиям. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение (57) обращает уравнение (56) в тождество, т. е. оно является решением этого уравнения.

Рассмотрим функции $f_1(\xi_1)$ и $f_2(\xi_2)$ по отдельности, т. е. примем сначала, что $v'=f_1(\xi_1)$. Если в начальный момент времени $t=0$ (рис. 177) отметить начальное возмущение v'_0, соответствующее $x=x_0$ и, следовательно, $\xi_{10}=x_0$, то будет $v'=v'_0$, если при изменении x и t не изменится ξ_1, т. е. при этом $\xi_1=x-a_0t=x_0$ и остается постоянной. Отсюда получаем, что $x=x_0+a_0t$, т. е. что возмущение v'_0 сместится за время t в положительном направлении оси Ox на расстояние a_0t. Скорость этого смещения постоянна и равна a_0. Таким образом, a_0 является скоростью распространения в покоящемся газе малых возмущений скорости и соответственно всех других малых возмущений. Начальное возмущение скорости на отрезке $0 \leqslant x \leqslant x_0$ за время t без изменения формы сместится на расстояние a_0t в положительном направлении оси Ox.

Таким образом, $v'=f_1(\xi_1)$ является волной, распространяющейся по газу со скоростью a_0 в положительном направлении оси Ox. Соответственно $v'=f_2(\xi_2)$ есть волна, которая распространяется с той же скоростью a_0, но в отрицательном направлении оси Ox, так как в этом случае $\xi_2=x+a_0t$.

Скорость a_0 распространения малых возмущений называется *скоростью звука в покоящемся газе*. В движущемся газе скоростью звука называют величину $a=\sqrt{\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho}$, являющуюся в общем случае величиной переменной, которая зависит от координат точки пространства и времени. Как показывают более детальные исследования, со скоростью звука распространяются любые малые возмущения. Конечные возмущения

распространяются со скоростями, бо́льшими скорости звука, в зависимости от величины возмущения. Такие возмущения обычно называют *ударными волнами.*

Если жидкость, в которой распространяется звук, несжимаема, т. е. $\rho=\text{const}$, то $d\rho=0$ и $a=\infty$.

И. Ньютон в 1687 г. считал, что распространение звука есть процесс изотермический, т. е. при распространении звука абсолютная температура $T=\text{const}$. Тогда из уравнений состояния Клапейрона имеем

$$p=RT\rho=c\rho,$$

где константа $c=RT$. В этом случае

$$a_{\text{из}}^2=dp/d\rho=c=p/\rho;\quad a_{\text{из}}=\sqrt{p/\rho}.$$

Опыты показали, что наблюдаемая скорость звука больше, чем она получается по формуле Ньютона. Это расхождение Ньютон объяснял наличием в воздухе водяных паров.

П. Лаплас в 1810 г. предположил, что распространение звука в газе есть процесс адиабатический, т. е. что давление и плотность связаны уравнением адиабаты:

$$p=c_1\rho^{\varkappa};\quad c_1=\text{const};\quad \varkappa=c_p/c_V.$$

В этом случае

$$\frac{dp}{d\rho}=c_1\varkappa\rho^{\varkappa-1}=\varkappa c_1\frac{\rho^{\varkappa}}{\rho}=\varkappa\frac{p}{\rho}$$

и для скорости звука имеем

$$a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}=\sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}.$$

Формула Лапласа для скорости звука дает значения, хорошо согласующиеся с опытными данными. Таким образом, *распространение звука и любых других малых возмущений есть процесс адиабатический.*

Из уравнения Клапейрона $p/\rho=RT$; следовательно,

$$a=\sqrt{\varkappa p/\rho}=\sqrt{\varkappa RT},$$

т. е. скорость звука зависит только от абсолютной температуры и рода газа. Для воздуха скорость звука — в м/с:

$$a=20{,}1\sqrt{T}.$$

При $T=273$ К $(t=0°\ \text{C})$ $a=332$ м/с.

Скорость звука тесно связана со средней скоростью свободного пробега молекул v_s, где $a\approx 0{,}7v_s$.

Движение газа со скоростями $v<a$ называется дозвуковым. В этом случае число Маха $\text{M}=v/a<1$. Движение газа при $\text{M}=1$ называют звуковым. При сверхзвуковом движении газа $\text{M}>1$.

Интересна особенность распространения малых возмущений в газе, движущемся со сверхзвуковой скоростью. Если при этом в какой-либо точке произведено малое возмущение газа в момент $t=0$, то в любой другой момент времени t точка газа, в которой произведено возмущение, сместит-

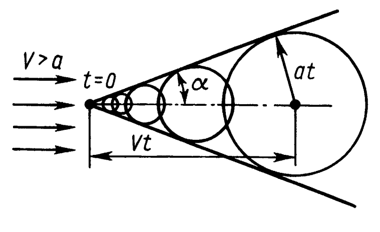


Рис. 178

ся вместе с движущимся газом на расстояние vt, а возмущение по газу распространится на сферу радиусом at. Все возмущения, таким образом, локализуются в конусе с вершиной в той точке, где произведено начальное возмущение. Угол полураствора конуса α (рис. 178) определяется из выражения

$$\sin\alpha=\frac{at}{vt}=\frac{a}{v}=\frac{1}{v/a}=\frac{1}{\mathrm{M}}.$$

При $\mathrm{M}=1$ величина $\sin\alpha=1$ и $\alpha=\pi/2$. При $\mathrm{M}\to\infty$ угол $\alpha\to 0$, т. е. все возмущение локализуется в области, стягивающейся в отрезок прямой линии.

§ 13. ОДНОМЕРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ВДОЛЬ ТРУБЫ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Одномерное установившееся течение газа вдоль трубы переменного сечения является некоторым приближением к действительности, так как в основу его положено предположение, что параметры потока газа, такие, как скорость потока, давление и плотность, одинаковы во всех точках каждого из поперечных сечений, перпендикулярного оси трубы. Это предположение довольно хорошо соответствует действительности для элементарной трубки тока, но его применяют и для труб конечных размеров, используя средние величины по сечениям трубы.

Предварительно получим из уравнений движения газа (45) в частном случае установившегося безвихревого движения следствие в форме уравнения Бернулли. Для этого выразим левые части трех этих уравнений (45) в форме Лэмба — Громеки. Пренебрегая объемными силами, имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\left(v_y\Omega_z-v_z\Omega_y\right)=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\left(v_z\Omega_x-v_x\Omega_z\right)=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y};\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\left(v_x\Omega_y-v_y\Omega_x\right)=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}$$

Предполагая, что движение стационарное $\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}=0\right)$ и безвихревое $(\Omega_x=\Omega_y=\Omega_z=0)$, получим из этих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Умножая первое из этих уравнений на $\mathrm{d}x$, второе — на $\mathrm{d}y$, третье — на $\mathrm{d}z$ и складывая, получим

$$\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho},$$

или

$$v\mathrm{d}v+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=0. \tag{58}$$

Это и есть *уравнение Бернулли* в дифференциальной форме.

Если (58) проинтегрировать от состояния газа, в котором $v=v_0$; $p=p_0$; $\rho=\rho_0$, до состояния с параметрами соответственно v; p; ρ, то будем иметь уравнение Бернулли в интегральной форме:

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=0. \tag{59}$$

Интеграл в уравнении (59) зависит от уравнения, характеризующего баротропный процесс, т. е. от вида зависимости $p=f(\rho)$.

Для несжимаемой жидкости $\rho=\mathrm{const}$ и уравнение Бернулли принимает форму

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{p_0}{\rho}=0,$$

или

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}=\frac{v_0^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}=\mathrm{const}.$$

Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости широко используется при рассмотрении многих технических задач, связанных с движением жидкости. Его обычно в этом случае обобщают, учитывая действие потенциальных объемных сил, прежде всего сил тяжести жидкости.

Для газа уравнение Бернулли (59) широко используется для адиабатических процессов, для которых $p/p_0=(\rho/\rho_0)^{\varkappa}$.

Преобразуем уравнение Бернулли в дифференциальной форме для газа так, чтобы можно было ввести число М. Имеем

$$v\mathrm{d}v+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0;\quad v\mathrm{d}v+a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0,$$

так как $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=a^2$. Поделив обе части на a^2, получим

$$\frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v}+\frac{d\rho}{\rho}=0,$$

или в окончательном виде

$$M^2\frac{dv}{v}+\frac{d\rho}{\rho}=0. \qquad (58')$$

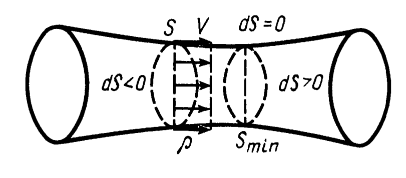


Рис. 179

Другое уравнение, необходимое для анализа течений газа в трубе переменного сечения, является уравнением неразрывности, или сохранения массы. Получим его непосредственно для рассматриваемой задачи в наиболее удобной форме (рис. 179).

Через каждое поперечное сечение трубы в случае одномерного течения проходит за 1 с масса газа $m=Sv\rho$, где S — площадь поперечного сечения трубы; v — скорость течения газа; ρ — плотность газа. При установившемся движении через все поперечные сечения должна пройти одна и та же масса газа, т. е. $m=Sv\rho=\text{const}$. Прологарифмируем это уравнение сохранения массы. Получим

$$\ln m=\ln S+\ln v+\ln \rho=\text{const}.$$

Считая переменными величины S; v; ρ, возьмем полные дифференциалы от обеих частей. Имеем

$$\frac{dS}{S}+\frac{dv}{v}+\frac{d\rho}{\rho}=0. \qquad (60)$$

Это и есть искомое уравнение неразрывности для установившегося одномерного течения идеального газа в трубе переменного сечения.

Из уравнения неразрывности (60) и уравнения Бернулли (58′) исключим величину $d\rho/\rho$. Получим

$$\frac{dS}{S}=\frac{dv}{v}(M^2-1). \qquad (61)$$

Это уравнение (61) называют уравнением Гюгонио.

Используя уравнение Гюгонио, проанализируем характер возможных течений газа в трубе переменного сечения. Из уравнения (61) следует: при $M<1$, что соответствует дозвуковым течениям, знаки величин dS и dv противоположны, т. е. там, где возрастает S, в направлении течения скорость должна убывать, и наоборот. Для сверхзвуковых течений $M>1$ и знаки у dS и dv одинаковы, т. е. сверхзвуковой поток распространяется противоположно дозвуковому. Чтобы увеличить его скорость, трубу следует расширять. При $M=1$ имеем $dS=0$, т. е. в этом случае S достигает максимума или минимума. Можно показать, используя (61), что $M=1$ может быть только в самом узком сечении трубы, где $S=S_{min}$.

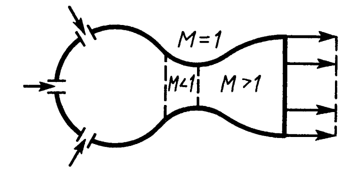


Рис. 180

Выводы о характере течений газа в трубах переменного сечения нашли применение в конструкциях сопел современных реактивных двигателей и аэродинамических труб больших скоростей. Для получения больших сверхзвуковых скоростей выходящего из сопла газа следует сначала сопло сужать, чтобы получить звуковую скорость газа в узком сечении сопла, а затем сопло надо расширять для дальнейшего увеличения скорости выходящего из него газа (рис. 180). Наибольшая скорость, которая может быть получена на выходе из сопла, зависит от площади выходного сечения и должна обеспечиваться необходимым для каждой скорости давлением на входе в сопло.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. НОВАЯ ФОРМА ОСНОВНЫХ АКСИОМ

По Ньютону, свойство инерции материальных объектов зависит от самих объектов, т. е. оно является внутренним свойством этих объектов. Возможна другая точка зрения, что инерция является сопротивлением физического пространства, в котором движутся материальные объекты.

Физическое пространство заполнено электромагнитным и гравитационным излучением. В нем находятся различные элементарные и неэлементарные частицы. Возможно, что не все частицы нам еще известны. Свойства пространства, согласно общей теории относительности, зависят от материальных объектов, находящихся в нем, и от других факторов.

Предлагаемая концепция инерции требует новой формы основных аксиом классической механики. Для их формулировки требуется ввести новые понятия и уточнить ранее применявшиеся. Аксиомы формулируются для материальной точки, понятие которой остается прежним. Прежними остаются также понятия пространства и времени, только пространство для принятой концепции инерции должно обладать свойством оказывать сопротивление движущимся в нем материальным объектам.

Используемое в классической механике понятие силы тоже сохраняется, только силу, действующую на материальную точку, должен устанавливать не инерциальный наблюдатель, находящийся в инерциальной системе отсчета, а собственный, т. е. наблюдатель, находящийся в собственной системе отсчета той материальной точки, на которую действует сила. Собственная система отсчета ранее была определена как система покоя точки.

Сила является величиной векторной, а векторы складываются по правилу векторного сложения. Поэтому сложение сил, приложенных к одной материальной точке по правилу параллелограмма, можно считать содержащимся в определении силы как вектора.

Нет необходимости вводить определение приложенной силы. На рассматриваемую точку действуют все материальные объекты, в том числе и само физическое пространство. Силы этого действия следует определять по законам физики для различных взаимодействий.

Потребуется понятие инерциальной системы отсчета, связанной с физическим пространством и, следовательно,

с материальными объектами Вселенной, определяющими свойство пространства оказывать сопротивление движущимся материальным объектам. Для наших целей в качестве такой инерциальной системы отсчета достаточно использовать гелиоцентрическую систему отсчета.

В общем случае сила сопротивления пространства может зависеть от времени, так как пространство расширяется, от места нахождения материальной точки в пространстве, ее скорости, ускорения и т. д. Установление зависимости силы сопротивления пространства от указанных факторов должно производиться путем эксперимента или путем создания теории взаимодействия пространства с движущимися материальными объектами.

Первая аксиома, которую можно назвать аксиомой Ньютона, лишь приближенно отражает реальную закономерность. Она утверждает: *сила сопротивления пространства пропорциональна ускорению точки относительно инерциальной системы отсчета и направлена против этого ускорения*, т. е.

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}, \tag{1}$$

где $\bar{\Phi}$ — сила сопротивления пространства или сила инерции точки; $\bar{a}$ — ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета.

Коэффициент пропорциональности m выражает значение силы сопротивления пространства, приходящуюся на единицу ускорения и называется инертной массой точки. Таким образом, инертная масса точки является своеобразным коэффициентом сопротивления пространства. Для малых скоростей движения точки по сравнению со скоростью света масса не зависит от скорости и является величиной постоянной. Физическое пространство ведет себя как идеальная жидкость, которая тоже не оказывает сопротивления движению тел с постоянной скоростью. При больших скоростях масса зависит от скорости.

Вторая аксиома, или аксиома Даламбера, постулирует одно из основных свойств всех сил, действующих на материальную точку при любом ее состоянии со стороны других материальных объектов, в том числе и со стороны пространства Вселенной. Согласно этой аксиоме, *все силы, действующие на материальную точку, образуют равновесную систему сил*, т. е.

$$\bar{F} + \bar{\Phi} = 0, \tag{2}$$

где $\bar{F}$ — равнодействующая сила от действия на точку всех других материальных объектов, кроме пространства.

Из уравнений (1) и (2) получаем следствие

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{3}$$

которое является **основной аксиомой Ньютона** в его системе аксиом. Из (3) по известной силе $\bar{F}$ и массе можно определить

ускорение точки, и наоборот. Из (2) следует, что силы от действия материальных объектов и сила сопротивления пространства полностью равноправны.

Получено условие для сил, действующих на материальную точку не только при покое, но и при любом ее движении. Такого условия нет в механике, основанной на аксиомах Ньютона. Таким образом, на любой материальный объект в природе действуют только равновесные системы сил.

Третья аксиома, или закон о равенстве сил действия и противодействия, определяет зависимость между силами взаимодействия двух материальных точек: *силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине или модулю и противоположны по направлению*, т. е.

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2, \tag{4}$$

где $\bar{F}_1$ — сила действия второй материальной точки на первую; $\bar{F}_2$ — сила действия первой точки на вторую.

Для механических взаимодействий в теоретической механике дополнительно предполагается, что силы взаимодействия точек направлены по одной прямой, проходящей через точки. Если это не предполагать, то электромагнитные силы тоже будут удовлетворять (4).

При взаимодействии двух точек, находящихся на расстоянии друг от друга, целесообразно считать, что каждая из точек взаимодействует контактно с полем другой точки.

Предлагаемые основные аксиомы в новой форме независимы. Их число минимально. Они не противоречивы. Введение их в основы классической механики вместо аксиом Ньютона устраняет все трудности, присущие механике, основанной на аксиомах Ньютона, в том числе снимается вопрос о гравитационном парадоксе. Отпадает необходимость вводить в теоретическую механику всякого рода неполноценные силы.

2. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

При рассмотрении движения материальной точки и всех других материальных объектов вблизи Земли учитывается сила притяжения Земли и не учитываются силы тяготения всех остальных материальных объектов Вселенной, хотя эти силы очень велики по сравнению с силой притяжения Земли. В учебной литературе объяснение этого или отсутствует, или дается неверно, путем ссылки на удаленность этих объектов Вселенной.

Для выяснения истинных причин, по которым не учитываются силы тяготения некоторых объектов Вселенной, проведем анализ различных систем отсчета. Анализ удобно провести,

используя основную аксиому механики в новой форме:

$$\bar{F}+\bar{\Phi}=0, \qquad (2')$$

где $\bar{F}$ — равнодействующая сила от действия на точку всех материальных объектов; $\bar{\Phi}=-m\bar{a}$ — сила сопротивления пространства (сила инерции точки), зависящая от ускорения точки $\bar{a}$ относительно выделенной инерциальной системы отсчета, определяющей сопротивление пространства.

Условие (2′) для сил справедливо для наблюдателя, находящегося в собственной системе отсчета точки. Только в этих системах отсчета определяется действие сил. Простейшей собственной системой отсчета точки является ее система покоя, относительно которой скорость и ускорение точки равны нулю. Рассмотрим некоторые особенности, связанные с выбором различных систем отсчета, движущихся относительно выделенной инерциальной системы отсчета. Разложим движение точки на переносное и относительное. Тогда сила сопротивления пространства выразится в форме

$$\bar{\Phi}=\bar{\Phi}_e+\bar{\Phi}_r+\bar{\Phi}_к, \qquad (5)$$

где $\bar{\Phi}_e=-m\bar{a}_e$ — сила сопротивления пространства от переносного движения; $\bar{\Phi}_r=-m\bar{a}_r$ — сила сопротивления пространства от относительного движения и $\bar{\Phi}_к=-m\bar{a}_к$ сила сопротивления Кориолиса.

Выбирая в качестве подвижных систем отсчета системы, для которых $\bar{\Phi}_e=0$, тогда $\bar{\Phi}_к$ тоже равна нулю, получим класс других инерциальных систем отсчета. Этот класс можно расширить, если принять $\bar{\Phi}_e+\bar{\Phi}_к=0$. Движение таких обобщенно-инерциальных систем отсчета должно зависеть от параметров относительного движения точки, но принципиально возможно введение таких систем отсчета. Для всех инерциальных систем отсчета (2′) принимает форму $\bar{F}+\bar{\Phi}_r=0$ и для таких систем отсчета $\bar{\Phi}=\bar{\Phi}_r$. В учебной литературе обобщенно-инерциальные системы отсчета не рассматриваются.

Из совокупности подвижных систем отсчета можно выделить класс локально-инерциальных систем отсчета. Для этого разложим $\bar{F}$ на составляющие:

$$\bar{F}=\bar{F}_s+\bar{F}_т, \qquad (6)$$

где $\bar{F}_s$ — сила от действия на точку тел и сред, соприкасающихся с ней (поверхностная сила); $\bar{F}_т$ — сила действия на точку материальных объектов посредством силовых полей. В рассматриваемом случае это силы гравитационного тяготения. Силу тяготения тоже разложим на составляющие

$$\bar{F}_т=\bar{F}_т^{(r)}+\bar{F}_т^{(e)}, \qquad (7)$$

где $\bar{F}_т^{(e)}$ — сила тяготения от материальных объектов, не включенных в тела подвижной системы отсчета; $\bar{F}_т^{(r)}$ — сила

тяготения от объектов, входящих в подвижную систему отсчета.

С учетом этих разложений (2′) примет такую форму:

$$\bar{F}_s+\bar{F}_{\text{т}}^{(r)}+\bar{F}_{\text{т}}^{(e)}+\bar{\Phi}_r+\bar{\Phi}_e+\bar{\Phi}_{\text{к}}=0. \qquad (2'')$$

Системы отсчета, движущиеся относительно выделенной инерциальной, для которых выполняются условия $\bar{F}_{\text{т}}^{(e)}+\bar{\Phi}_e=0$ и $\bar{\Phi}_{\text{к}}=0$, или $\bar{\omega}=0$; называются локально-инерциальными системами отсчета. Эти системы отсчета не вращаются относительно инерциальных и их движение не зависит от относительного движения точки. Именно этот класс локально-инерциальных систем отсчета фактически используется в задачах механики, хотя это и не осознается.

Для движения локально-инерциальных систем отсчета и движения точки относительно любой из них выполняются условия:

$$\bar{F}_{\text{т}}^{(e)}+\bar{\Phi}_e=0; \qquad (8)$$

$$\bar{F}_s+\bar{F}_{\text{т}}^{(r)}+\bar{\Phi}_r=0. \qquad (9)$$

Используя эти условия, проведем анализ различных локально-инерциальных систем отсчета и движения точки относительно таких систем.

Из (2′) с учетом (6) получаем

$$\bar{F}_s+\bar{F}_{\text{т}}+\bar{\Phi}=0.$$

Из этого условия при $\bar{F}_s=0$ получается условие, которое выполняется при невесомости точки по отношению к выделенной инерциальной системе отсчета, а следовательно, и всех других инерциальных систем отсчета. Если $\bar{F}_s=0$, то из (9) получаем условие невесомости точки относительно локально-инерциальной системы отсчета в форме

$$\bar{F}_{\text{т}}^{(r)}+\bar{\Phi}_r=0.$$

Можно рассматривать различные локально-инерциальные системы отсчета. Они отличаются от семейства инерциальных систем отсчета. Все они не вращаются относительно инерциальных систем, т. е. движутся относительно их поступательно, но с ускорением.

Условие (8) выполняется при невесомости материальной точки, движущейся вместе с выбранной локально-инерциальной системой отсчета относительно любой из инерциальных систем отсчета. В качестве точки, вместе с которой движется локально-инерциальная система отсчета, можно выбрать любую точку, находящуюся в невесомости относительно инерциальной системы отсчета под действием силы тяготения $\bar{F}_{\text{т}}^{(e)}$. В качестве таких систем отсчета обычно в практике используются системы, движущиеся поступательно вместе с центрами масс материальных объектов, находящихся приближенно в невесомости относительно инерциальных систем отсчета. Это центры масс

скоплений галактик, нашей галактики, солнечной системы, самого Солнца, земного шара, естественных и искусственных спутников Земли и других планет; свободно падающего у Земли лифта в пустоте и т. п. Приближенность невесомости рассматриваемых материальных систем обусловлена тем, что различные системы материальных объектов не свободны от сил сопротивлений сред, в которых они движутся. Для пояснения этого разложим силу $\bar{F}_s$ на составляющие, т. е.

$$\bar{F}_s = \bar{F}_s^{(e)} + \bar{F}_s^{(r)}, \qquad (10)$$

где $\bar{F}_s^{(e)}$ — часть силы, в основном сопротивления среды, для точки и векторная сумма этих сил для системы материальных объектов при движении вместе с подвижной системой отсчета; $\bar{F}_s^{(r)}$ — часть силы сопротивления для точки и векторная сумма сил сопротивления системы материальных объектов при относительном движении.

Для движения центра масс реальной системы материальных объектов относительно инерциальной системы отсчета, как и для материальной точки, имеем

$$\bar{F}_s^{(e)} + \bar{F}_т^{(e)} + \bar{\Phi}_e = 0, \qquad (11)$$

где $\bar{F}_т^{(e)}$ — сила тяготения, действующая на всю совокупность материальной системы; $\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C - M\bar{a}_e$ — сила сопротивления пространства для всей системы; M — масса системы; $\bar{a}_C$ — ускорение центра масс, которое равно переносному ускорению материальной точки, совпадающей с центром масс, но имеющей добавочное движение относительно системы отсчета, движущейся поступательно вместе с центром масс.

Для того чтобы для центра масс выполнялось условие невесомости и, следовательно, система материальных объектов как единая совокупность тоже находилась в невесомости по отношению к инерциальной системе отсчета, должно выполняться условие $\bar{F}_s^{(e)} = 0$. Тогда для центра масс справедливо условие

$$\bar{F}_т^{(e)} + \bar{\Phi}_e = 0 \qquad (12)$$

и система отсчета, движущаяся вместе с центром масс относительно инерциальной системы, окажется локально-инерциальной.

Все реальные системы материальных объектов не свободны от сил сопротивления различных сред. Материальным объектам нашей галактики оказывает сопротивление межгалактическая среда, являясь для нее внешней. Для Солнца к этому добавится сопротивление внутренней среды нашей галактики, а для искусственного спутника Земли — еще и сопротивление атмосферы. Кажется, что при переходе от небольших систем материальных объектов к более крупным системам, например от искусственного спутника Земли, к самой Земле, Солнцу,

галактике, сопротивление среды будет уменьшаться. Для каждого материального объекта, очевидно, это справедливо. Но по мере продвижения к более крупным скоплениям возрастает число объектов, испытывающих сопротивление среды. При движении центра масс следует учитывать силы сопротивления от всех объектов. Без специального исследования трудно оценить, какая из систем, отсчета, движущаяся вместе с центром масс какой-либо системы материальных объектов более близка к идеальной локально-инерциальной системе отсчета.

Для движения точки относительно локально-инерциальной системы отсчета из (2′) и определения такой системы получаем условие:

$$\bar{F}_s^{(r)}+\bar{F}_{\text{т}}^{(r)}+\bar{\Phi}_r=0, \qquad (9')$$

если пренебречь силой $\bar{F}_s^{(e)}$. Это условие аналогично (2′) при движении точки относительно инерциальной системы отсчета. В (9′) входят только силы действия на точку со стороны материальных объектов, вместе с центром масс которых движется выбранная локально-инерциальная система отсчета. Сила сопротивления пространства зависит тоже только от движения точки относительно выбранной системы отсчета.

При использовании любой локально-инерциальной системы отсчета часть сил тяготения $\bar{F}_{\text{т}}^{(e)}$ не входит в (9′) и, следовательно, ею не требуется пренебрегать. Пренебрегать приходится только силой $\bar{F}_s^{(e)}$ для системы отсчета, движущейся вместе с центром масс реальной материальной системы.

Для невесомости материальной точки относительно локально-инерциальной системы отсчета должно выполняться условие

$$\bar{F}_{\text{т}}^{(r)}+\bar{\Phi}_r=0,$$

которое получается из (9′), если для точки $\bar{F}_s^{(r)}=0$, где $\bar{F}_s^{(r)}$ — сила от соприкосновения точки с телами и средой, входящими в локально-инерциальную систему отсчета при движении точки относительно этой системы отсчета. Сила тяготения $\bar{F}_{\text{т}}^{(r)}$ создается тоже только материальными объектами, включенными в локально-инерциальную систему отсчета. Условие невесомости точки относительно локально-инерциальной системы отсчета аналогично условию невесомости относительно инерциальной системы отсчета.

Для невесомости точки относительно инерциальной системы отсчета должны выполняться условия ее невесомости относительно локально-инерциальной системы отсчета и условие невесомости от движения вместе с локально-инерциальной системой отсчета относительно инерциальной системы. Невесомость точки из-за неоднородности полей тяготения от различных материальных объектов строго осуществляется только в одной точке и приближенно в области, содержащей эту точку. Область невесомости точки зависит от размеров

материальных объектов, участвующих в создании полей тяготения и их удаленности.

Для определения семейства локально-инерциальных систем отсчета необходимо знать хотя бы одну инерциальную систему отсчета. Для введения всей совокупности инерциальных систем отсчета требуется иметь выделенную или основную инерциальную систему отсчета. С основной системой отсчета связан вопрос о механизме возникновения сил сопротивления пространства при движении в нем различных материальных объектов. Сила сопротивления пространства для материальной точки $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ аналогична силе сопротивления идеальной жидкости (жидкость без трения), действующей на движущиеся в ней тела. Эта аналогия приводит к мысли, что основная инерциальная система отсчета должна быть связана с той жидкостью без трения, которую содержит пространство. В качестве одного из кандидатов на такую жидкость называлось реликтовое излучение. Возможно, что силы сопротивления пространства носят обменный характер. Тогда основную инерциальную систему отсчета следует выбирать по-другому. В общей теории относительности при движении материальных объектов в пространстве происходит изменение кривизны пространства. Силу сопротивления пространства можно считать зависящей от изменения этой кривизны.

Из сказанного ясно, что вопрос о выборе основной инерциальной системы отсчета еще не решен. В учебной литературе в настоящее время в качестве основной инерциальной системы отсчета выбирают обычно гелиоцентрическую систему, которая одновременно является одной из приближенно локально-инерциальных систем отсчета.

В некоторых учебниках по теоретической механике и физике для выбора инерциальных систем отсчета используют аксиому инерции. В одном из учебников аксиома инерции сформулирована так: «Системы отсчета, в которых справедлив принцип инерции, называются инерциальными системами отсчета». Принцип инерции, как известно, состоит в том, что материальная точка движется прямолинейно и равномерно по инерции относительно инерциальной системы отсчета, если на точку не действуют силы или действует равновесная система сил.

Использование принципа инерции для выбора инерциальных систем отсчета предполагает его расширение на другие системы отсчета, из которых выбираются инерциальные системы отсчета.

Из проведенного анализа систем отсчета следует, что принцип инерции справедлив в локально-инерциальных системах отсчета, но локально-инерциальные системы отсчета не могут все принадлежать к инерциальным системам отсчета, так как они движутся относительно инерциальных хотя и поступательно, но с ускорением.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Никитин Николай Никитич

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Зав. редакцией *А. В. Дубровский* Редактор *Н. М. Щепина.* Младшие редакторы *Т Ф. Артюхина, Н. М. Иванова.* Художественный редактор *Л. К Громова.* Технический редактор *Е. И. Герасимова* Корректор *Г. И. Кострикова*

ИБ № 8230

Изд. № От-704. Сдано в набор 21.03.90 Подп. в печать 26.09.90. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. офсет. № 2. Гарнитура «Таймс» Печать офсетная. Объем 38,00 усл. печ. л. 38,00 усл. кр.-отт. 36,88 уч.- изд. л. Тираж 100 000 экз. Зак. № 192. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по печати. 113054, Москва, Валовая, 28.

